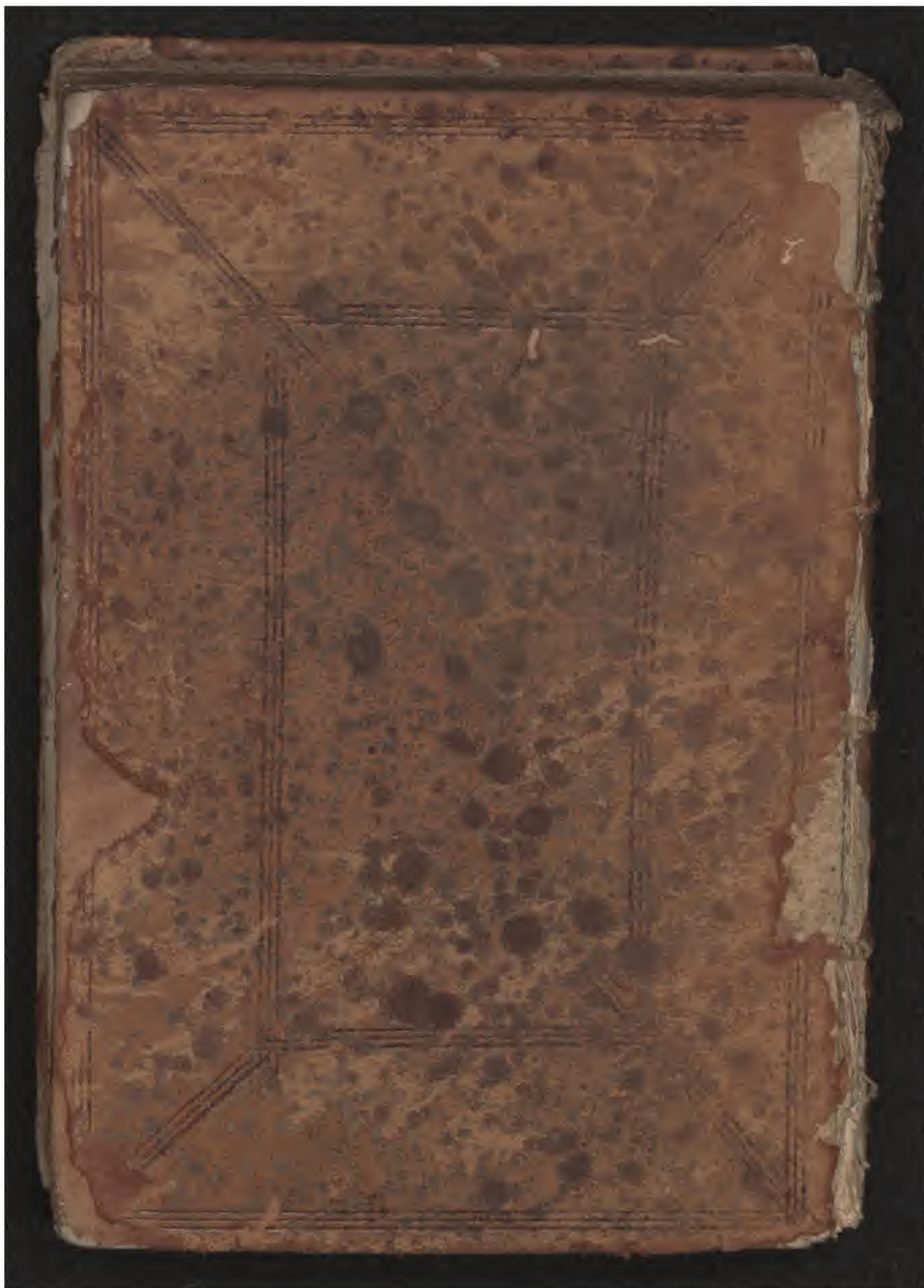


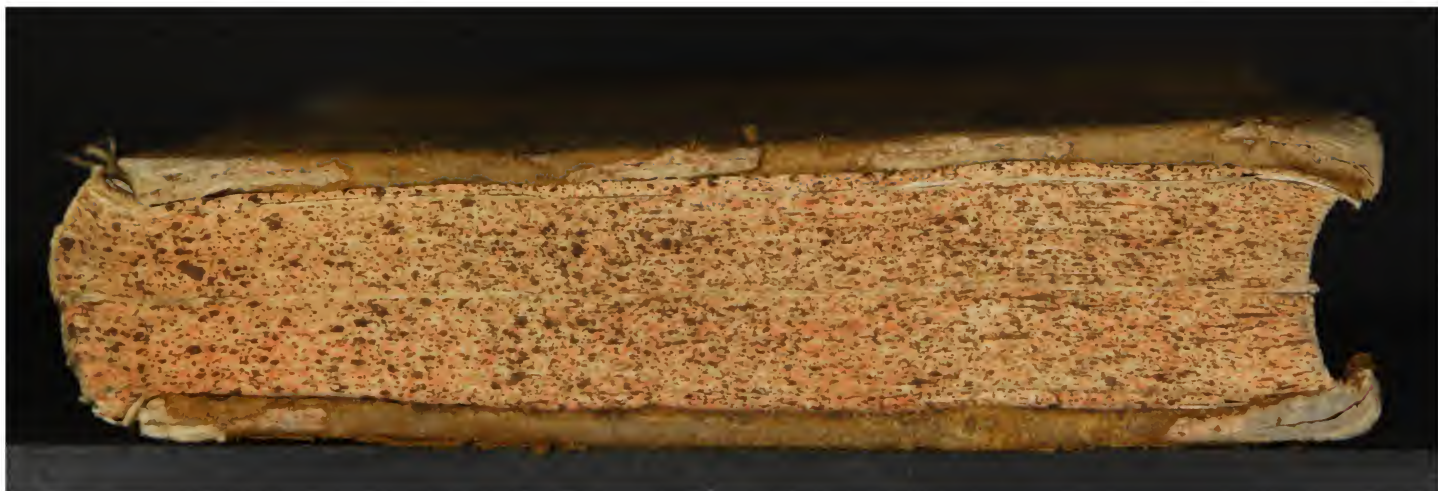


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.312/a





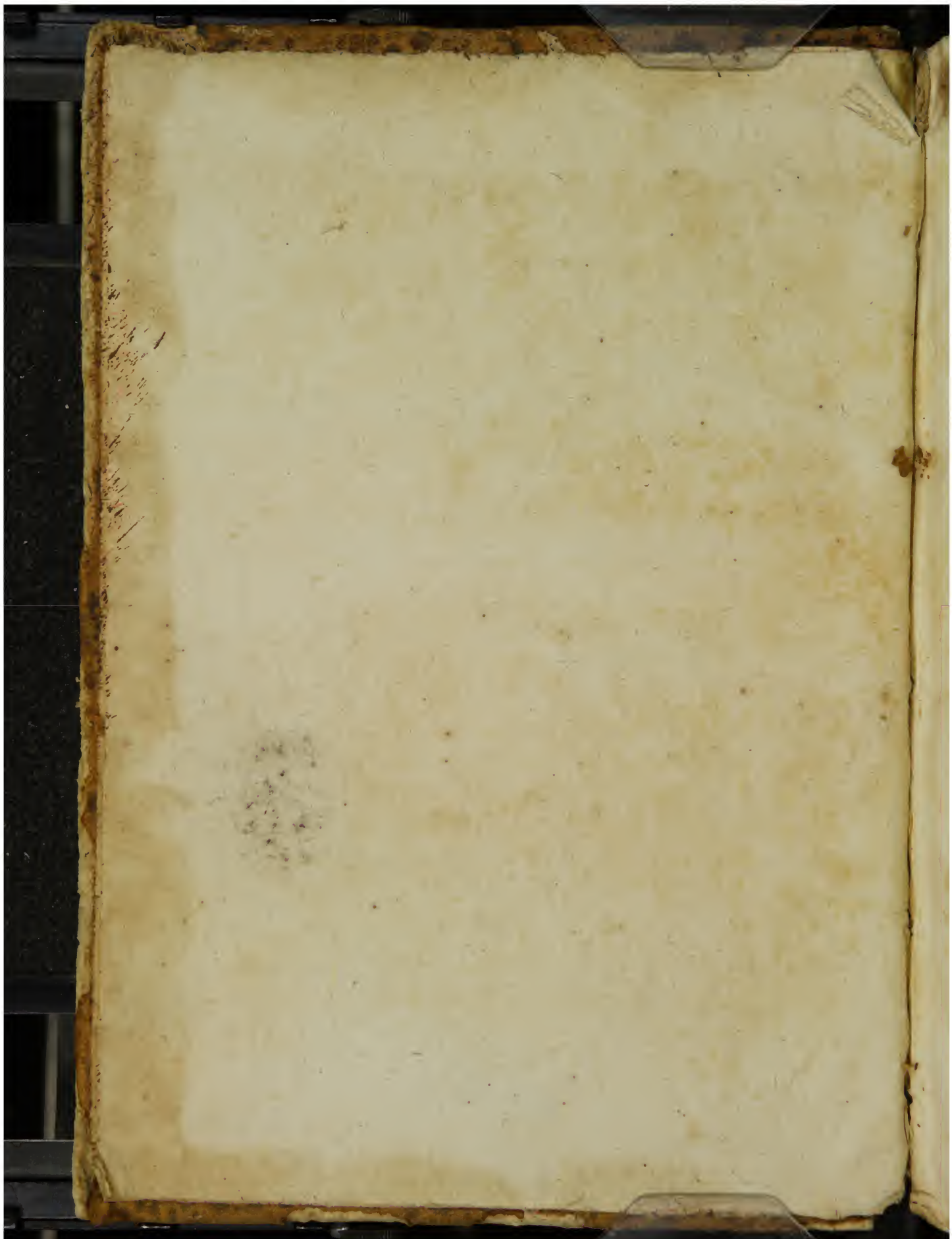
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.312/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.312/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.312/a



VETERVM
GEOMETRIA
PROMOTA IN SEPTEM
DE
CYCLOIDE LIBRIS,

Et in duabus adiectis Appendicibus.

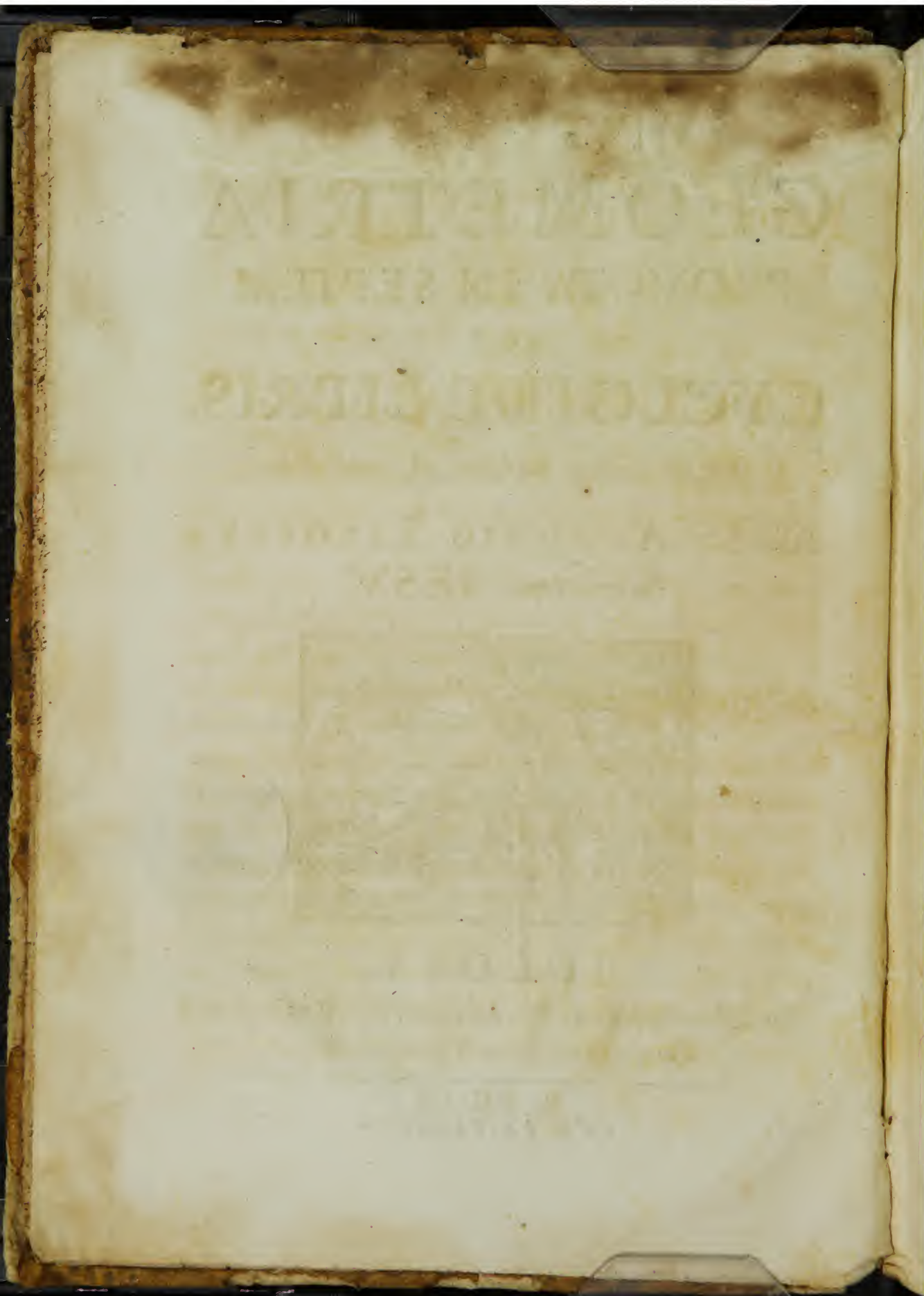
Autore ANTONIO LALOVERA
Societatis IESV.



TOLOSÆ.

Apud ARNALDVM COLOMERIVM, Regis & Aca-
demiæ Tolosanæ Typographum.

M. DC. LX.
CVM PRIVILEGIO.





SERENISSIMO PRINCIPI
ARMANDO BORBONIO.
PRINCIPI DE CONTY,
PROREGI OCCITANIÆ, &c.



OT tàmque admiranda , quæ Anti-
quos latuerint , inueniuntur ab æta-
tis nostræ Geometris (SERENISSIME
PRINCEPS) vt rectè nuper pronuntiatum
à quodam fuerit, nunc tandem in Geo-
metricis superatum fœliciter esse Bonæ Spei pro-
montorium ; vnde ad incognitas olim , præcipuè
Tetragonismorum & Perimetrorum Regionem ex-
pedita pateat via. In hac ego longinquâ peregrina-
tione cùm plures annos consumpserim , iamque
postremùm redux noui aliquid inde asportasse mihi
videar , eiusmodi inuenti primum & generalem
conspectum deberi Tibi , qui pro Rege in istis oris
summâ totius Prouinciæ fœlicitate imperas , statim

*

intellexi. Tua verò, quam à stirpe Borboniâ hære-
ditario iure trahis, Comitas; & quam Indole, stu-
diisque Regio sanguine dignissimis mirificè auges;
compulit me, vt moras, quas tenuitatis meæ mihi
consciis necebam, abrumperem; Tibique me cum
diurnæ nauigationis fructu qualicunque, meo
certè & nouo sisterem. Fiduciam accedendi auxit,
quod cùm septem istorum librorum primum, ali-
quod nostræ aduectionis periculum facturus, emi-
sissem, & nominatim ad Virum direxissem in digno-
scendis & æstimandis iis, quæ in hoc genere ex Orbe
diffuso conuehantur, experientissimum, non sit con-
temptui habitus, redieritque prælo iterum paratus,
& fratribus (vt equidem spero) non inauspicatò
adiungendus. Nauium nomen quibus istud, quic-
quid est Geometriæ, inueximus, *Libra* est, absolu-
tissimum Iustitiæ Tuæ symbolum; neque verò no-
men nudum est, sed & res ipsa ab Archimede olim
fabricata, à nobis restaurata, & ad tutam per sum-
ma & auiam marium velificationem, vindicata Geo-
metris. Quod autem duas eius nominis adhibui-
mus, vnā quam *Grammicam* diximus; alteram,
planam; minimè pertimescimus illud Sapientis,
abominatio est apud Dominum pondus, & pondus:
quamuis enim diuersæ existant, ambæ tamen sunt
æquissimæ, mirabilèque ad Veritatem longè in re-

rum abditis inquirendam, atque inde in oculos hominum asportandam adiumentum. Sed cur istud ego fusiùs commemoro: cùm tua illa in omni Disciplinarum genere eruditio, hominum opinione longè maior, id per se vel primo obtutu æstimare facile possit; & cùm mihi satis superque sit hac ad Te admissum fuisse occasione, vt quam Tolosates, Occitaniæque Tuæ Populi omnes cohibere non possunt lætitiā, postquam Tuo gubernari iam cœperunt Imperio, illam ego Tibi tester, quam cœpi vel ob id maiorem, quòd eius Societatis sim, cui iucundissimum semper fuit Tuis parère nutibus. Vno & eodem tempore Tua Occitania immortale beneficium à Rege Optimo sibi duplex conferri sensit; primum fuit commune reliquis non Prouinciis solùm, sed etiam, quā latè patet Europa, Regnis, Pax diu expetita, & tot bellis victoriisque parta; alterum, Te qui expeditionibus Italicâ & Ruscinonensi plurimum ad tantum illud munus contuleras, habere Rectorem, eiusdemque Regium ac Perpetuum vindicem. Vix Te primus rumor Proregem in Prouinciā istā detulerat, cum auita Religio & Iustitia sese altiùs extulerunt, Fautoris & Defensoris Potentissimi audito nomine: Tolosæ verò, quæ vt caput Prouinciæ loqui solet, vna fuit, estque etiam nunc constans vox è Panegyrico illo, hoc est, ex

Adulationis sede ad Veritatis solum traducta, *Vita*
Principis censura est, eaque perpetua; ad hanc diri-
gimur, ad hanc conuertimur, nec tam imperio no-
bis opus est, quàm exemplo. Illo vt diutissimè præ-
luceas Prouinciæ Tuæ, Regno, & Orbi, opto, sum-
misque à Deo votis postulo, in Collegio Tolosano
8. Maij 1660.

Deuotus Seren. Tuæ Celsit.

ANTONIUS LALOVERA,
Societatis IESV.



Ad Lectorem Geometram.

N IHIL dubito, LECTOR GEOMETRA, quin octo problematum totâ Europâ peruulgatorum calculus, quem ineunte anno superiore 1659. edidi, aliquam in te concitarit expectationem demonstrationum quas tunc pollicitus sum: sed moram sex mensium ex eo interiectorum ante primam Typographi operam ab anno ferme iam cœptam purgabit ecce duplicatus librorum numerus. Cum enim vniuersa illorum problematum demonstratio libris comprehensa quatuor tunc penes nos extaret, prodeunt nunc omnino septem, cum Appendicibus duabus, quæ pro libro integro ut computentur, facile (nisi fallor) a te obtinebunt: adeo nouam & arduam materiam tractant. Noua siquidem in Geometricis querenda mihi semper propterea duxi, quod cum ab alijs iam inuenta illustrentur sua satis demonstratione, hoc unum Geometrae Scriptori restare videretur, ut ad irreperita porro pergat; alioquin aliena in hoc genere scriptio- nis ingerere, hominis est (ut cum Tullio in pari ferme causâ loquar) in- temperanter abutentis otio, & literis. Primum tamen huius Operis li- brum licet antea à nobis editum, hîc secundo damus, quod initium sit so- lutionis quaesitæ, & quod in antecessum emissus tunc fuerit, quasi alijs pralurus; praesertim si Viri doctissimi, ad quem illum tunc destinauimus, examine & iudicio non improbatus rediret. Quod autem post acceptam Dettonuillai Epistolam illam qua peritissimos Europæ Geometras ad inqui- sitionem solutionis prouocabat, statim intra decem dies primum illum libel- lum ediderimus; & quod post tres menses totam solutionem mente com- plexi fuerimus, eamque è schedulis in mundum relata initio mensis No- uembris habuerimus, non est quod quisquam id imputet promptiori cuidam ingenij nostri solertia; etenim eam in nobis nullam esse agnoscimus, & pro- fitemur: sed causa huius unica est, quod generalem methodum ad solutio- nem eiusmodi problematum iam ab anno 1651. edideramus in Tetragonis- micorum Elementorum libris, ut in sexto huius Operis libro ostendemus; illius verò methodi fundamento ita praeiactò superstruenda tantum nobis ea fuerunt, quæ erant huius materiae propria: quanquam & horum quoque magnam partem iam cognitam habebamus ex iisdem illis Elementis, nempe quæ ad quadratrices circuli attinent. Dicit enim vix potest quanto in

Ad Lectorem Geometram.

Geometricis sublimioribus adiumento sint istæ quadratrices, quarum generalem, nativam & minimè fucatam genesim cum haussemus ex generatione quadratricis, quam tantum pro triangulo rectilineo Archimedes olim tradiderat, unde & Parabola quadraturam elicuerat, inuenimus tanto post tempore quadratrices circuli & hyperbolæ, easque innumeras, ut in secundâ Appendice explicamus. Ex illis verò semel habitis assequuti nullo negotio sumus quatuor præsertim, quæ præ nouitate admirationem aliquam habuerunt; primò ex dato segmentorum centro grauitatis, quadraturam ipsorum eruiamus segmentorum non in circulo vel ellipse solum, sed in qualibet etiam hyperbola; secundò ex datâ quadraturâ segmentorum, inuenimus grauitatis centrum ipsorum segmentorum, & etiam semisegmentorum; tertio inde quoque obtinuimus cubaturam portionis cylindri, aut cylindracei, cuius basis sit segmentum, vel semisegmentum non circuli tantum, sed hyperbolæ quoque cuiuscunque, præcisam plano per centrum utcunque ducto; quarto denique eiusmodi portionum (eas vngulas vocauit Gregorius à S. Vincentio; nos cuneos) reperimus centra grauitatis, datâ circuli & hyperbolæ quadraturâ; quæ quatuor anterioribus Geometris incognita fuere, quantum ex ipsorum monumentis constat. In illis ipsis Elementis statuimus principia, unde infertur tetragonismus figuræ, quæ ad positionem rectæ datæ inclinata sit super datâ qualibet curuâ, & generetur ex figurâ aliâ insistente super illâ eadem curuâ, ut rem exponimus in secundâ Appendicis huius operis parte 2. num. 8. Cuius quidem inuentionis nostræ meminimus nunc, ut innuamus, ex ea nos elicere quadraturam Hyperboloidis, eodem pacto genita, quo Cycloides primaria: Cycloidis enim generatio offert modum similes lineas procreandi in alijs quibuscunque curuis, hoc modo.

In Figura LIII. designata notis Romanis in tabula quarta, esto quælibet curua bi , per quam intelligatur æquabiliter moueri punctum b , ita ut æqualibus temporibus æquales portiones itineris curui percurrat; esto recta cr ad quam ex b demissa sit perpendicularis bc ; intelligatur æquabili latione ferri recta cb secum connexam curuam ib deferens; ita autem trahatur ad partes r super recta rc , ut paribus temporibus pares portiones eiusdem cr decurrantur ab ipsa bc constituente semper angulum rectum cum eadem cr ; illæ autem portiones lineæ rectæ rc sint æquales portionibus curuæ bi decursis eodem tempore. Via quam describit motu suo punctum b habet generationem similem viæ Cycloidicæ: ac proinde si figura btf ad positionem rectæ rc æquet differentiam figuræ bi g , & figura illius inde ita genita, habet hanc proprietatem ut fg parallela rectæ cr occurrens

Ad Lectorem Geometram.

occurrentes rectæ $b c$ in g , & arcui $b i$ in i , sit perpetua lege æqualis arcui $b i$, ut in secunda propositione primi ostendimus pro Cycloide, pro alijs verò non est multò difficilius probatu. Caterùm semita ista puncti b in motu rotæ & similium spectata, in memoriam mihi reuocare solet viam aquilæ in cœlo, in qua percipienda Sapientissimus Salomon se plurimum laborare profitetur: sicuti enim aquila lineam sui volatûs (ut Ambrosij verba, quæ Geometram sapiunt, usurpem) figit in liquido, ita rotæ currentis punctum lineam sui quasi volatûs notat in aëre, sed obscuris admodum vestigijs, & quæ negotium Geometræ hand exiguum faceffunt.

Esto iam $d b i$ hyperbola primaria (ita voco eam cuius axes sunt inter se æquales) comprehensa asymptotis $c a$, an angulum rectum $c a n$ constituentibus, ut ex Elementis conicis constat; etus semiaxis transuersus sit $b a$; intelligatur curua $f t b h$ ita genita ex hyperbolica $i b d$, ut quæcunque $i g$ vel $h e$ ad rectam $r c$ parallela ducatur, occurrens hyperbolæ perimetro in i vel d ; recta $f g$, vel $e h$ sit æqualis arcui $i b$, vel $b d$; compleatur parallelogrammum $a c b n$, quod ex iisdem Elementis ostenditur esse quadratum; ex $a b$ secetur $a q$ æqualis lateri $a c$, & per q agatur $q z$ perpendicularis ad $q a$; per n agatur $n z$ parallela rectæ $q a$, & compleatur parallelogrammum $z q a m$. Descripta sit $z o$ hyperbola primaria semiaxe transuerso $z m$, centro m ; intelligatur alia hyperbola primaria $u a l$ cuius centrum q , semiaxis transuersus $q a$: ducta sit qualibet $r i$ parallela asymptoto $a n$, occurrens alteri asymptoto in r ; hyperbolæ $b i n i$: per i ductæ sint $i u$, $i o$ parallela ad rectas $b a$, $a m$, occurrentes hyperbolis $l a u$, $n o$ in u , o ; rectis $q z$, $m z$ in s , x ; ducta quoque sit per i recta $f i g$ parallela rectæ $c r$, occurrens curuæ $b t f$ in f ; compleatur parallelogrammum $g f y c$. Aio quoties inter puncta r , a iacet punctum c , figuram hyperbolicam $s u a q$ (eam appello externè cauam) imminutam hyperbolica altera internè caua $z o x$ esse æqualem figuræ $y f t b c$ comprehensæ sub curua $f b$, & sub rectis $f y$, $y c$, $c b$. Quod si puncta y , f iacuerint ad rectæ $c b$ partes oppositas, aio utrumque simul segmentum fore æquale figuræ $y f t b c$. Hinc infero cuneatam vel vngularem superficiem definitam in decima sexta quinti libri sequentis, insistentem super curua $i b$, & abscissam plano per $c a$ rectam ducto, inclinatóque ad planum $r c b$ gradibus 45 . esse notam, data quadratura hyperbolæ, ut pote æqualem figuræ $y f t b c$. Vnde præterea elicio si recta $i o$ ponatur occurrere curuæ $b d$ in d , superficiem vngularem insistentem super curua $i b d$ esse æqualem duplo hyperbolica figuræ $s q a u$ comprehensæ sub rectis $a q$, $q s$, $s u$, & sub arcu hyperbolico $u a$. Ex ista autem vngulari superficie præfacile est dare

**

Ad Lectorem Geometram.

superficiem periphericam quam linea hyperbolica $d b i$ describit dum circa rectam $b c$ manentem rotatur; methodus enim illius traditur in quinquagesima secunda quinti libri, ex demonstratis in corollario secundo decimæ nonæ. Superficiem autem similem pro superficie parabolæ rotatæ circa axem vel basim inuenit Clariss. Fermatius, eiusque nos methodum exhibemus in parte prima Appendicis secundæ: ut iam non solum cognita sit superficies plana æqualis spherice genitæ ex rotatione circuli, quæ ab Archimede primum fuit demonstrata; & superficies conoides respondens rotationi parabolæ, quam debemus V. C. Fermatio: sed superficies etiam illa, quæ hyperbolæ, modo iam præscripto rotatæ competit, estque inuentionis nostræ. Quod si eadem hyperbolæ primaria intelligatur duci circa axem transversum $a b$, vel rectum $a m$, huic quoque conoidicæ superfici ei æqualem figuram planam exhibet methodus nostra; per illam enim unguularis superficies primaria (sic appello eam quæ abscinditur plano super basi inclinato gradibus 45.) resecta plano per axem transversum ducto est æqualis planæ figuræ quæ super eodem transuerso insistit, & cuius dimetientes ad positionem recti semiaxis sunt æquales semidiametris eductis à puncto hyperbolæ in quo figuræ ita insistentis dimetientes illæ (sic vocare soleo parallelas rectas uni certæ datæ, ut in isto casu parallelas alteri axi) secant ipsam hyperbolam. Ita quoque unguularis superficies primaria resecta plano per axem rectum ducto est æqualis planæ figuræ, quæ super eodem axe recto insistit, & cuius dimetientes ad positionem axis transversum sunt æquales semidiametris pari pacto eductis ex puncto hyperbolæ. Hoc idem theorema habet locum in unguulari superficie (primariam semper intelligimus, nisi aliud innuamus) ad circumlum attinente, ideoque cum semidiametri omnes sint inter se æquales, eiusmodi plana figura est parallelogrammum rectangulum altitudinis æquantis semidiametrum circuli. Ceterum istæ planæ figuræ insistentes tam super axe transversum quàm super recto hyperbolæ primariæ, ad figuras $a q s u$, & $o x$ supra descriptas pro gyratione hyperbolæ primariæ $i b d$ circa rectam $c b$, se habent ut diameter quadrati ad latus eiusdem: dimetientes enim figuratum $a q s u$, & $o x$, parallelæ axibus $b a$, $a m$, representant rectas quæ ad figurarum ita insistentium dimetientes, hoc est ad semidiametros hyperbolæ $d b i$, se habent ut latus quadrati ad diametrum eiusdem. Nec mihi tam abstrusum fuit inuenire illas figuras esse hyperbolicas, quàm esse æquales unguulari superfici ei; sunt enim duo ista, valde diuersa: unde licet methodus inueniendi has figuras esset vitiosa, prius tamen theorema adhuc staret.

Gregorius à S. Vincentio in prop. 230. de Hyperb. inuenit quidem figuram

Ad Lectorem Geometram.

ex semidiametris hyperbola compactam illam quæ insistit super axe recto ; non video tamen ubi repererit eam quæ insistit super transuerso. Porro inuentionem nostram non effugit vngularis superficies , quæ spectat ad quamlibet ellipsim & hyperbolam secundariam, cuius videlicet axes non sunt inter se aequales , per quemcunque axium agatur planum ressecans illam superficiem : eiusmodi enim plana figura insistens super axe illo , habet dimetientes quæ ut quadratum axis , per quem non ducitur planum illud ressecans , est ad quadratum alterius axis , ita se habeant ad rectam puncto tactus perpendiculariter erectam super tangente , & interceptam inter tactum atque illum axem per quem non agitur planum ressecans . Illa verò figura plana insistentes super axe per quem agitur planum inueniuntur atque demonstrantur nostra methodo : & quidem quando planum ressecans agitur per axem maiorem ellipseos , figura est portio semiellipseos concentrica , cuius semiaxes noti sunt : quando verò agitur per minorem est portio externè caua semihyperbola , cuius semiaxes noti sunt . Quod si planum illud , quod ressecans non semel hîc appellauimus , agatur , per axem hyperbolæ secundariæ rectum , figura erit hyperbolica internè caua ; si per axem transuersum , externè caua , eiusque uterque axis fiet notus . Atque ut rem in vno ellipseos casu tradam : si data ellipseos axis maior fuerit duplus minoris , & planum ressecans agatur per maiorem , figura plana insistens erit semiellipsis concentrica , cuius semiaxis vnus est idem cum semiaxe minore data ellipseos , & ad alterum semiaxem concentricam coniugatum est potestate ut 3. ad 16. nisi calculus me decipit : si autem planum ressecans ducatur per datam eiusdem ellipseos axem minorem , figura plana insistens erit semihyperbola externè caua concentrica ellipsi datæ ; habens transversum semiaxem eundem cum semiaxe maiore ellipseos datæ , iste vero semiaxis erit ad semiaxem eiusdem concentricam rectum potestate ut 16. ad 1. saluâ semper logistiques correctione . Hoc ipsum in hyperbolæ secundariæ vno certo casu definire supersedeo ; cum is qui methodum calculi pro ellipsi iam scriptam perceperit , & demonstrarit , non possit dubitare quin extendatur ad hyperbolam . Habes igitur hîc (Lector) occasione sumptâ ex illo Theoremate de figura inclinata super curua , planam figuram aequalam superficiei vngulari pro sectionibus omnibus conicis , ac proinde & inde obtines aequalam superficiei spheroidi ex ellipsi , & conoidi ex qualibet alia sectione conica genitæ . In libri quinti præfatione scripsi incognitam mihi esse figuram rectilineam quæ in ellipsi sit præscripto illo modo æqualis superficiei vngulari , sicuti cognita est æqualis vngulari superficiei in circulo ; quod ipsum etiam nunc profiteor ; id tamen

Ad Lectorem Geometram.

nihil obstat quo minus data circuli & hyperbola quadratura, rectilineum illi aequale demonstremus; ut & cuneos solidos siue ungulas, & earum etiam superficies in omni sectione conica notas faciat nostra Geometria, & ita in ipso Operis vestibulo prouecta ultra veterum terminos appareat. Nullum autem ex Recentiorum Geometrarum libris adhuc legi, qui doceat inuentionem superficierum sphaeroideon pro ellipsis, & conoideon pro hyperbolicis tam primaria quam secundaria. Notandum verò est superficies istas planas ita respondere superficiebus unguaribus curuis, ut sint illis aequales συνόλων & περιχώων, integrè & particulatim, quem modum aequalitatis explico in quarta propositione sexti libri, ubi figuram istam planam & curuam uoco coniugatas.

Porro quid in singulis libris potissimum scripserimus, propositiones ultimae singulorum librorum docent; secundi tamen argumentum in sola eius fronte extat: quod verò Cyclocylindricam ibi tractatam Autor Recreationum Mathematicarum, esse ellipsim asserit, omnino fallitur. Veterum more in illis demonstrata de linearum curuarum quadratricibus; de grauium descendantium acceleratione; de curuae cuiuslibet aequalitate cum recta; de locis asymptoticis, eorumque grauitatis centro; de proprietatibus librae curuae; de Cyclocylindricis figuris de spectantibus ad solutionem problematum illorum toti Europae propositorum, & alia eiusmodi, quae tibi in isto opere nostro occurrent, Lector Benenole, si hallucinationis vitio caruerint, fortasse vitabimus Horatianum illud quod cum istos commentarios de Cycloide vel de Rotatricula (ita enim illam à Rota, vocant Scriptores Gallici) scriberemus, nobis ipsi vitandum proponebamus,

Amphora coëpit

Institui: currente Rota cur vrceus exit?

Quoniam vero Geometras omnes esse curiosos scio; curiositatisque morbum hunc esse, ut fame suos stimulet acuta, unde fiat ut res vorentur integrae, nec satis aptè praearentur menti alende: hoc unum à te flagito, Lector, ut famem istam compescas, & nolis esse (quod de se Tullius alicubi fateatur) ὀξύπνεος in curiositate: Geometrica enim huius generis, ut prosint, incidi, & mentis stomacho apparari debent; ita enim melius & utiliùs concoquentur. Quod autem in Appendice secunda, & in ista quoque iam Praefatione aliquot inuenta propono, eorum demonstratione suppressa, id more Veterum ausim facere, non quo vllum cogere ad assensum velim, sed ut res non vulgares, alijs quibus libuerit & vacauerit, mihi quoque etiam ipsi aliàs fortasse examinandas hinc consignem. Conon ille, quem Archimedes

Ad Lectorem Geometram.

eximie laudat in Præfatione ad libros Spiralium, cum multa à se inuenta summis tunc Geometris sine demonstratione proposuisset, quædam in ijs complexus est, quæ falsa erant, ut narrat ipse Archimedes, nec propterea quicquam de tanti viri existimatione detrahit, cum reliqua rara admodum investigationis essent, & ante illud inaccessa tempus. Dum autem propositiones illas affirmo esse non vulgares, nolim negare quin vulgares effici queant, sicuti & Antiquorum inuenta iamdiu vulgaria esse cæperunt, ipsæque aues & planta quæ non raræ solum, sed necdum visæ fuerant, postquam ex detectis nuper ultimi Orbis regionibus ad nos delata semel fuerunt, ita communes nunc euaserunt, ut in anarijs & hortis passim visantur. Te etiam, perhumane Lector, non ita morosum esse unquam autumem, ut de libro aliquo inuentis Geometriæ nouis referto actum esse pronunties: si unum quid vel leue in eo non rectè se habere deprehensum fuerit. Ego de libro non se us ac de segete existimare solitus semper fui: illa siquidem apud me seges nullius est pretij, ubi

Infœlix lolium, & steriles dominantur auenæ:
Ea verò mihi non desinit esse summi pretij, quæ latissimo flauescit in campo, quamuis non euidentis lolij culmus vnus aut alter in densa illius & diuite sylua delitescere compertus fuerit. Licet Cononis propositiones illæ non omnes veræ fuerint; quia tamen maximam partem veræ, sublimes, & inexpectatæ fuerunt; ὅτι τὸ πλεον πηγύχει γεωμετρίαν, longè promouit Geometriam Archimede ipso teste: cuius verba referre libuit, ut promouendæ Geometriæ studium esse per antiquam ostendamus, sæpiusque accidere quod idem testatur, ut problemata quæ initio credebantur intractabilia, lapsu temporis mansuescere posse comprobentur.

Miraberis fortasse (Lector) cur in ista præfatione nihil dum dixerim de iis quæ attinent ad Historiam problematum de Cycloide per totam Europam à D. Dettonvillæo sparsorum: causa huius silentii est, quod ea suis locis narrentur, meliusque ibi ex subiecta materia percipiantur. Vide sis libri primi propositionem 19. libri secundi prop. 10. libri tertii prop. 25. libri quarti prop. 36. libri quinti prop. 23. libri sexti decimam septimam, & alias isti anteriores, præsertim duodecimam. Quid verò de quadraturæ circuli inuentione mihi ipse vindicem in pice, si lubet, in pag. 127. 235. 241. 404. Quantum autem calculo meo tribuam explico in pag. 83. 125. 133. 180. 234.

A D D E N D A.

Ad pag. 46. *sub finem libri secundi.* Quamvis ea quæ ad paginam 258. mox addituri sumus, euincant Dettonuillæum hallucinatum in vno esse super quo fundat demonstrationem dimensionis curvarum Cycloidicarum tam productarum quàm contractarum; istud tamen quod hic ex illo retulimus verissimum est, nec nititur illo.

Ad pag. 142. ante propos. 3. Si analogia illa admittatur habere locum in isto casu, hinc liquet confirmari vnum, quod in aliis plurimis experti sumus, solutionem nempe problematis alicuius vnâ viâ haud quaquam esse aliquando difficilem; aliâ verò esse plurimum: nam nostra hæc solutio facilis statim apparet; at verò Roberuallio licet Doctissimo, mirum quantum difficilis visa aliàs fuit, vt narrat ipse Dettonuillæus in eadem Epistola ad D. de Sluze. Quod autem hoc loco fatemur laborare nos in inuenienda differentia inter D. D. Pascaliū & Dettonuillæum, eundem in nobis hæere scrupulum leges pag. 169.

Ad pag. 151. sub finem Corollarij 2. In ista Dettonuillæi demonstratione desiderauit aliquid Nobilissimus Geometra, & quidem meritò; id verò primus, quem sciam, suppleuit noster M. P. E. A. S. Sed totus calamo adscribatur iste lapsus; sicuti & illa distortum non cohærentia quæ à nobis adnotatur pag. 227. Coroll. 3. quis enim calamo diutius prope-
rante, nunquam dormitet?

Ad pag. 235. ante propos. 12. R. P. Mersennus iam ab anno 1644. præfat. in Synopsim fecit Lectori spem editionis plurimorum Magni cuiusdam Geometræ inuentorum, quibus, inquit, *forte breui quadratura circuli & hyperbolæ accedet.* Quis istud iactantiæ vlli ver-
ratur, quod Mersenno Magnus ille de se moderatis dixerit verbis? Aut quis inde, si quis for-
tè aliis eam nunc promeretur, laudem inuenti propositi idcirco minuendam censeret, quod
insignis ille Geometra ante annos sexdecim inuisset à se repertam illam quadraturam?

Ad pag. 258. ante Coroll. 1. Iure optimo expectatur alia Dettonuillæi demonstratio, nam
ea quam dat, peruersa ratiocinatione statuit vnum veluti basim totius demonstrationis,
quod falsum esse iam iam monstrabitur: illud verò est (Fig. LII. tab. 4.) subtensam $b e$
esse ad arcum $e o$, vt est recta $h m$ ad $m g$: constructio autem iubet $c d f$ semicirculum
centro g descriptum, esse genitorem magnæ Semicycloideos $c e a f$ cuiuscunque speciei,
eiusque basim $a f$ ad peripheriam $f d c$ semicirculi esse vt est data recta $h g$ ad radium
 $g f$; ita vt puncta h, f, g sint in eadem rectâ: ponit præterea basi $f a$ æquidistare rectam
 $m b$; sumptum esse quodcunque punctum e in arcu cycloidico $b c$; iunctas esse rectas $g m$,
 $b e, m h$; arcum $e o$ esse arcui $d m$ similem, æqualem & similiter positum. Ego verò con-
tendo subtensam $b e$ non esse necessariò ad arcum $e o$, vt est recta $h m$ ad $m g$. Esto $g f$
ad $g h$ potestate vt vnitas ad binarium, & arcus $d m$, $m f$ sint æquales, singulique qua-
drans peripheriæ $c d m f$. In hoc casu ex Euclideis Elementis patet rectam $m h$ tangere
circulum in m ; rectas $m g, m h$ esse æquales; & si $h m$ producatur ad l , angulum $l m o$
esse semirectum. Igitur si per o agatur $o n$ tangens circulum $e o$ in o , angulus $n o b$ erit
semirectus, vt pote æqualis angulo $l m o$; & si ex b in rectam $n o$ demittatur perpen-
dicularis $b i$, angulus $i o b$ erit æqualis angulo $m g h$, & triangulum $b o i$ simile trian-
gulo $h g m$: ergo vt $h m$ latus ad $m g$, ita $b i$ latus ad $i o$, & vt $h g$ latus ad $g m$,
ita $b o$ latus ad $i o$: sed vt $h g$ latus ad $g m$, ita ex Dettonuillæo & ex rei veritate, est
recta $b o$ ad arcum $e o$; ergo vt $b o$ recta ad $i o$ rectam, ita est eadem $b o$ ad arcum $e o$;
ergo arcus $e o$ est æqualis rectæ $i o$. Rursus quoniam ex Dettonuillæo vt $h m$ recta ad
radium $m g$, ita subtensa $b e$ ad arcum $e o$, & ita quoque monstrauimus esse rectam $b i$ ad
 $i o$ vel ad $e o$ ipsi (vt iam ostendimus) æqualem; rectæ $b i, b e$ habentes eandem ratio-
nem ad æquales $i o, e o$ erunt inter se æquales; ergo cum $b i, b e$ sint æquales, periphe-
ria circuli centro b descripti interuallo rectæ $b i$ transibit per e , quod est absurdum. Nam
cum angulus $b i o$ sit ex constructione rectus, recta $i o$ tangeret circulum centri b ; sed

tangit etiam circulum $e o$; ergo cum isti circuli sint ad partes oppositas eiusdem tangentis $o n$, non sibi occurrunt; ergo punctum e non est in peripheria circuli centro b descripti, ac proinde rectæ $b i$, $b e$ non sunt æquales. Non igitur $b e$ est ad arcum $e o$, ut recta $h m$, ad $m g$, quod erat demonstrandum. Innumerati sunt alij casus in quibus demonstrari pariter possit lemmatis illius falsitas.

Cæterum quod idem Autor ait angulum mixtilineum $b o e$ comprehensum sub recta $b o$ & sub curua $o e$ esse æqualem angulo rectilineo $h g m$, id propterea, ut puto, affirmat, quia dempto angulo contactus $i o e$, residuus $b o i$ est æqualis angulo $h g m$: angulus autem contactus neque augeat propriè, neque minuit angulum rectilineum, quia rectilineus est. At duorum istorum triangulorum $h m g$, $b e o$ omnia latera esse proportionalia, inde inferre non licet, ut monstratum geometricè iam est. Moneo iterum à me non aliud affirmari quàm demonstrationem Detronuillæ niti lemmate falso, ipsum verò theorema quod probandum suscepit, esse verissimum quando puncta h & f sunt vnum & idem, aliunde scio: at quando sunt diuersa, id perinde compertum non habeo: falsum profectò est, si ad hoc ut falsum non sit, lemma eiusmodi oporteat esse verum.

Ad pag. 403. ante numerum *XI*. *Αδυναμία* commutandi lineam curuam in rectam ipsi æqualem inter Recentiores asseruisse mihi primus videtur magni nominis Geometra Franciscus Vieta *Varior. de reb. geometr. resp. lib. 8. c. 1.* hoc disticho.

*Qui verò exercet numeros, male collocat horas,
Si rectum curuo conciliare studet.*

Sed horas non male collocavit subtilissimus Vvren, cum cycloidicam curuam ostendit esse quadruplam axis. Alter mihi esse videtur *C. artesi* primariæ notæ Geometra, pag. 340. geometriæ gallicè editæ Lugduni Batavorum an. 1637. cuius hæc sunt verba lib. 2. *proportio quæ est inter rectas & curuas lineas cognita non est, sed neque, ut equidem reor, cognosci humano ingenio potest.* Postremus tandem Leodienfis Geometra insignis, ubi vidit cycloidicæ lineæ proportionem cum recta repertam esse, restrinxit assertionem ad genus *ὀρθωτέων* difficillimum, affirmando id quod Detronuillæus approbat, & quod M.P.E.A.S. Geometricè refellit: ex qua methòdo difficile non erit inuenire curuam quæ ad axem suum se habeat etiam ut numerus ad numerum: nam in fig. 4. *Dissertationis illius*, si ut est cubus applicatæ $m n$ ad cubum applicatæ cuiuslibet $f i$, ita sit quadratum axis $a n$ ad quadratum portionis $a f$; & longitudo $a n$ ponatur 27. $n m$ 54. curua $m i a$ inuenietur 61.

De cæterò memineris, Lector, quorum nudam absque demonstratione propositionem damus, eorum nihil à nobis pro indubitatè verò tradi; sed singula maturiùs examinanda relinqui.

Errata sic corrige.

P Ag. 165. sub finem corollarij tertij, dele illa verba, occurrens limbo $o d y$ in puncto d &c. pag. 185. lin. 4. erit æquale. pag. 218. lin. 8. anno 147. pag. 219. lin. 8. ante finem collocari debeat. pag. 240. lin. penult. eximiam. pag. 241. lin. 13. Mathematicas disciplinas. pag. 293. lin. 10. in decima sexta. pag. 392. lin. 16. figura 108. omnes. *ibidem* lin. 18. figura 109. omnes. pag. 393. lin. 3. parabolicæ a c. *ibidem* lin. 9. methodum figuræ 07. generatis. *ibidem* lin. 15. axi a b. *ibidem* lin. 16. latus r u. pag. 394. lin. 22. denominator. pag. 399. lin. antepenult. asymptotus sit c p perpendicularis ad diametrum b d, & ex puncto. Nonnulla alia corrigenda scripsimus in extrema pagina 404. In figura 40. littera m est bis scilicet; quod monemus ut lector hac cautione errorem vitet; nam adiuncta faciliè indicabunt utra illarum appelletur.

FACULTAS R. P. PROVINCIALIS
Societatis IESV.

EGO FRANCISCUS TARBE Prouincialis Prouinciæ Tolosanæ Societatis IESV, iuxta priuilegium eidem Societati à Christianissimis Regibus Henrico III. 10. Maij 1583. Henrico IV. 20. Decemb. 1606. Ludouico XIII. 14. Feb. 1611. & Ludouico XIV. nunc regnante 23. Decemb. 1650. quo Bibliopolis omnibus vetitum est ne Libros à Societatis nostræ hominibus compositos, absque Superiorum eius permissu imprimant, Permitto ARNALDO COLOMERIO Bibliopolæ, vt ad decem proximè annos Librum qui inscribitur *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide Libris, & in duabus adiunctis Appendicibus, Autore P. ANTONIO LALOVERA Societatis IESV*, reuisum probatúmque, imprimere ac diuendere possit. Datum Tolosæ 25. Decembris 1659.

FRANCISCUS TARBE.

DE

88

S

10-

50-

21j

I.

2-

1-

te

o

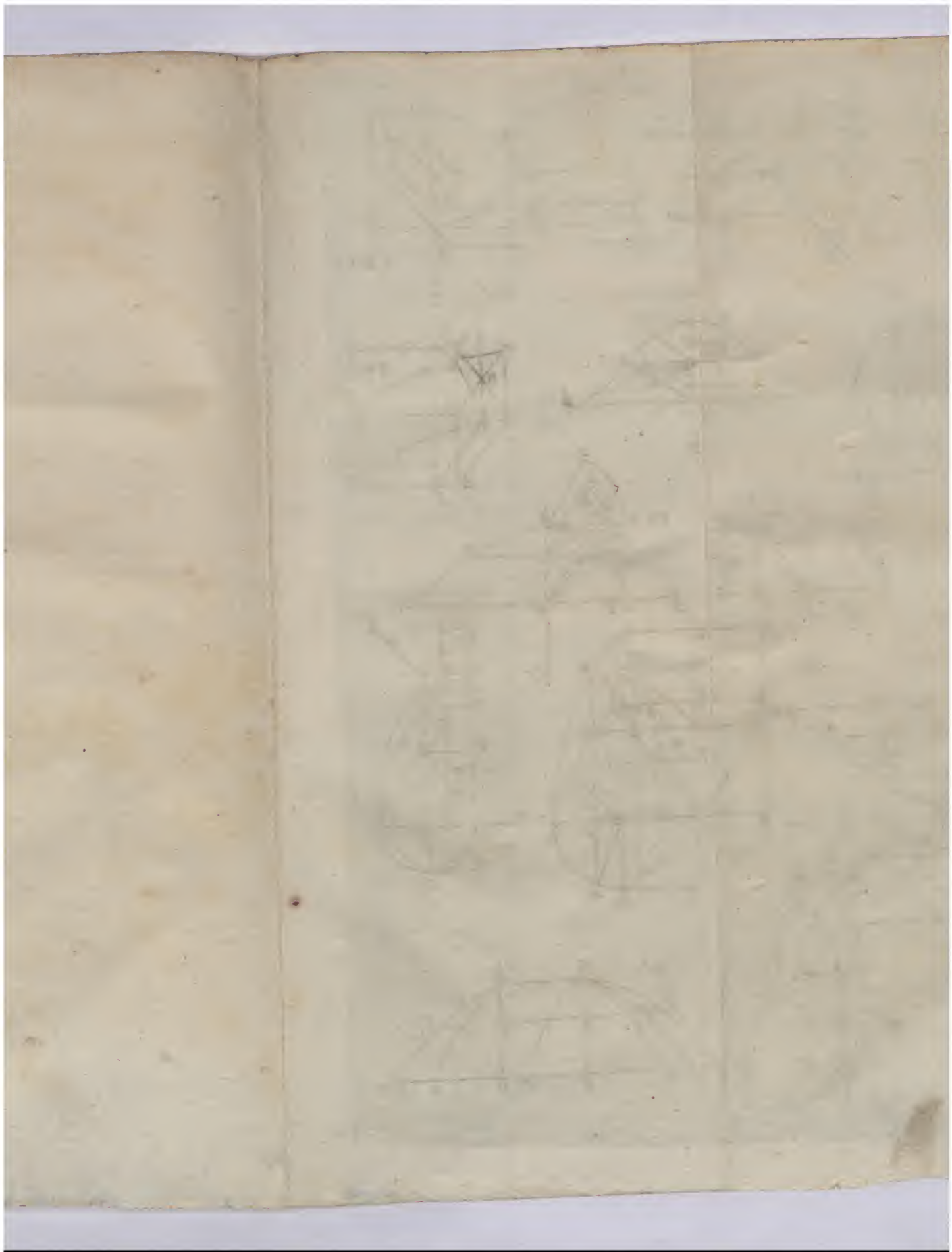
1-

m

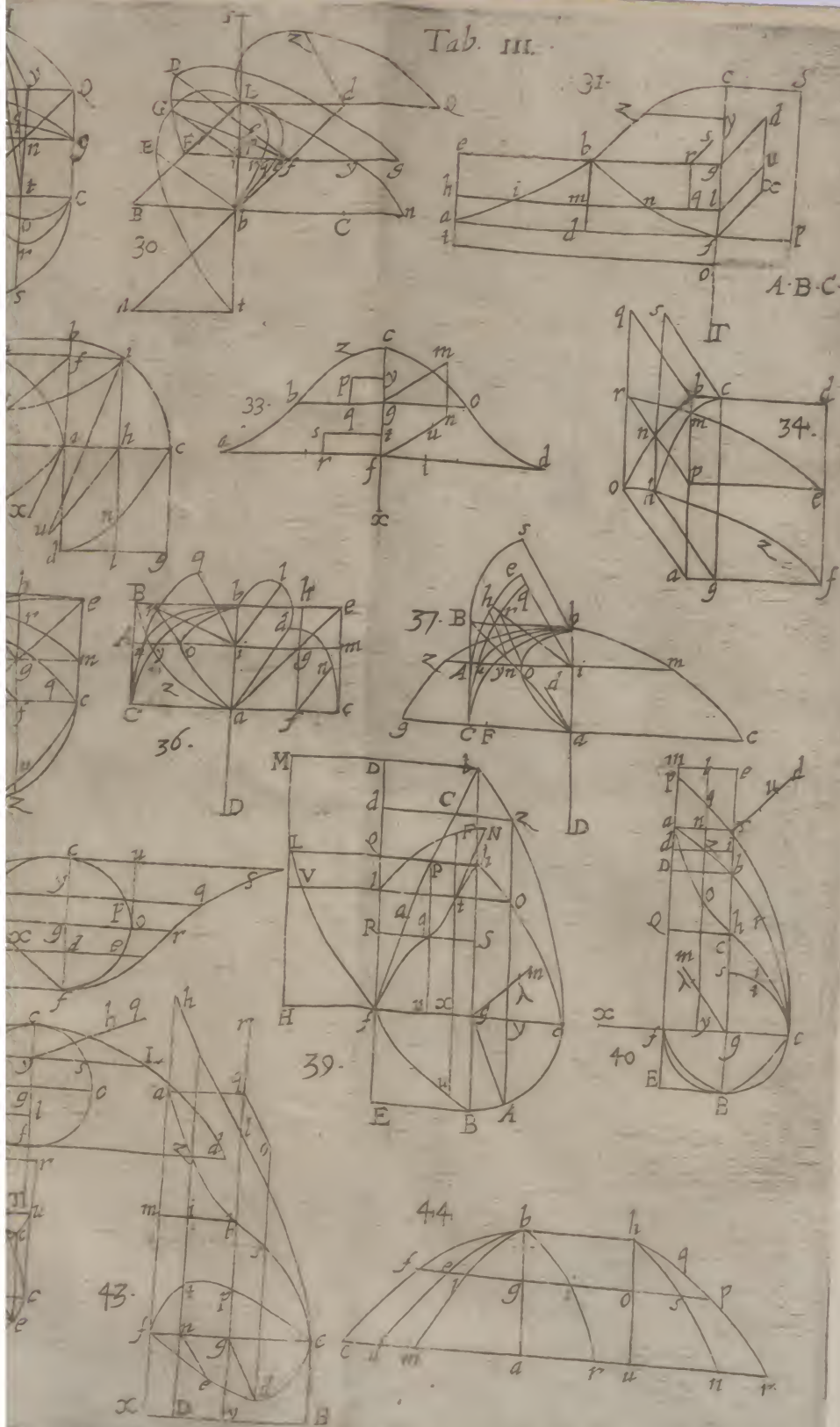
o-

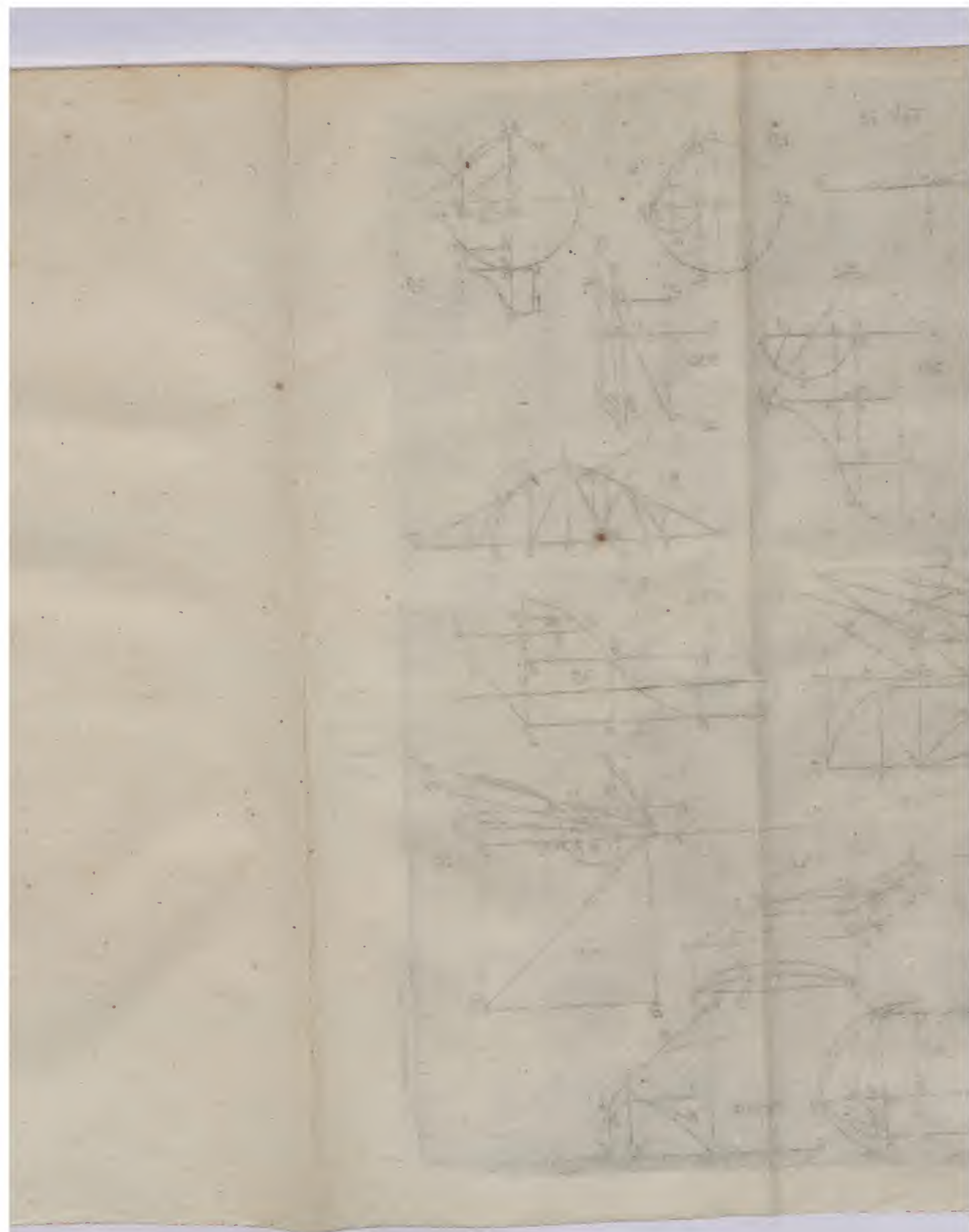
2-

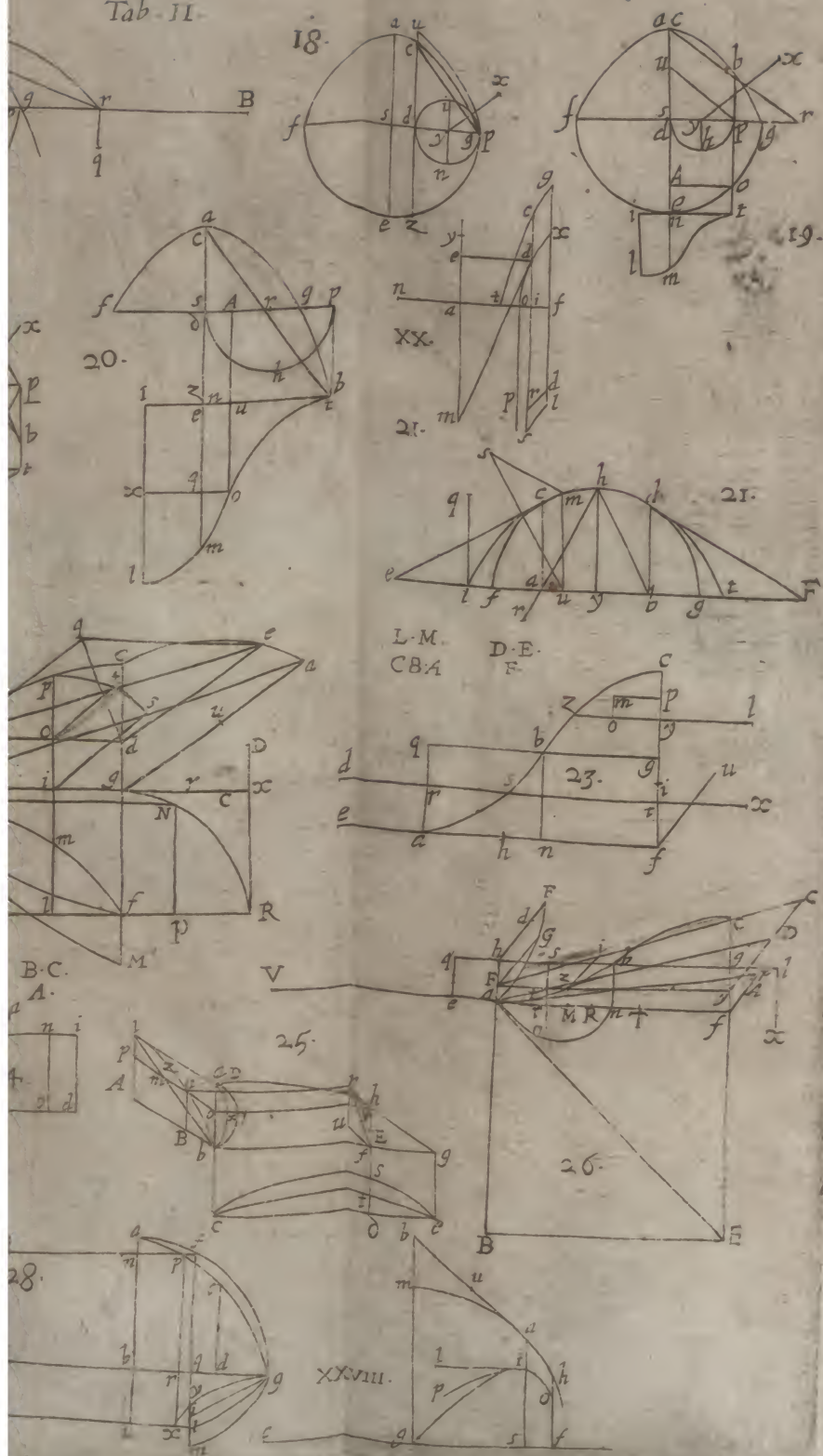
1-

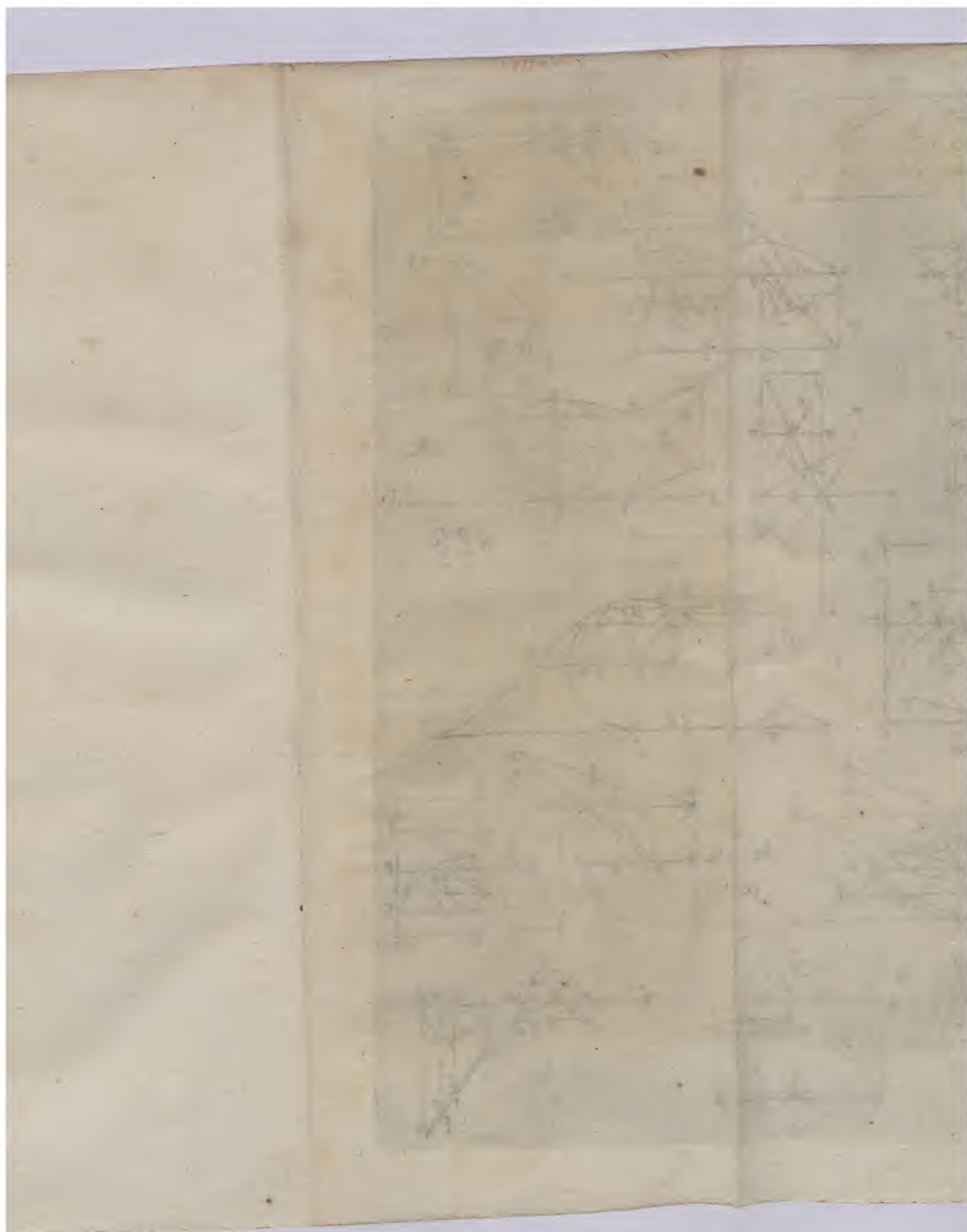


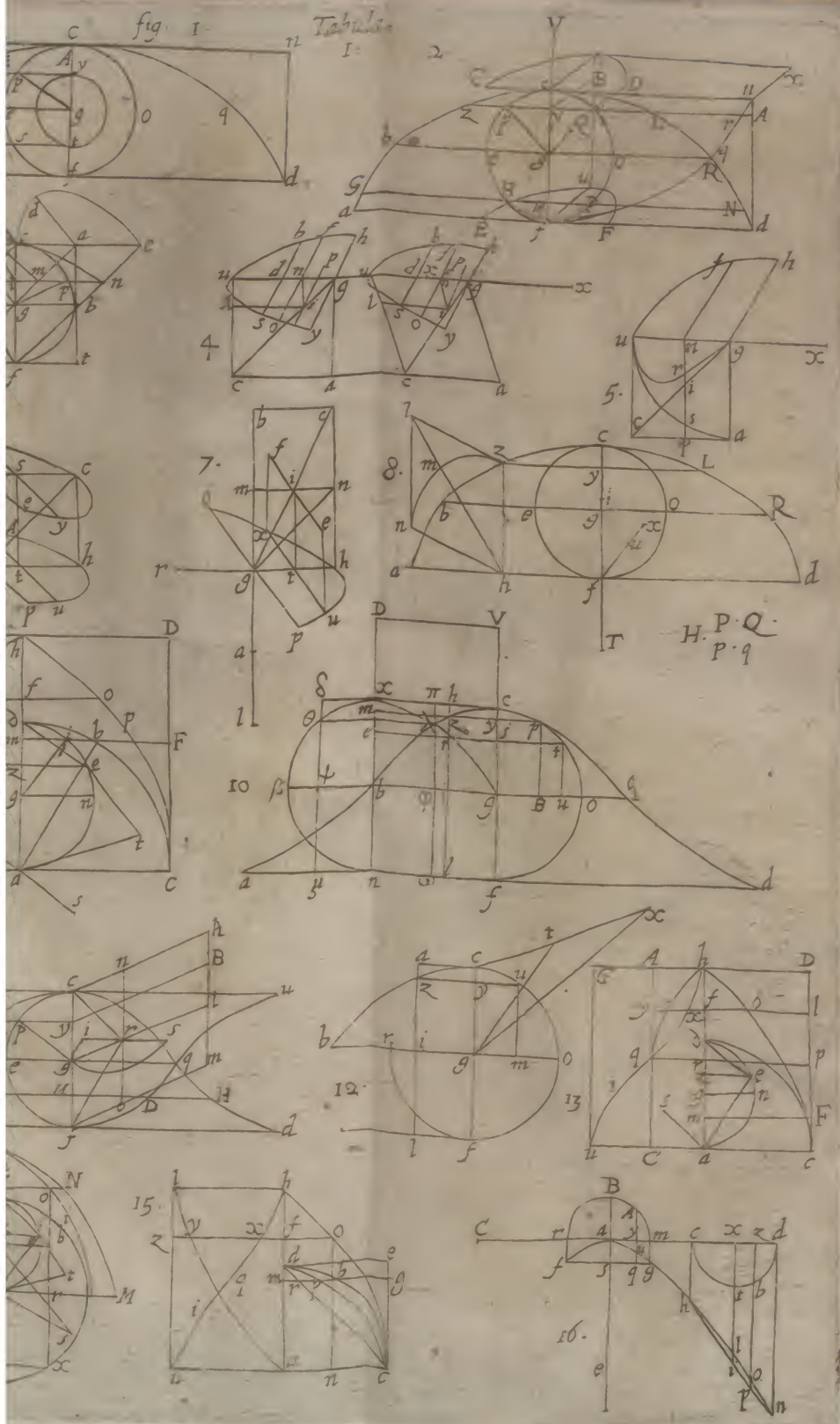
Tab. III.

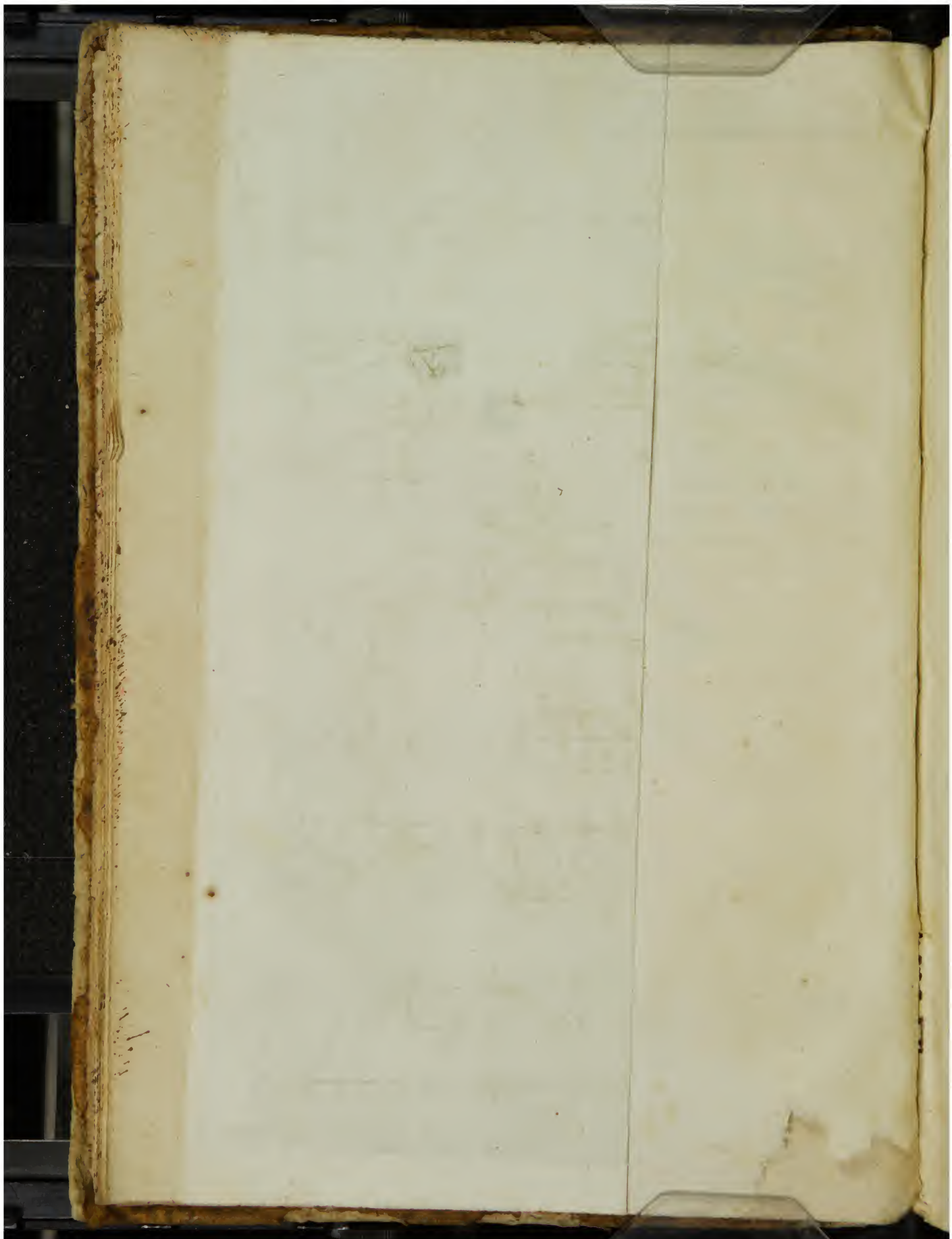


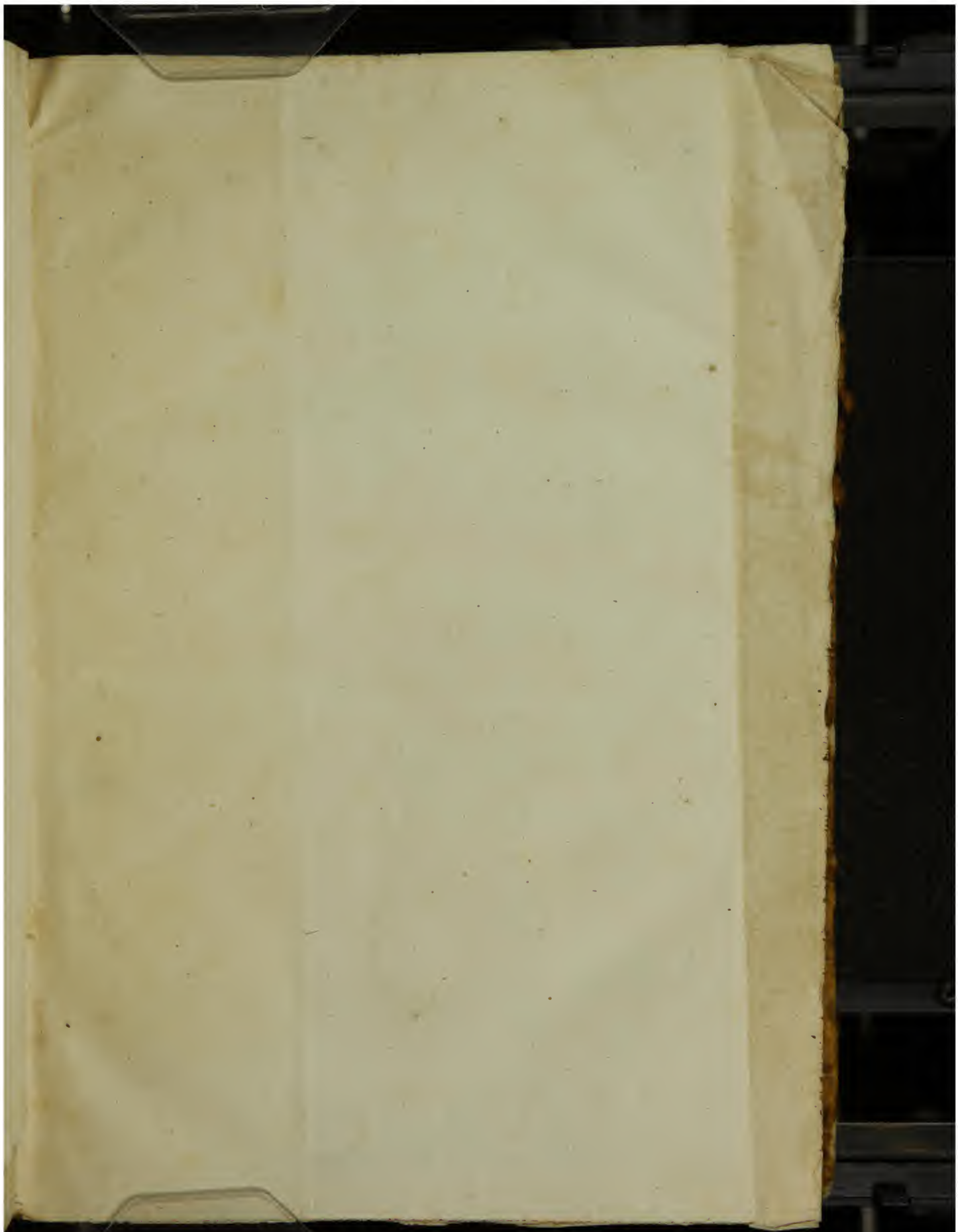


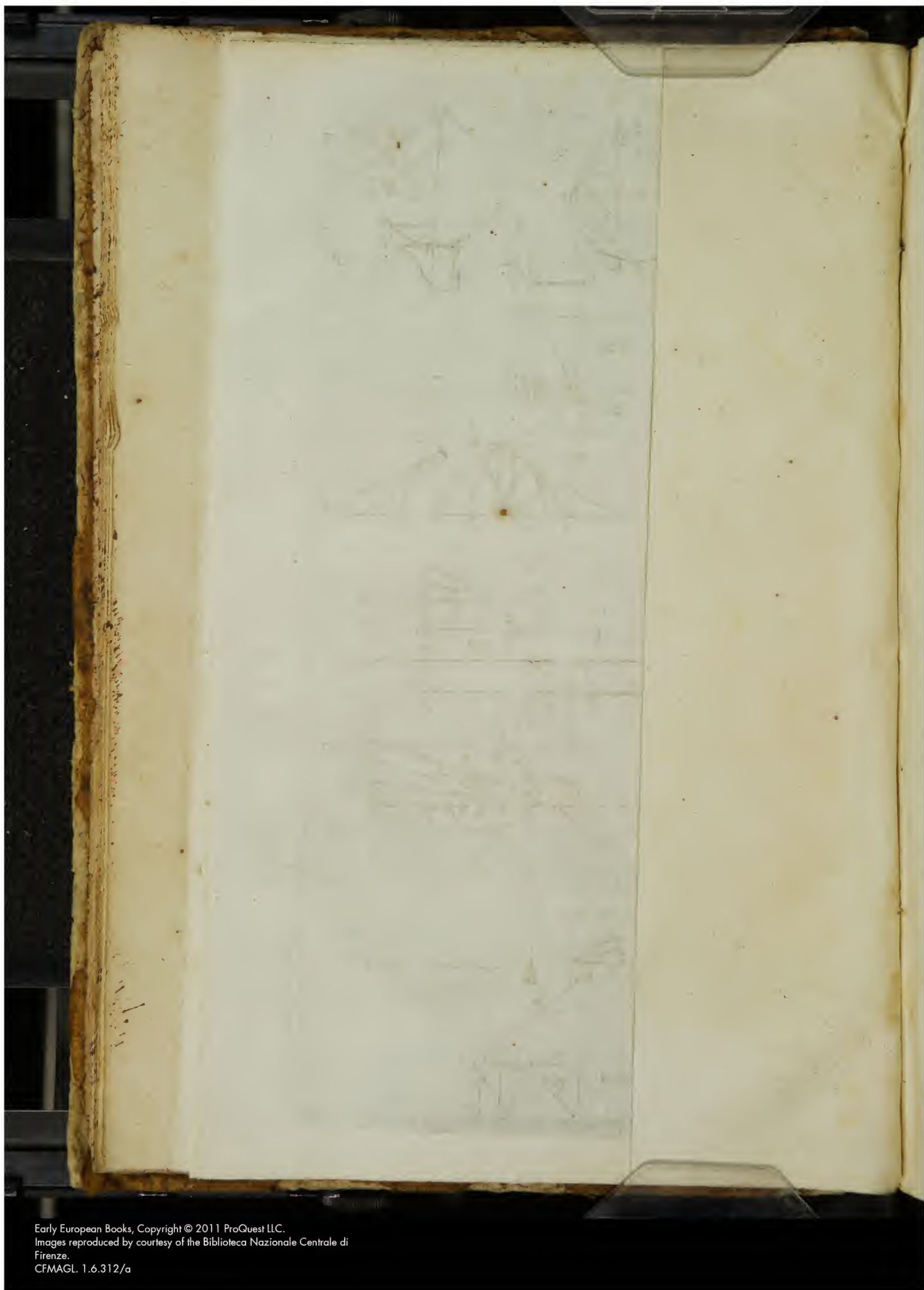


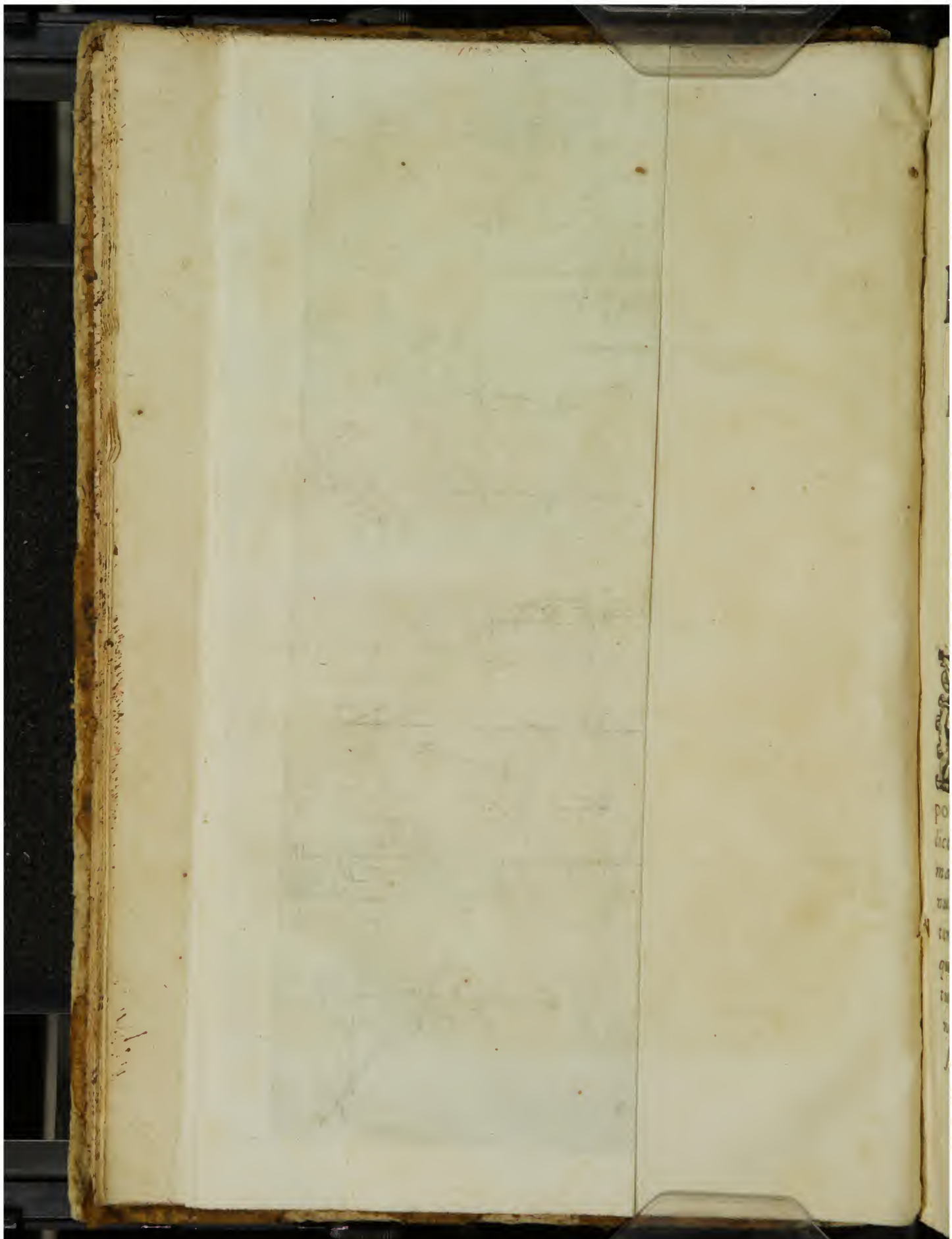


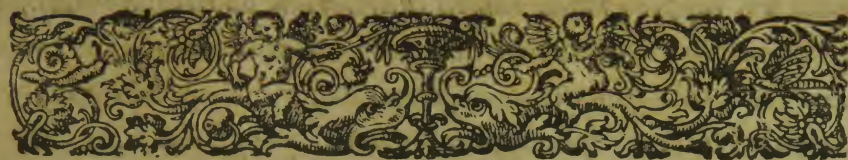












DE CYCLOIDE

LIBER PRIMVS.

In quo, posita quadraturâ circuli, inuenitur quadratura cuiuslibet portionis in cycloide designata, & cubatura solidi circa quamlibet basi parallelam geniti.

Amplissimo Domino De FERMAT, in Suprema
Curia Tolosana Senatori integerrimo.

DECEM nunc dies sunt (SENATOR INTEGR-
RIME) cum primum legi à Te mihi oblatam no-
bilissimi & doctissimi Anonymi typis editam Epi-
stolam, qua à præstantissimis toto Orbe Geo-
metris postulat solutionem quarundam pro-
positionum circa cycloidem eiusque centra grauitatis. Ego
licet; meæ tenuitatis mihi probè conscius, norim quàm longo post
magnos illos viros interuallo in Geometrarum qualiumcumque
numero locum teneam; quia tamen quid de quæsitis illis in men-
tem mihi veniret promere à Te tunc iussus sum, malui temeritatis
quàm obsequij Tibi non promptè præstiti nomine accusari. En igitur
quas circa problemata eiusmodi meditatus sum viginti omni-
no propositiones. Tu quem omnes Europæ Mathematici meritò su-
spiciunt, si quid perperam scriptum sit, aut si quid scriptis desit,

A

emenda vel supple, modo tamen iudiciorum publicorum occupationes quibus longè vtilius distineris, id patiantur. Hac emendatione vel etiam supplemento fidens noster hic libellus prodit in vulgus intrepidè; quapropter Te huius spei plenus adit, ab nempe missus qui plurimis nominibus tamdiu Tibi est.

Tólofano in Collegio
xii. Kal. Aug. 1658.

Additus ex animo seruus ANTONIVS
LALOVERA Societatis IESV.

PROPOSITIO PRIMA.

SIt ce fo (Fig. 1.) circulus centro g descriptus, quem in f tangat recta fa, æqualis dimidio totius peripheriæ ce fo; per f ducta sit diameter fc, completoque parallelogrammo afcx intelligatur circulus ita moueri in plano afcx, vt puncta c, f peripheriæ circulari semper iaceant in rectis cx, fa, rectaque cf æquidistet lateri ax, motus verò sit æqualis vniúsque semper velocitatis. Intelligatur in puncto c aliud punctum A quod per arcum ce fmouetur pari & æquale veloci motu, ita vt cum simul incipiant simulque desinant vterque motus punctorum c & A, iisdem temporis intervalis pares decurrant portiones linearum cx, cef. Linea quam punctum A descriperit czba, cui alia ex aduerso cq d respondeat pari methodo generetur. Tota figura abcqd vocatur *Cyclois* Torricellio; mihi appellabitur *Cycloides* sicuti a Sphæra, & Cono Sphæroides, & Conoides dicuntur.

Ostendendum est parallelam tangenti af, interceptam inter arca zc, fecesse aequalem peripheriæ cf interceptæ inter ipsam parallelam & tangentem cx.

Sumpta sit zp quæcunque parallela tangenti af occurrens arcibus za, cef in punctis z, p; dico rectam zp esse æqualem arcui pc. Recta zp producta occurrat diametro cf iny; ex zy recta abscindatur zi æqualis rectæ py, & per i ducatur recta hl complens parallelogrammum iaax; per g ducatur gb parallela tangenti fa, occurrens rectæ hl in m, arcui cz a in b; iungantur rectæ zm, pg quando punctum z non congruit puncto b. Quoniã triangula gyp, miz habent latera gy, yp, mi, iz qualia singula singulis, erunt quoque latera gp, mz æqualia, & anguli gpy, zmiz æquales; ergo si centro m per h & l describatur semicirculus, punctum z iacebit in eius peripheria, & arcus cp, hz erunt æqual

ergo quando punctum A congruet puncto z, centrum circuli moti congruet centro m. Quoniam verò puncta A, c ponuntur æquali tempore percurrere lineas æquales, arcus h z vel c p erit æqualis rectæ c h vel i y. Cum igitur z i, p y ponantur æquales, additâ communi i p, erunt z p, i y æquales; sed i y est æqualis arcui c p; ergo z p est æqualis eidem arcui c p. Quod si punctum z congruat puncto b, punctumque y centro g, tunc punctum p, congruet puncto c, eritque y p semidiameter, quare i z erit æqualis semidiametro, & cum g, y sint idem punctum, nullum erit triangulum g i p, perinde tamen verum erit rectam p z esse in illo casu æqualem rectæ i y, hoc est arcui p c: ergo &c. quod erat ostendendum.

DEFINITIONES.

Rectam c f voco *axem* figuræ Cycloidis a c d; rectam a d *basim*; punctum c *verticem*; z y parallelam basi, *ordinatim applicatam ad axem*; z p *ordinatim applicatarum* z y, p y *differentiam applicatam ordinatim*. Figuram a z c p e f voco *ex differentiis genitam*; eiusque partem b z c e *superiorem*, a b e f *inferiorem*; sicut etiam rectam z p *differentiam superiorem*, r s *inferiorem*, b e *mediam*. c z a f voco *semicycloidem*; c z y eius *segmentum*, & a f eius *basim*; circulus c e f o vocetur *genitor*.

S C H O L I V M.

Cycloidis generationem eandem re ipsa tradidimus quam Torricellius, quamvis discrepare in aliquo videatur; malimus enim per duorum lationem quam per vnius tantum, huius generis figuræ explicare, non solum quia ita res planius procedere nobis visa est; sed quia etiam Archimedes spiralis lineæ generationem per motum rectæ & per puncti in illa recta lationem tradidit. secluso itaque motu definiri potest Cycloides figura cuius omnes differentiarum ordinatim applicatarum æquales sunt arcubus interceptis inter ipsas & tangentem c x, singulæ singulis.

PROPOSITIO II.

MAneat (Fig. 2.) vt in superiore circulus c e f o genitor, & semicycloides c b a f cuius vertex c, axis c f, basis a f; intelligatur alia subcontraria semicycloides f q n c cuius vertex f, axis idem c f, basis c n: ducta sit quæcunque ordinatim applicata z y, quæ producta occurrat arcui f q n in r, & circuli peripheriæ in punctis p, s.

Ostendendum est duas simul differentias z p, s r esse æquales rectæ f a, vel c n, vel peripheriæ c p f.

Quoniam ex superiore differentia z p æqualis est arcui c p, & differentia s r arcui s f, vel p f, duæ simul differentiarum z p, s r erunt æquales toti peripheriæ c p f, cui æqualis ponitur ex constructione tota f a vel c n; ergo duæ z p, s r sunt simul æquales toti a f vel c n, vel toti curvæ c p f. quod erat demonstrandum.

DE CYCLOIDE COROLLARIUM.

Et demonstratis apertè liquet duas simul figuras genitas ex differentiis $z p, s r$ subcontrariarum semicycloideon esse ad positionem rectæ $a f$ æquales condicta ratione parallelogrammo $c f d n$. Porro figuras condicta ratione æquales ad positionem alicuius rectæ si planæ sint, vel alicuius plani si solidæ sint, eas appello quarum singulæ sectiones parallelæ illi ad cuius positionem diriguntur, sunt inter se æquales.

PROPOSITIO III.

Idem manentibus ostendendum est cycloidem esse triplam circuli genitoris.

Intelligantur ex punctis c, f excitari perpendiculares $c t, f u$, ad planum $c f d$, singulæ æquales semidiametro $g f$ circuli genitoris, & compleatur parallelogrammum $t c f u$: intelligatur præterea ad positionem plani $t c n$ generari solidum ex plano $t c f u$, & ex duabus figuris $a b c e f, n q f o$ c genitis ex differentiis applicatis; hoc est vt alij loquuntur ex ductu parallelogrammi $t c f u$, in figuras duas $a b c e f, n q f o c$. Ex vndecima quarti libri nostri Tetragonismicorum elementorum constat ad positionem plani $t c n$ æqualia condicta ratione esse duo simul solida basium $z p, s r$, solido baseos $c n d f$ genito ex ductu eiusdem plani $t c f u$, & parallelogrammi $c f d n$, cum sectionum altitudo sit eadem nempe $y B$ vel $c t$, bases verò $z p, s r$ sint simul æquales basi $y A$ vel $c n$.

Præterea quoniam recta $y B$ vel $c t$ ponitur æqualis semidiametro $c g$ genitoris circuli, & $y A$ vel $c n$ eius semiperipheriæ, ex prima Archimedis de circuli dimensione liquet rectangulum $B y A$ esse æquale toti circulo $c e f o$ genitori, hoc est bis semicirculo $c e f$, igitur solidum genitum ex parallelogrammo $t c f u$ & ex duabus simul figuris differentiarum ordinatim applicatarum est condicta ratione æquale ad positionem plani $u f d$, cylindro cuius axis sit $c f$, bases autem sint circuli $C t D, E u F$ centris c, f descripti, intervallo semidiametrorum $c t, f u$, vel eadem ratione condicta æquale est duplo semicylindri cuius bases sint semicirculi $C t D, E u F$.

Quoniam igitur figura $c n r q o$ est æqualis figuræ $e b a f H$, solidum genitum ex ductu parallelogrammi $t c f u$ & figuræ $e b a f H$ erit æquale solido genito ex eodem parallelogrammo & ex figurâ $c n r q o$ ad positionem plani $u f d$: ergo solidum genitum ex tota figura $e b a f e$ & ex parallelogrammo $t c f u$ est æquale duplo semicylindri altitudinis $c g$, baseos $C t D c$. Quoniam verò solidum genitum ex parallelogrammo $t c f u$ & ex figura $a b c e f$ habet eandem altitudinem $c t$, quam habet bis semicylindrus altitudinis $c g$, baseos $C t D c$; patet eorum vt pote æqualium bases esse æquales; ergo figura $a z c e f$ est æqualis duplo baseos $C t D c$, hoc est duplo baseos $c e f g$; ergo additâ basi $c e f g$, tota $a z c e f$ est tripla semicirculi $c e f$: ergo cum $a z c f$ sit semicycloides, tota cycloides erit tripla circuli genitoris $c e f o$, quod erat demonstrandum.

Hæc est demonstratio quam sub finem secunda appendicis adiecta ad quintum Tetragonismicorum nostrorum librum indicauimus; ex eius vero methodo demonstratur quoque sequens.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus ex c f abscissa sit f M æqualis rectæ c y , & per M ducta sit M G ordinatim applicata occurrens peripheriæ c e f in H . Ostendendum est duplum duarum simul figurarum c z p , H G a f esse ad duplum circuli genitoris c e f o vt est recta c y ad c g semidiametrum eiusdem circuli.

In præsentī propositione demonstratur vt in superiore solidum altitudinis y B vel c g , baseos c z p & simul c s r n vel f H G a esse æquale duplo semicylindri baseos C t D c vel c e f , altitudinis c y . Hoc autem posito quod superest facillè monstratur; nam bases æqualium cylindraceorum (ita voco solida quorum bases oppositæ sunt parallelæ quæ modo parallelepipedæ, modo cylindri, modo innominata hætenus, quæ de re egimus in vndecima quarti libri Tetragonismicorum elementorum) sunt inter se reciproci vt altitudines; ergo vt altitudo c y ad c g , ita vicissim est basis composita ex z p c , G H f a ad bis semicirculum C t D c vel c e f duplum duarum figurarum c z p , H G a f ; hoc est, quatuor totius cycloidis a z c L d portiones c z p , c L s , f H G a , f P N d sunt simul ad quatuor semicirculos c e f , vel ad duos circulos c e f o vt est recta c y ad semidiametrum c g , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Si recta c y foret maior recta c g demonstratio (vt patet) perinde cogeret, quamuis in schemate appposito non exprimitur iste casus. Patet etiam demonstrationem simili pacto procedere de duabus partibus z p c b , G H e b simul sumptis, hoc est de tota z p H G , si loco rectæ c y sumatur g y .

COROLLARIUM II.

Si duplici figuræ genitæ ex differentiis z c p , r s c n addatur segmentum circulare p c s componetur tota figura z c n r contenta sub rectis c n , z r & sub arcibus z c , r n . Vnde præterea liquet quoties segmenti p c s proportio ad circulum c f ignoratur, toties ignorari proportionem figuræ z c n r ad eundem circulum.

PROPOSITIO V.

Iisdem manentibus & iunctâ rectâ p g , ostendendum est differentiam z p ad differentiam s r se habere, vt se habet sector p g c ad sectorem p g f , & rectangulum sub rectâ y B vel c g & sub z p contentum esse æquale duplo sectoris p g c , itemque rectangulum eiusdem altitudinis y B , baseos s r esse æquale duplo sectoris p g f .

A 3.

Quoniam enim rectæ $z p$, $s r$ sunt per primam æquales arcibus $c p$, $p f$ vel $f s$; arcus autem $c p$, $p f$ sunt vt sectores $c p g$, $p g f$ per 33. sexti Euclidis; ergo rectæ $z p$, $s r$ sunt vt sectores $p g c$, $p g f$. Præterea quoniam vt in decursu tertiæ ostendimus rectangulum altitudinis $y B$, baseos compositæ ex rectis $z p$, $s r$ est æquale duplo semicirculi $c e f$, erit vt patet æquale duplo sectoris $p g c$ & duplo sectoris $p g f$; duplum autem illud erit ad duplum istud vt recta $z p$ ad $f r$: ergo rectangulum altitudinis $y B$ vel $g c$, baseos $z p$ est æquale duplo sectoris $p g c$; rectangulumque eiusdem altitudinis, baseos $s r$ duplo sectoris $p g f$; ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

SIt (*Fig. 3.*) quadrati $s r t a$ diameter $r a$ bifariam in g secta, ipsumque diuisum sit in quatuor quadrata per rectas $c f$, $h b$ parallelas lateribus $r s$, $s a$. Per h , b ductæ sint $q c$, $f e$ æquidistantes diametro $r a$, & complentes parallelogramma $c a r q$, $e f r a$, $c q f e$. Recta $r a$ sit axis cylindri scaleni, cuius basis sit circulus centro a , seu idiametro $c a$ descriptus in plano $d a c$ recto ad planum $c g b$, sitque $d a$ perpendicularis ad rectam $c e$; in plano $r a d$ æquidistet recta $g u$ rectæ $d a$, & superficiei cylindri occurrat in u : plani $f g u$ sectio cum superficiei cylindri sit $c o u f$: ex centro g per c , f in plano $c a b$ descriptus sit semicirculus $c b f$.

Ostendendum est $c u f$ sectionem cylindri cum plano $f g u$ congruere peripheriæ circuli $f b c$, si planum $f b c$ intelligatur circumuolui circa axem $f c$ quousque congruat plano $f g u$ & stet rectum ad planum $c g h$.

Quoniam cylindrus semibaseos $c d e$ secatur plano $c q f e$ per axem $r a$ ducto quod est ad rectos angulos basi $c d e$, secatur autem & altero plano $f g u$ recto ad parallelogrammum $c q f e$ per axem, cuius plani sectio $c f$ continet cum $f e$ latere parallelogrammi per axem, angulum $c f e$ æqualem angulo $c e f$; angulum autem $f c q$ cum altero latere $c q$ facit æqualem angulo $f q c$, ex sexta libri primi apud Serenum constat sectionem $f u c$ esse semicirculum; ergo semidiametri $f g$, $g u$ sunt æquales; igitur si planum $f g c$ circumuoluatur circa axem $f c$ manentem donec rectum sit ad planum $c g b$, semidiameter $b g$ congruet semidiametro $g u$, totusque semicirculus $f b c$ toti semicirculo $f u c$, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Iisdem manentibus in recta $g a$ inter g & a sumatur quoduis punctum m , & per illud ducta sit recta $i n$ parallela lateri $q f$ parallelogrammi $q c e f$ per axem, occurrens lateribus $q c$, $f e$ in i , n ; periphe-

riæ cb fin p ; rectæ cf in l : per l ducatur lo ordinatim applicata ad f c diametrum semicirculi fu c ; superficiei cylindri planique il o communis sectio sit ion ; iungantur rectæ mo , gp .

Qstendendum est ion esse peripheriam semicirculi centro m descripti, & sectores mo , om esse æquales sectoribus cgp , pgf singulos singulis.

Quoniam planum nmo est parallelum basi cde cylindri, eius sectio ion cum semicylindro erit semicirculus per quintam primi libri Sereni: ergo semidiameter mo est æqualis semidiametro mn vel gb vel gp . Quoniam igitur trianguli glm latera gl , lm sunt inter se æqualia, sicuti trianguli gca latera gc , ca ponuntur æqualia, triangulum rectangulum glp erit æquilaterum & æquiangulum triangulo rectangulo mlo , cum habeant latus circa angulum rectum æquale, & rectas quæ angulum rectum subtendunt æquales: ergo angulus oml est æqualis angulo pgl : ergo cum semicirculi sint æquales, sector omi est æqualis sectori cgp , & sector omn sectori pgf , quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Ilsdem manentibus portio semicylindri intercepta inter plana hgu , cda cuius sectio basi cde parallela est sector minor omi , est condita ratione ad positionem eandem æqualis dimidio cunei primi intercepti ad partes lateris qc inter cylindri basim semicircularem hu & planum transuersum fgu occurrens lateri qc in c ; insuper verò dimidio solidi geniti ad positionem plani hgu ex quadrante circulari $guoc$, & ex triangulo gca ad positionem plani uhg .

Quoniam per semibaseos hu b semidiametrum gu coniugatam semidiametro hg ducitur planum cgu transuersum occurrens lateri hc parallelogrammi $hceb$ per axem ga , portio cylindri intra angulum hgc comprehensa, erit cuneus ille notus cuius definitionem & quadraturam tradimus in vigesima sexta quarti elementorum nostrorum, & quem primum appellauimus in vndecimâ quinti. Præterea quoniam solidi geniti ad positionem plani uhg ex triangulo cga , & ex quadrante circulari $guoc$, sectio parallela plano hgu est ex vigesimâ primâ quarti libri elementorum Tetragonismicorum rectangulum comprehensum sub lateribus ol , lm , triangulum verò olm est dimidium eiusmodi rectanguli; ergo cum ita se habeat res in omnibus aliis sectionibus, patet ex vndecimâ quarti Tetragonismicorum solidum cuius sectio est triangulum mlo esse condita ratione dimidium solidi cuneati geniti ad positionem plani hgu ex triangulo cga & ex quadrante circulari $guoc$. Cum igitur sector omi constet duabus partibus oli , olm , & illa sit sectio dimidij cunei primi iam descripti, ista sit semisectio solidi cuneati pariter descripti, patet quod erat demonstrandum.

DE CYCLOIDE DEFINITIONES.

Solidum cuius sectio, o l i, vocetur *genitum ex prima parte sectoris*; solidum verò cuius sectio est triangulum o l m dicatur *genitum ex secunda parte sectoris*.

PROPOSITIO IX.

SIt (Fig. 4.) u x diameter circuli centro g descripti in plano u g h; ad diametrum u x perpendiculariter cadat diameter h y, vt h u y sit semicirculus sectus in duos quadrantes per semidiametrum g u; intelligatur planum h g c, secans semicylindrum baseos h u y, vt portio semicylindri intercepta planis u g h, c g h sit cuneus notus definitus in vigesima sexta quarti Tetragonismicorum.

Ostendendum est totum cuneum u g c, esse æqualem parallelepipedo altitudinis g a, vel u c, baseos æquantis duos trientes quadrati g u. Item si secetur plano quouis f n i, ad planum h g a parallelo, secari in duas portiones quibus parallelepipeda eiusdem altitudinis u c æqualia habent basim noto rectilineo æqualem. Denique si secentur quouis ad basim u h g parallelo plano l i p diuidi in duas partes quarum quæ inter plana l i p, u h g iacet, est æqualis cylindraceo altitudinis u c, baseos compositæ ex rectilineo noto & ex curuilinea figura quæ vt est recta l u ad u cita sit ad segmentum o u f subtensum ordinatim applicata f o ducta per n in quod incidit recta i n parallela rectæ u c.

Cuneum totum u c g (ita illum designo breuitatis causâ vt in Scholio quintæ quinti libri monui) esse æqualem parallelepipedo altitudinis u c, baseos æquantis bessem quadrati u g patet ex Corollario vigesimæ sextæ quarti Tetragonismicorum: portionem verò n i g, esse æqualem parallelepipedo altitudinis u c, baseos æquantis rectilineum notum, constat ex eadem vigesima sexta. Denique quoniam planum l i p æquidistat basi h u y, portio u l i g cunei constabit cylindro u l i n, & parte i n g cuneatâ quam modò quadrauimus: atqui si cylindrus altitudinis u l baseos u f n o, conuertatur in cylindrum æqualem altitudinis u c, basis istius est reciproce ad basim illius vt est recta l u ad u c: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Duplex apposui schema, in primo axis est perpendicularis ad planum baseos u b h y, in altero cadit oblique, constituitque cylindrum scalenum; sed modo bases h u y sint vtroque eadem, & eadem sit distantia basium oppositarum in recto & scaleno, est quoque æqualitas eadem partium, vt in scholio vndecimæ quinti Tetragonismicorum annotatum extat.

COROLLA-

LIBER PRIMVS.

9

COROLLARIUM II.

Ex præfenti & ex definitionibus superioris liquet cum solidum genitum ex prima parte sectoris sit vel semicuneus totus altitudinis $u c g$, vel eius portio abscissa ad positionem baseos $u b h g$, eiusmodi solidum esse æquale in primo casu parallelepipedo altitudinis $c u$, baseos æquantis trientem quadrati $g u$. In secundo verò casu esse æquale cuneo $u c i n$ per præsentem propositionem noto, sed dempto cylindro altitudinis $l u$ baseos $u f n$, vel altitudinis $u c$, baseos quæ sit ad $u f n$ sicut est recta $u l$ ad $u c$.

PROPOSITIO X.

Sit (Fig. 5.) $x u$ diameter circuli, cui incidat ad rectos angulos semidiameter $g h$, ita ut $h f u g$ sit quadrans circularis: super plano $h u g$ insitât perpendicularis $g a$, æqualis semidiametro $u g$, & ex centro g intervallo $g u$ descriptus sit in plano $u g a$ quadrans circularis $u f a g$; libra $u x$ suspensâ ex g perpendiculari $g a$, brachio $g x$ intelligatur generari quadratix $g r u$, respondens quadranti $u f a g$, ita ut sicut $g x$ brachium ad quamcunque longitudinem $g n$, ita $n f$ ordinatim applicata sit ad $n r$ interceptam recta $g u$, & quadratrice $g r u$; ducatur recta $g c$, & ad positionem plani $h g a$ intelligatur ex triangulo $u g c$ & ex quadrante $u f h g$ generari cuneatum solidum cuius dimidium in definitionibus octauæ diximus esse solidum genitum ex secunda parte sectoris.

Ostendendum est ad positionem plani $h g a$ cylindraceum altitudinis $g a$, baseos $u r g n$ esse condita ratione æquale cuneato illi, & quando totum sumitur, basim $g r u n$ esse trientem quadrati $g u$ quando autem pars quælibet $u r n$ vel $n r g$ designatur, eam esse æqualem rectilineo noto.

Quadratricem quidem $g r u$ esse trientem quadrati $g u$ liquet ex decima octaua tertij tetragonismicorum; portionem verò eius quamlibet $u r n$, esse æqualem rectilineo noto patet ex decima septima eiusdem libri, vel ex secunda quinti. Quoniam verò ut $x g$ recta ad $n g$ vel ad $n i$ ipsi æqualem, ita ex generatione quadratricis est $n s$ ordinatim applicata vel $u f$ ad $n r$, rectangulum $p n r$ sub extremis $g x$ vel $p n$ & sub $n r$ erit æquale rectangulo sub mediis $n i$, $n f$: ergo cylindraceum baseos $g r u$ altitudinis $h g$ ita se habet ad cuneatum baseos $u f h g$, altitudinis $u g c$, ut sectiones parallelas plano $h g a$ habeant æquales; ergo per vndecimam quarti cuneatum & cylindraceum sunt æqualia ratione iam dictâ; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Cum solidum genitum ex secunda parte sectoris sit dimidium cuneati

B

iam expositi vel totius vel ex parte sumpti ad positionem plani $h g a$, eiusmodi solidum quando totum sumitur patet esse æquale sextanti quadrati $g u$; quando autem pars tantum sumitur, esse æquale rectilineo noto. Porro illud cuneatum solidum est, ut patet, cuneus primus abscissus ex cylindro baseos $u f h g$, habens axem $g a$, estque longè diuersus à cylindro in quo est cuneus constituens solidum ex prima parte genitum, quod notari oportet ne fatigetur mens frustra quærens in vno eodemque cylindro vtrumque cuneum.

PROPOSITIO XI.

Portio (Fig. 3.) integra semicylindri intercepta inter plana $h g u$, $c d a$, quæ pro sectione basi parallelâ habet sectorem minorem $o m i$, est æqualis parallelepipedo altitudinis $g b$ vel $g c$, baseos æquantis dimidium quadrati $g c$; quando vero sumitur eius pars ad positionem baseos $c d a$, est æqualis cylindræo altitudinis $g c$, baseos mixtæ ex spatiis inuentis in nonâ & decima propositionibus.

Istud liquet ex demonstratis in nona & decima, ibi enim ostendimus primam solidi propositi partem integrè sumptam esse æqualem parallelepipedo altitudinis $g c$, baseos æquantis trientem vel duos sextantes quadrati $g c$; ostensum quoque est parti secundæ æquale esse parallelepipedum altitudinis eiusdem, baseos æquantis sextantem eiusdem quadrati: ergo istud solidum cuius sectio est minor sector, æquale est in primo casu parallelepipedo altitudinis $g c$, baseos æquantis dimidium quadrati $g c$.

Quando verò non sumitur tota portio, cum partes eius demonstratæ sint æquales, prima quidem cylindræo altitudinis $g c$, & baseos mixtæ ex rectilineo noto, atque ex certa quadrantis circularis $g u o c$ parte: secunda verò parallelepipedo eiusdem altitudinis & baseos notæ, patet quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Figura (Fig. 2.) $b z c p e$ ex differentiis genita est æqualis quadrato rectæ $g c$: figura autem $z c y$, quoties punctum y sumitur inter c & f , & non congruit centro g , est mixta ex rectilineo noto & ex parte in circulo $c f$ legitimè designatâ.

Quoniam ex quinta rectangulum sub rectâ $y B$ & sub $z p$ est æquale duplo sectoris $p g c$, cylindræum altitudinis $y B$ vel $g c$, baseos $a b c e f$ erit condita ratione ad positionem plani $t c n$ æquale duplo solidi cuius sectio sit sector $p g c$, ut ex vndecima quarti tetragonismicorum patet: sed in portione $b z c e$ istud solidum per superiorem est parallelepipedum altitudinis $g c$, baseos æquantis dimidium quadrati $g c$; ergo duplum illius solidi est parallelepipedum altitudinis $g c$, baseos æquantis quadratum $g c$.

In aliis verò casibus punctum y cadat primò inter puncta c, g ; ergo ex

superiore liquet adhibitâ methodo primi casûs nunc tractati, figuram zcy esse mixtam ratione præscriptâ. Secundò sumpta sit portio $GbcM$ maior portione bcg , ac proinde cadat M inter f & g ; ex gc abscindatur gy æqualis rectæ gM , & ducatur ordinatim applicata zy : diuisa igitur est portio $GbcM$ in duas zcy , & $zyMG$, quarum illa habetur ex casu modo exposito, ista verò ex quartâ propositione; ergo &c.

COROLLARIUM.

Ex vndecima quarti tetragonismicorum liquet cùm duo ista solida sint condicta ratione æqualia ad positionem plani tcn , spatia quæ ad positionem eandem æquiponderant vni, æquiponderare quoque alteri. Cùm autem cylindraceum altitudinis yB & cylindraceum altitudinis eiusdem yB illi æquiponderans hoc habeant ex vigesima quinta quarti tetragonismicorum, vt iisdem positis bases eorum sibi mutuo æquiponderent, patet figuræ $bzcpe$ ad positionem rectæ bg , æquiponderare basim illius cylindracei æquiponderantis ad eandem positionem sumptam.

SCHOLIUM.

Mirabile istud theorema quo figura $bzcpe$ ostenditur æqualis quadrato rectæ gc , debeo potissimum quadraturæ cunei illius quæ ante nostra tempora ex quo pulvis geometricus teritur, à nemine quem sciam inuenta fuerat. Cùm elementa tetragonismica typis mandarem, venit in manus nostras eius inuentio tradita à nobilissimo geometra P. Gregorio à S. Vincentio, vt in Voluminis nostri præfatione admoneo; tam diuersa tamen est methodus eam demonstrandi vt æquus lector facile inde intelligat in eandem veritatem casu prorsus admirando duos eiusdem Societatis Scriptores conuenisse; ego enim per libræ principia istud demonstro, ille ex librâ nihil adhibet; mea methodus cuneum cuius basis est hyperbola perinde quadrat, ille suam cunei, vel vt ipse loquitur Vngula inuestigationem ultra circuli & parabola fines non porrigit. Quid verò nos inueniri inuenisse spatia cuneo isti æquiponderantia constabis ex sequentibus.

PROPOSITIO XIII.

It (*Fig. 6.*) $adce$ circulus diametro ac descriptus in plano ab d , diametri ac , de , fecerint se ad angulos rectos, vt semicirculum dce recta bc secet in duobus quadrantes circulares: in planum dce cadat perpendiculari gb quæ ponatur axis semicylindri basium dce , ohp ; compleatur $bghc$ parallelogrammum per axem; eius diameter sit gc , & diametri qh , op fecerint se ad normam. Ergo cuneus cgh interceptus plano transuerso cgp , & plano baseos ohp erit cuneus primus ex vigesima sexta quarti. Intelligatur basis oph parallela horizonti sustinere cuneum cgh , librâ verò qgh sustinens illum cuneum suspendi ex centro g perpendicularo gb .

Ostendendum est si gq ponatur brachium libræ ita suspensæ, cuneo cgh vt iacet manenti, & integrè sumpto, æquiponderare quadrantem cylindri altitudinis b g baseos ohp : si autem cuneus cgh

secetur plano ad planum dbg parallelo, æquiponderans esse cylindraceum altitudinis gb , baseos certa quadam ratione mixtæ ex rectilineo noto, & ex quadrante condicto partis baseos ohp , cui insistit portio cunei primi designata.

Ex qg abscindatur mg quadrans totius qg , & compleatur parallelogrammum $bgmi$; ex gq abscindatur mr æqualis rectæ gq , & compleatur parallelogrammum $grnb$. Cuneum gcb qui basi dce insistit, patet ex vndecima quinti tetragonismicorum esse illum quem ibi *secundum* nominauimus, *primi* nomen referuantes cuneo $cg h$. Igitur ex eadem propositione cuneo secundo, vel toti gcb , vel parti Afc abscissæ per planum zft parallelum plano dbg , librâ nc suspensâ ex i perpendicularo im , brachio in , æquiponderat parallelepipedum altitudinis bg , baseos æquantis rectilineum notum; istud verò rectilineum vt ex corollario primo eiusdem vndecimæ patet, quando totus cuneus secundus sumitur, est quadrans duplex quadrati $b c$; in illo enim corollario, ideo ponitur vnus tantum quadrans quia altitudo parallelepipedi est dupla altitudinis bg .

Præterea, per vigesimam quintam quarti tetragonismicorum, si libra a suspendatur ex b perpendicularo bg , brachio ba , æquiponderans cylindro $b h$, vel eius parti fh est parallelepipedum altitudinis bg , baseos æquantis rectilineum notum, & duos trientes quadrati $b c$, quando cylindrus $b h$ sumitur integer. Nomine autem cylindri intelligo quamuis eius portionem abscissam ad positionem plani dbg . Igitur si cylindri suspensio quæ fit ex b fieri ponatur ex i perpendicularo im , brachio in , æquiponderans prioris suspensionis augebitur per decimam secundi tetragonismicorum, quadrante suspensi, cum $b i$ mensura recessus ponatur quadrans brachij: æquiponderans igitur cylindro suspenso est cylindraceum altitudinis bg baseos mixtæ ex rectilineo noto & ex quadrante baseos cylindri suspensi, in primo autem casu istud rectilineum est duotrientes vel octo vnciæ quadrati $b c$. Quoniam verò æquiponderans cylindro componitur ex spatio æquiponderante duobus simul cuneis; æquiponderans autem cuneo secundo habet altitudinem mi & basim æquantem rectilineum notum; ergo per subductionem huius baseos à basi alterius æquiponderantis restat basis cylindræ æquiponderantis cuneo primo mixta ex quadrante suspensi & ex rectilineo noto; in primo verò casu patet istud rectilineum esse duas vncias quadrati $b c$; nam si ex octo vnciis demas senas siue duos quadrantes, relinquuntur duæ vnciæ quadrati gh quæ vna cum quadrante semicirculi ohp constant basim illius æquiponderantis altitudine mi præditi.

Quoniam verò cuneus primus gch vel integer vel quæuis eius portio abscissa ad positionem plani dbg est æqualis parallelepipedo noto per vigesimam sextam quarti, & in primo casu est æqualis parallelepipedo altitudinis gb vel mi , baseos æquantis duos trientes vel octo vncias qua-

drati $g h$; si libra $r h$ suspensa ex m perpendicularo $m i$, brachio $r m$ ponatur mutare suspensionem, & pendere per accessum ex g perpendicularo $g b$, brachio $g q$, primæ suspensionis æquiponderans minuetur quadrante suspensi noti: ergo æquiponderans istud cuneo primo erit æquale cylindraceo altitudinis $g b$, baseos mixtæ ex quadrante basis cunei designati, & ex rectilineo noto. Quia verò in primo casu cylindraceum æquale suspensio habet pro basi octo vncias quadrati $g h$ earum quadrans erit duæ vnciæ; ergo demi debent ex basi prioris æquiponderantis duæ vnciæ quadrati $g h$; ergo cum basis prioris non haberet nisi duas supra quadrantem basis cunei, patet in isto primo casu relinqui quadrantem basis $o h p$ integræ purum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam pars secunda solidi cuius sectio est sector minor definita sub finem octauæ propositionis, est ad positionem plani $d b g$ conductâ ratione æqualis dimidio cunei primi cuius basis sit quadrans circularis $d b c$ integer vel ex parte sumptus, patet quadrantem æquiponderantis inuenti in præsentē propositione illi competere.

PROPOSITIO XIV.

MAneat (*Fig. 7.*) cuneus primus $g c h$ insistent basis $o h p$, planumque per axem sit $b g o$ rectum ad basim $o h p$, cuius diametrum $o p$ ad normam secet diameter $r h$. Latus $c h$ bifariam secetur in n & iungatur recta $g n$.

Ostendendum est cunei $c g h$ vel totius, vel portionis ad positionem plani $b g o$ designatæ centrum grauitatis esse in rectâ $g n$.

Plano $b g o$ ducatur quoduis parallelum $i t x$ secans triangulum $c g h$ secundum rectam $i t$ parallelam rectæ $b g$, & basim $o h p$ secundum rectam $x u$ parallelam rectæ $o p$; eius verò cum cuneo sectio sit $f e u x$; est ergo per quarti Tetragonismicorum vigesimam primam $f e u x$ parallelogramma figura, cuius latera $f x$, $e u$ æquidistant rectæ $c h$, & latus $x u$ bifariam secatur in t ; cum autem recta $t i$ æquidistet eidem $c h$, æquidistabit quoque lateribus $f x$, $e u$; ergo cum $t i$ bifariam secetur, in r occurso rectæ $g n$ (sicuti ei parallela $c h$ ponitur bifariam secari in n) centrum grauitatis parallelogrammi $f x u e$ erit punctum r in linea $g n$ constitutum. Cum igitur cunei $c g h$ omnes sectiones parallelæ plano $b g o$ habeant centrum grauitatis in rectâ $g n$, patet ex vndecima quarti Tetragonismicorum centrum grauitatis vel totius cunei, vel cuiusvis eius portionis ad positionem plani $b g o$ designatæ iacere in rectâ $g n$, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Idem manentibus cuneus $c g h$, vel quælibet eius portio ad positionem plani $b g o$ sumpta intelligatur vt iacet sustineri rectâ g

B 3.

n; cum enim recta g n transeat per eius centrum gravitatis, manebit ut iacet. Ex b g latere parallelogrammi b g h c abscindatur g l ipsi b g æqualis, compleaturque parallelogrammum g h n m.

Ostendendum est libra grammica b l suspensa ex g perpendicularo g h, brachio g l, æquiponderans cuneo c g h vel eius parti iam dictæ, cuius centrum gravitatis est in trianguli g m n latere g n, esse æquale cylindraceo altitudinis c h, vel b g, baseos quæ æquet semiquadrantem figuræ o h p, quando totus cuneus suspenditur; quando verò non suspenditur totus, baseos mixtæ ex rectilineo noto certa lege addendo vel demendo, & ex semiquadrante additio figuræ cui insistit pars cunei suspensa.

Quoniam enim libra r h suspensa ex g perpendicularo g b, brachio r g æquiponderans cuneo toti est cylindraceum altitudinis b g, baseos æquantis quadrantem figuræ o h p; æquiponderans autem portioni cunei iam dictæ est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos mixtæ ex rectilineo noto certa lege addendo vel demendo & ex quadrante figuræ cui illa portio cunei insistit, ut in decimâ tertia ostendimus; si recta g a fiat æqualis rectæ g m, libra a m suspensa ex g perpendicularo g h, brachio g a æquiponderans eidem suspensio erit ipsum prioris suspensionis, ut in Corollario primæ quinti tetragonismicorum ostendimus, cum suspensi cunei centrum gravitatis sit in g n diametro parallelogrammi g h n m. Cum igitur per octavam secundi tetragonismicorum si brachium g a mutetur in g l duplo maius, æquiponderans brachij g l sit dimidium æquiponderantis brachij g a, patet cuneo ut iacet manenti libra l b suspensa ex g perpendicularo g h, brachio g l æquiponderare cylindraceum propositum.

COROLLARIUM.

Quoniam pars prima solidi cuius sectio est sector minor definita sub finem octavæ propositionis est ad positionem plani o g h conductæ ratione æqualis cuneo primo cuius basis sit o x h g quadrans circularis integer vel ex parte sumptus, patet dimidium æquiponderantis inuenti in præsentis propositione competere illi.

PROPOSITIO XVI.

Libra (Fig. 2.) grammica f c suspendatur ex g perpendicularo b g brachio g f.

Ostendendum est figuræ b z c p e æquiponderare spatium æquale dimidio quadrantis circularis c p e g.

Patet propositio ex Corollario duodecimæ, nam ex illo istud æquiponderans est basis cylindracei altitudinis g c, quod duplo solidi cuius sector est p g c æquiponderet libra f c suspensa ex g, plano Q g b recto ad planum c e f gerente vicem perpendiculari; atqui ista basis ratione dupli

primæ partis est per Corollarium superioris quadrans figuræ cpe , ratione verò dupli secundæ per Corollarium decimæ tertiæ est quadrans eiusdem figuræ: ergo ista basis est dimidium figuræ cpe , quæ est quadrans circuli $cefo$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex iisdem decima tertia & decima quinta poterit assignari æquiponderans portioni zcy quando y cadit inter c & g , hoc enim patet ex methodo ipsa.

COROLLARIUM II.

Hinc patet licet habeatur æquiponderans figuræ $bzcp$ e videlicet spatium æquale octauæ parti circuli $cefo$, & licet notum sit rectilineum æquale eidem figuræ, nempe quadratum rectæ cg , centrum tamen grauitatis non posse assignari, quia ad hoc præstandum insuper necessaria est proportio quam habet figura $bzcp$ hoc est quadratum cg ad octauam partem circuli $cefo$. Simili de causa cum in libris tetragonismicis inuenimus rectilineum notum æquiponderans cuilibet segmento circuli & etiam ipsius hyperbolæ (quod postremum quis ante nos fecerit penitus ignoro) libra ex centro ipsarum sectionum suspensa, centrum tamen grauitatis non potuimus, in illo volumine exhibere; ideoque in fronte libri promissimus quadraturam segmentorum circuli & hyperbolæ non quidem absolute, sed ex dato centro grauitatis eorum, idque præstitimus in libri tertij propositione vltima.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem manentibus ex f c abscindatur cV æqualis rectæ cg . Ostendendum est libra Vg suspensâ ex c perpendiculo cn , brachio cV , æquiponderans figuræ $bzcp$ e ex differentiis genitæ esse æquale quadrato gc imminuto octaua parte circuli genitoris $cefo$; æquiponderans autem figuræ $csoqrn$ ex differentiis maioribus genitæ esse æquale quinque octauis circuli genitoris, imminutis quadrato cg .

Quoniam enim tres rectæ fg , gc , cV ponuntur æquales, patet ex nona secundi tetragonismicorum æquiponderans libra suspensa ex c esse ipsum suspensum imminutum æquiponderante suspensionis ex g : ergo æquiponderans figuræ $bzcp$ e libra ex c suspensa est æquale quadrato gc imminuto octaua parte circuli genitoris.

Quoniam verò ex methodo Corollarij duodecimæ duabus simul $bzcp$ e, $csoqrn$ æquiponderat idem quod bis semicylindro baseos CtD altitudinis cg , istud æquiponderans erit dimidium suspensi, cum centrum grauitatis cylindri sit in medio axis, erit ergo cylindrus altitudinis cg , baseos CtD æquantis dimidium circuli genitoris, si ergo ex dimidio circuli genitoris auferatur æquiponderans parti $bzcp$ e, relinquetur æ-

quiponderans parti alteri $c s o q r n$, videlicet quinque octantes circuli genitoris detractio quadrato $g c$; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hic locum, ut patet, habet corollarium simile primo superioris propositionis.

PROPOSITIO XVIII.

Iisdem manentibus cycloidis integræ $a b c R d$ axis $c f$, ita diuiditur a centro gravitatis ut pars superior ad verticem c sit ad inferiorem sicut septenarius ad quinarium. Si verò ex cycloide integra circulus genitor auferatur, residui quod ex differentiis constat axis $c f$ ita secatur a centro gravitatis, ut superior eius portio sit ad inferiorem sicut quinarium ad ternarium.

Ex recta $g f$ abscindatur $f T$ æqualis ipsi $g f$; quoniam suspensione ex g facta figuræ $b z c p e$ æquiponderat per decimam sextam propositionem octaua pars circuli genitoris quæ est dimidium quadrantis $c p e g$; si suspensio per recessum fiat ex f , perpendicularo $f a$, brachio $f T$ æquiponderans augebitur ipso suspensio per decimam secundi tetragonismicorum: ergo portioni $b z c p e$ æquiponderat octaua pars circuli genitoris aucta quadrato $g c$, libra $T g$ ex f suspensa brachio $T f$, sed parti $b e H f a$ æquiponderant per superiorem iisdem manentibus quinque octauæ partes eiusdem circuli imminutæ quadrato $g c$ (in superiore enim id ostendimus de parte $c s o R n$, brachio $c V$, quæ est eadem cum parte $b e H f a$) ergo toti figuræ $c b a f e$ æquiponderant libra ex f suspensa, brachio $f T$, sex octauæ partes circuli genitoris: ergo duabus simul $c b a f e$, $c R d f o$ æquiponderant sex quadrantes vel tres semisses circuli genitoris. Cum igitur duæ illæ figuræ sint simul æquales duobus circulis genitoribus ut ex tertia propositione patet, æquiponderans ad duas illas erit ut ternarius ad quaternarium; ergo centrum gravitatis duarum illarum simul ita diuidit rectam $f c$, ut portio quæ est ab ipso centro ad basim contineat tres quadrantes brachij $T f$ vel $f g$; ergo reliqua continet quinas eiusdem modi partes, quod erat unum ex demonstrandis.

Quoniam verò genitoris circuli centrum gravitatis est g , duo semisses ipsius illi æquiponderabunt libræ $T g$ suspensæ ex f perpendicularo $f a$, brachio $T f$; ergo toti figuræ cycloidis $a b c R d$ æquiponderant quinque semissibus genitoris circuli; sed ipsa cycloides est per tertiam sex eiusmodi semisses; ergo cycloides ad suum æquiponderans est ut senarius ad quinarium; portio igitur quæ adiacet basi $a d$ est quinque sextantes rectæ $f g$ vel brachij $T f$; ergo reliqua ad verticem est septem eiusmodi sextantes, quod restabat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ad demonstrationis effectum patet non esse necessariam quadraturam figuræ $b z c p e$, eo quod in æquiponderante partis $b z c g$ includatur addititia,

dititia, & in æquiponderante residuæ partis sit ablatiua, vnde fit vt per additionem æquiponderantium elidatur. Methodus verò inueniendi æquiponderans cuicunque portioni $z c y$ si sit minor quam $b c g$ suprà est tradita, quòd si detur maior $c b G M$ inuenitur æquiponderans parti $z c y$, & deinde alteri parti $z y M G$, vt in pari casu duodecimæ annotatum fuit.

COROLLARIUM II.

Ex præsentī & decima quarta quarti tetragonismicorum patet axem $f c$ figuræ compositæ ex differentiis secari eadem proportione in qua semiaxis hemisphærij secatur per centrum grauitatis, & in qua basis prismatoidis explicati in illa eadem decima quarta, & in corollario quarto primæ propositionis eiusdem quarti libri.

PROPOSITIO XIX.

Idem manentibus (Fig. 8.) circa axem $a d$ manentem circumuoluatur cycloides $a b c R d$ & describat conoides quod appello *primum*. Præterea circa axem $b R$ manentem circumuoluatur portio $b z c R$ & describat conoides quod voco *secundum*; ad planum $a f c$ excitetur perpendicularis $f u$, sitque recta $f u$ ad $f T$, vel ad $f g$, vel ad $f x$, vt est circulus ad quadratum diametri circumscriptum.

Ostendendum est Conoides primum esse æquale cylindræo altitudinis $f u$ baseos æquantis videnos circulos genitores diametro $c f$ descriptos. Conoides verò secundum esse æquale cylindræo eiusdem altitudinis, baseos æquantis octo besse quadrati $c g$, vel $T f$, & simul duplum circuli genitoris.

Istud conoides primum secetur quolibet plano $n h z$ parallelo ad planum $u f c$, eiusdem cum quadrante conoidis sectio intercepta inter plana $u f a$, $g f a$ sit quadrans circularis $n m z h$ quem in punctis n , z tangant rectæ $n l$, $z l$ complentes quadratum $z h n l$, cuius diameter sit $h l$. Si intelligatur solidum (vocetur homœoconoides) cuius sectiones in singulis quadrantibus interceptis inter plana $a h z$, $a h n$ sint quadrata $h n l z$; ex vigesimæ tertiæ quarti tetragonismicorum corollario secundo habemus octupulum æquiponderantis cycloidi $a b c R d$ librâ $T c$ suspensâ ex f perpendiculari $f a$, brachio $T f$ esse æquale homœoconoidi illi cuius sectiones sunt quadrata parallela plano $u f c$. Cum igitur octuplum huius æquiponderantis per superiorem sit æquale viginti circulis diametri $f c$, patet homœoconoides istud esse æquale cylindræo altitudinis $f x$ æquantis rectam $f T$, baseos continentis videnos illos circulos. Præterea quoniam homœoconoidis & conoidis ad positionem plani $u f c$ sectiones sunt vt quadratum & circulus inscriptus, hoc est vt altitudo $f x$ ad altitudinem $f u$; per vndecimam quarti erit iuxta eandem positionem homœoconoides ad conoides, vt altitudo $f x$ ad $f u$; sed ita etiam sunt cylindra-

C

dracea istarum altitudinem fx , fu quorum id quod habet altitudinem fx æquat homœoconoides solidum, ergo cylindraceum altitudinis fu æquat conoides propositum, quod erat vnum ex demonstrandis.

Alterum verò eodem modo ostenditur, superfluumque planè sit id enucleatiù stradere: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Hæc methodus perinde rem propositam demonstrat quæcunque alia ad basim $a d$ parallela sumatur circa quam circumuoluatur figura $a c d$, dummodo per decimæ secundi tetragonismicorum methodum æquiponderans illi inueniatur. Eadem quoque methodus non exigit vt tota figura $a z c R d$ sumatur, sed potest sumi quælibet eius portio $h z c f$ ad positionem rectæ $f c$; & completo parallelogrammo $h z y$ finueniri seorsum æquiponderans figuræ $z c y$ quod addatur æquiponderanti parallelogrammi $h z y f$. Ex quibus patet non sine aliqua causa scriptum à nobis esse in illo corollario secundo vigesimæ tertiæ Theorema illius propositionis nostræ planam viam facere ad plurima problemata abstrusa pariter & vtilia.

COROLLARIUM II.

Rectam fu esse octauam partem totius peripheriæ $ce fo$, hoc est baseos $a d$, patet inde quod rectangulum sub recta $g f$ & sub $a f$ æquante dimidium peripheriæ totius sit æquale circulo $ce fo$; ergo rectangulum altitudinis $c f$ baseos æquantis dimidium rectæ fa vel quadrantem peripheriæ totius est æquale circulo $ce fo$: igitur quadratum $c f$ est ad circulum, vel ad rectangulum altitudinis eiusdem $c f$, baseos æquantis quadrantem peripheriæ circularis, vt basis $c f$ ad quadrantem eiusdem peripheriæ, vel ad dimidium rectæ $a f$: ergo cum fx vel $g f$ sit ad fu , sicut $c f$ dupla rectæ $g f$ est ad quadrantem peripheriæ, erit fu octaua pars rectæ $d a$ æquantis peripheriam $ce fo$.

PROPOSITIO XX.

EX demonstratis hætenus & iis quæ propositæ quæstionis Autor anonymus de suo spondet, Quadraturam Circuli eruere.

Quod in præsentī propositione nunc intendimus, mouit nos potissimum ad istam nostram lucubrationem euulgandam. Sæpe enim accidit vt duorum circa idem Autorum inuenta in vnum collata præstent id ad quod singula satis non sint. Nos itaque ea inuenimus circa quæstionem propositam, quibus si accedant quæ doctissimus ille Scriptor promittit se non denegaturum posteris, si quæsitæ sua nullus soluerit, contendo absolui inde posse quadraturam circuli.

Manente enim schemate propositionis superioris, cum Nobilissimus ille anonymus promittat figuræ $b c R$ centrum grauitatis; sit illud i ; ergo vt fg semidiameter circuli genitoris ad $g i$ longitudinem notam, ita est figura $b z c L R$ ad quartum spatium, quod notetur elemento H , Igi-

tur $b z c L R$ figura continet ex duodecima propositione bis quadratum $g c$, & semel genitorem semicirculum $e c o$: spatium verò quod ei æquiponderat libra $f c$ suspensâ ex g brachio $g f$, perpendicularo $g e$, continet ratione semicirculi genitoris duos trientes quadrati $g c$ per decimam octauam tertij libri tetragonismicorum; ratione verò figurarum $b z c e$, $R L c o$ dimidium semicirculi genitoris $e c o$ per decimam sextam huius libri. Igitur rectilineum inclusum in figura $b z c L R$ suspensâ ad rectilineum inclusum in æquiponderante H est vt ternarius ad vnitatem, portio autem semicirculi contenta in suspensio $b z c L R$ ad portionem inclusam in æquiponderante H est vt binarius ad vnitatem: rectilineum igitur suspensû ad rectilineum P æquiponderantis non est vt curuileum eiusdem suspensû ad curuileum Q eiusdem æquiponderantis.

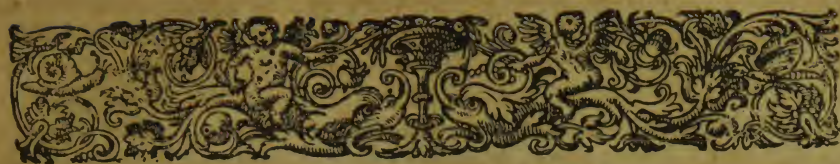
Vt $f g$ ad $g i$ ita fiat rectilineum æquiponderantis H ad spatium p , & ita etiam fiat curuileum æquiponderantis H ad spatium q : ergo cum eadem sit ratio rectilinei figuræ $b z c L R$ ad rectilineum p , & curuilei figuræ $b z c L R$ ad curuileum q ; oportet necessariò vt spatij p ad q non sit eadem ratio quæ spatij P ad Q ; si enim esset eadem ratio, cum aliunde sint duo simul p & q æqualia duobus simul P & Q , essent singula singulis æqualia, ac proinde rectilineum suspensû ad P rectilineum æquiponderantis esset vt curuileum suspensû ad curuileum Q æquiponderantis, contra quam suprà ostenderimus. Cum igitur rectilineum p notum vnâ cum curuileo q noto sint simul æqualia rectilineo P & curuileo Q simul sumptis, & non singula singulis, differentia rectilineorum p & P nota, erit æqualis differentia curuileorum notæ q & Q , quod satis est ad quadraturam circuli, vt patet: ergo &c. quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

Habes hîc, Lector, viginti illas propositiones iterum cufas quas anno superiore decimo Kalendas Augusti in lucem emifi. Nescio quis postea sub initium Octobris visus est inuidere mihi qualemcunque huius inuenti laudem, dum in historiâ Cycloideos Gallico idiomate composita scripsit hac meo nomine edi non oportuisse nulla mentione facta eius à quo illa accepiſſem. Vanissimum istud commentum risu exceperunt hîc Tolosates, plurimique viri graues alibi; ne tamen silentium mihi confessioni criminis veritè ab illo posset, sub finem sex propositionum de acceleratione grauiû nuper à me vulgararum respondi in hac verba ad lectorè: Autor historiæ Cycloideos initio Octob. editæ ausus est calumniosè scribere nos furtum fecisse problematum eorum quæ de eadem Cycloide ad Clarissimum Senatorem D. de Fermat XII. Kal. Augusti miseramus. Nihil certè posthac edetur quod non possit suis vindicare amicis pari prorsus iure. At videramus manuscriptas ea de re demonstrationes huc Parisiis transmissas. Ad quem quæso? non certè ad D. de Fermat, neque ad nos, neque verò ad vllum qui eas nobis legendas dederit. Videram equidem in Torricellij libris iamdiu editis demonstrationem qua probat Cycloidem integram esse triplam circuli genitoris: sed hanc eius laudem iamdiu agnoueram in Elementorum meo-

rum libris. Vidi etiam, fateor ultro, eiusdem Torricellij manuscriptam demonstrationem centri grauitatis totius Cycloideos ab eodem D. de Fermat mihi communicatam triduo antequam meum illud Opusculum Parisios mitterem: hanc verò inuentionem vt illi nequaquam præripio, ita cætera ex omnium qui istam rem tentarunt iudicio longè difficiliora primus inuenisse mihi videor, quamdiu alios ante me inuentores penitus ignoro, tantum abest vt furti vllius mihi conscius sim. Illa verò (datâ semel circuli quadraturâ) sunt tria potissimum. I. Quadratura cuiuslibet portionis Cycloideos. II. Cubatura solidi geniti circumductu cuiuslibet portionis Cycloideos circa quamlibet rectam basi parallelam. III. Centrum grauitatis cuiuslibet segmenti Cycloideos subtenso rectâ ad basim parallelâ. Cæterum expecto vt iste Autor mihi eadem arte deuntiet (id enim facile potest, si velit) à quonam Elementa Tetragonismica iam ante plures annos acceperim: à quo istas ipsas quas iam euulgo propositiones: à quo plura alia quæ prælo parata penes me habeo, in quibus sunt quatuor de cycloide libri cum plena solutione problematum omnium propositorum, quam viris summæ eruditionis & fidei legendam atque examinandam iam pridem dedi in primariis totius Galliæ urbibus. Sed cum chartæ istius angustix longiorem Apologiam non admittant, erit tempus quando ex literis D. de Pascal ad nos datis plura de Cyclocylindricâ, deque quadratura nostra solidi circa axem cycloideos parux pro omni casu geniti, tantopere ab ipso laudatâ, in defensionem nostram describere nobis per chartam ampliorem licebit. Vale Tolosæ vi. Eidus Decembr. 1658.

Cæterum quod primus ea inuenisse mihi visus sum, quæ primus darem in lucem, quamdiu alios ante me inuentores penitus ignorarem, non reprehendet ille Autor, si attenderit ad ea quæ ipse pronuntiauit in continuatione sua historia editâ Parisiis 12. Decemb. 1658. Ibi enim vt infirmit illud graues viros iamdiu legisse meos de Cycloide manuscriptos libros, & plenam problematum propositorum solutionem, opponit in istis geometricis causis solam editionem publicam facere fidem. Igitur si primus ego illa problemata publicè emisi, negare non potest me primum illorum inuentorem esse, nisi adducat anteriorem illorum problematum aliquius alterius editionem. Huc spectat quod ibidem edicit, in geometricis non præberi assensum nisi rebus euidenter probatis. Quæ autem ad Cyclocylindricam attinent, vide ea in scholio decimæ propositionis libri proxime sequentis: quæ verò ad laudes à D. de Pascal attributas meis inuentis lege (si tantum vacat) in scholio vltimæ propositionis libri tertij, vbi defensionis iusta necessitas repugnantem dicis illa refrendi pudorem.



DE CYCLOIDE

LIBER SECVNDVS.

In quo ampliora nostra methodi fundamenta statuuntur, & Cyclocylindricarum figurarum quadratura traditur.

DEFINITIONES.



*Cyclocylindricam figuram primi nominis vocamus eam quæ intelligitur in superficie cylindri recti describi eo modo quo circulus in plano, nempe si pede circini extremo manente in dato superficie cylindricæ puncto, ipse circinus circumducatur notans in superficie cylindricâ lineam donec ad idem punctum circuitu peracto redeat, quoties iste reditus fuerit possibilis. Circini autem crura si deducta fuerint interuallo diametri baseos cylindri, vocetur *cyclocylindrica primaria*, & antonomastice *cyclocylindrica*; si alio quouis interuallo, dicatur *cyclocylindrica secundaria*; quod si figatur extra illam superficiem, *nominis secundi* appellabitur, *primaria* quidem quoties semidiameter circuli, vel interuallum pedum extremorum circini erit æquale rectæ illi quæ à puncto in quo fixus hæret peseiusdem circini per cylindri axem ducta terminatur in superficie cylindri, illa verò semidiameter & circulus ab ipsa descriptus est in plano basi cylindri parallelo; *secundaria* autem *secundi nominis* quando interuallum circini non terminabitur in superficie cylindri.*

Nemini mirum Videri debet quod istam figuram appellem alterum circulum; fratres enim mihi videntur esse, cum circini, cuius vnus pes fixus maneat, ductu generentur ambo, ille quidem in superficie planâ, iste in cylindricâ: vel seclusâ circuli cogitatione, cum ambo sint communis sectio spheræ & superficie, ille quidem plana, iste cylindrica. Porro in istis cylindricam superficiem intelligo illam quam definit Euclides initio vndecimi libri, cuius videlicet axis est rectus ad basim.

DE CYCLOIDE

PROPOSITIO PRIMA.

EX centro a (*Fig. 9.*) descriptus sit circulus intervallo cuiuslibet rectæ ad , eiusque quadrans sit dac , ac proinde da , ac secent se ad normam; rectæ ad bisectione sit g , & ex centro g per a , d descriptus sit semicirculus and , in cuius peripheria sumptum sit quoduis punctum e & per illud ductæ ed , ea , quarum alterutra ae producta occurrat peripheriæ dbc in b ; ducta sit bm perpendicularis ad ad .

Ostendendum est rectæ de æqualem esse bm , & rectæ ae rectam am ; arcui verò di æqualem esse arcum db , & arcui ane arcum bc .

Quoniam enim angulus dab constituitur ad centrum circuli maioris dbc , & ad peripheriam circuli minoris dna ; si per g ducatur ad d perpendicularis gl occurrens peripheriæ in i , ac proinde bifariam secans in i arcum di , arcus di erit similis arcui db ; sed arcus similes circulorum se habent ut semidiametri; ergo cum semidiameter da sit dupla semidiametri dg , peripheria db erit dupla peripheriæ di ; sed peripheria de est quoque dupla eiusdem di ; ergo arcus db , de sunt æquales.

Præterea quoniam triangu-
la rectangula aed , amb habent angulum
 ma communem, sunt æquiangula; sed habent bases ad , ab æquales;
ergo latus ae est æquale lateri am , & latus de lateri mb , quod erat
demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc patet si peripheriæ and ponatur recta æqualis ah , ipsam ah esse quoque æqualem arcui cbd ; & si in eadem recta ah sumatur af æqualis arcui ane , ipsam af esse quoque æqualem arcui bc . Item si ex f excutetur perpendicularis fo æqualis rectæ mb vel de , & intelligatur figura ex differentiis genita respondens quadranti circulari cbd , cuius differentiæ ordinatim applicentur ad rectam ca , punctum o esse in limbo hoc eiusdem figuræ.

PROPOSITIO II.

SIt (*Fig. 10.*) $abzcf$ figura ex differentiis genita, ita ut ordinatim applicata zy æquet arcum pc ; ducta sit quælibet zl secans arcum superiorem bc in z parallela axi, complens parallelogrammum $hlfc$, occurrens rectæ gb in i ; completò parallelogrammo $gcxb$ intelligatur descripta figura alia $xrgb$ ex differentiis quoque genita sed subcontrariè, ita ut eius semiaxis sit xb , vertex x , ordinatim applicata bg ; curua xrg occurrat rectæ lz in r .

Ostendendum est tres rectas hz , ri , zl esse proportionales.

Per z , r ducantur ordinatim applicatæ rs , zy occurrentes semicirculi genitoris peripheriæ co in t , p ; per t ducatur tu complens paralle-

logrammum $i r t u$. Quoniam ex generatione figuræ $a b c q d$ recta $h c$ vel $z y$ vel $r s$ est æqualis arcui $c p$, completo parallelogrammo $b g y m$, & $b g f e$, rectam z vel $e r$ erit æqualis residuo arcui $p o$; nam tota $b g$ est ex generatione æqualis toti $c t o$. Rursus quoniam ex generatione figuræ $x r g b$ arcui $c p t$ æqualis est recta $e r$, eidem rectæ $e r$ erunt æquales arcus $c t$, $p o$: ergo inter se sunt æquales iidem arcus $c t$, $p o$: ergo sublato vel addito communi $p t$, erunt $c p$, $t o$ æquales arcus: ergo ordinatim applicata $y p$ æquat ordinatim applicatam $t u$. Cum igitur tres rectæ $c y$, $y p$, $y f$ sint proportionales (nam ex p puncto peripheriæ demissa est $p y$ perpendicularis ad diametrum $c f$) erunt tres rectæ $c y$, $t u$, $y f$ proportionales: sed rectis $c y$, $t u$, $y f$ æquales sunt $h z$, $r i$, $z l$: ergo tres rectæ $h z$, $r i$, $z l$ sunt proportionales, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Curvæ $x r g$, $c z b$ secant se in puncto λ , & per λ agatur $\pi \omega$ occurrens rectis $b g$, $a f$ in φ , ω ; patet rectam $\omega \varphi$ ad $\varphi \lambda$ esse potestate vt binarium ad vnitatem. Recta enim $b g$ secatur bifariam in φ , ac proinde recta φg æqualis est dimidio peripheriæ $c p o$, vel $x \theta \beta$, descripto ex centro b semicirculo $x \beta n$. Per λ acta sit $\lambda \theta$ parallela basi $a f$ occurrens peripheriæ $x \beta n$ in θ ; per θ agatur $\delta \mu$ complens parallelogrammum rectangulum $x n \mu \delta$, occurrens rectæ $b \beta$ in \downarrow . Quoniam $x \theta$ arcus est dimidium arcus $x \theta \beta$, patet tres rectas $\theta \delta$, $\theta \downarrow$, $\theta \mu$ esse proportionales, & rectam $\mu \downarrow$ ad $\downarrow \theta$, vel $\omega \varphi$ ad $\varphi \lambda$ esse potestate vt binarium ad vnitatem.

COROLLARIUM II.

Si figura $g \lambda x$ producat ad axis $b x$ partes β , perinde ostenduntur tres rectæ $l z$, $z i$, $r i$ proportionales, quamuis punctum z sit in arcu $b a$, & punctum r in altero arcu peripheriæ $g r x$ productæ.

PROPOSITIO III.

Iisdem manentibus, ostendendum est rectas $r i$, $i z$ esse sinus complementorum, & quadrata ambarum esse simul æqualia quadrato $c g$.

In parte superiore $b c g$ quoniam $y g$ æquat sinum $p B$ arcus $p t o$, sequitur rectam $z i$ æqualem rectæ $y g$ esse sinum arcus cui recta $b i$ est æqualis: cum enim recta $i g$ æquet arcum $c p$, & tota $g b$ totum arcum $c p o$, apertum est rectam $i b$ æqualem esse arcui $p t o$, & ordinatim applicatas ad basim $b g$ parallelas axi $c f$ esse sinus arcuum quibus æquales sunt rectæ puncto b adiacentes. Cum ergo posita sit subcontrariè altera ex differentiis figura $x r g b$, patet rectas $r i$, $i z$ esse sinus complementorum, & quadrata ambarum esse simul æqualia quadrato $c g$, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus, ostendendum est $h z$ sinum versum arcus cui recta $h c$ æqualis est, esse æqualem sinui toti $c g$ demptâ $z i$ æquan-

te sinum complementi; rectam verò $z l$ compositam ex eodem sinu $z i$ & ex sinu toto $i l$ vel $g f$ esse æqualem sinui verso arcus cui recta $i q$ est æqualis.

Quoniam sinus $p B$ vel $y g$ demptus de sinu toto $c g$ relinquit sinum versum $c y$ arcus minoris $c p$; & idem sinus $p B$ arcus $p o$ additus ad sinum totum $f g$ componit $y f$ sinum versum arcus maioris $p o f$; patet $h z$ sinum versum arcus cui recta $h c$ æqualis est esse æqualem sinui toti $c g$ dempta $z i$ æquante sinum complementi: rectam verò $z l$ compositam ex eodem sinu $z i$ & ex sinu toto $i l$ vel $g f$ esse æqualem sinui verso arcus cui recta $i q$ est æqualis, quod erat demonstrandum.

Hæ figuræ $c z b g$, $x r q b$ vocentur *subcontrariæ*.

PROPOSITIO V.

Reuocato schemate propositionis primæ (*Fig. 9.*) ex a abscissa sit $a h$ æqualis curvæ $d b c$ vel $d e a$, ponaturque $h o c a$ figura ex differentiis superior, cuius semibasis sit $a h$, axis $a c$, circulus genitor sit is qui ex centro a per c descriptus fuit. Ponatur præterea $h \lambda a f$ figura ex differentiis superior respondens circulo genitori, semidiametro $g n$ descripto: per f quodlibet punctum rectæ $a h$ ducta sit $f o$ ordinatim applicata ad semibasim $a h$ semicunei expansi $h o c a$: sit $a e$ recta æqualis rectæ illi quæ in semicirculo $a n d$ subtendit arcum æqualem rectæ $a f$.

Ostendendum est quadratum rectæ $a d$ esse maius quadrato rectæ $a e$, excessumque esse æqualem quadrato rectæ $f o$.

Ex tertia propositione patet rectam $f o$ esse æqualem sinui arcus $d b$, cui arcui recta $h f$ est æqualis: sed per primæ corollarium recta $f o$ est æqualis rectæ $d e$; ergo rectæ $f o$ vel $d e$ quadratum est æquale excessui quo quadratū $a d$ superat quadratū rectæ $a e$, quæ subtendit arcum $a n e$, qui arcus ponitur æqualis rectæ $a f$: duo autem quadrata $a e$, $e d$ æqualia esse simul quadrato $a d$ patet ex elementis Euclidis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Iisdem manentibus figura $G T a h$ subcontrariè ponatur figuræ $h o c a$.

Ostendendum est rectas $f o$, $f T$ esse æquales duabus $d e$, $a e$ singulis.

Quoniam per corollarium primæ recta $f o$ æqualis est rectæ $d e$, per superiorem autem excessus quadrati $a d$ supra quadratum $f o$ est quadratum rectæ $a e$; per propositionem verò tertiam idem excessus est æqualis quadrato ordinatim applicatæ $f T$ ad basim $a h$ figuræ $G T a h$ subcontrariè

trariè positæ alteri $h o c a$: igitur duæ $f o$, $f T$ sunt æquales duabus $d e$, $a e$ singulæ singulis, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Iisdem positis, ostendendum est dicylindraceum ad positionem plani recti super plano $d a c$ & incedentis per $a c$ rectam, genitum ex subcontrariè positis $h o c a$, $a T g h$ esse condictâ ratione æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam $a d$ vel $a c$, baseos $h \lambda a f$.

Quoniam in semicirculo $a e d$ ut $a d$ recta ad $d e$, ita est $a e$ recta ad $e z$, rectangulum sub extremis $a d$, $z e$, hoc est rectangulum sub $v a$, $f \lambda$ erit æquale rectangulo $d e a$, vel $T f o$. Igitur dicylindraceum ad positionem plani recti super plano $d a c$, & incedentis per $a c$ rectam, genitum ex subcontrariè positis $h o c a$, $a T G h$ est condictâ ratione æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam $a d$ vel $a c$, baseos $h \lambda a f$, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem manentibus (Fig. II.) ad planum $c f d$ excitetur perpendicularis $c h$ æqualis rectæ $c f$; in plano $h c x$ intelligatur describi circulus diametro $c h$; iste verò circulus intelligatur esse basis cylindri cuius axis $n o$ parallelus rectæ $c f$; planum per axem circuli & per rectam $c f$ sit parallelogrammum $c h m f$; iste ergo cylindrus tangit planum $a c d$ in recta $c f$; parallelogrammi $h c g l$ latus $g l$ occurrat axi $n o$ in r ; per r & c ducatur recta $r c$ & intelligatur planum $r c x$ secans cylindrum; ut portio cylindri intercepta ad partes rectæ $c g$ inter planum transuersum $r c x$ & semicirculum $i g s$ quem tangit recta $g q$, sit cuneus primus definitus in vigesima sexta quarti terragonismicorū. Iungatur præterea recta $r f$ & intelligatur planum transuersum $r f a$, ut portio cylindri intercepta planis $l g b$, $m f a$, insistentque basi $i g s$ diuidatur in duos cuneos primum $g r f$, secundum $r f o$.

Ostendendum est si ad positionem plani $l g b$ vel $h c x$ intelligatur cylindrica superficies cunei primi $c r g$ explicari hinc & inde, ita ut circulorum basi cylindri parallelorum arcus conuertantur in rectas ipsis æquales, & rectæ $g b$ parallelas; superiorem partem $b c q$ esse ipsam superficiem cunei primi ita explanatam: inferiorem verò partem $b q d$ a esse pari ratione portionem cunei secundi $r f o$, vna cum semicylindro baseos $i g s$ altitudinis $r o$.

Istud sola mentis contemplatione melius intelligitur quàm verborum prolixitate; in quarta enim primi libri ostendimus rectangulum altitudinis $c g$ baseos $z y$ esse æquale duplo sectoris $c g p$, & sectorem $c p g$ esse eundem cum sectore qui in plano $z y B$ ibidem fuit designatus in cylindro

D

cuius sectio est semicirculus $c e f$ si rectus ponatur ad planum $a f c$, ita ut recta $e g$ sit perpendicularis ad planum $a f c$. Atqui sectori $c p g$ inueniatur pari methodo æqualis sector circuli $y B$ qui est sectio plani $z y B$ & cylindri habentis axem $n o$, interceptus ad partes plani $g c x$ inter plana $r c x$, $r c g$; ergo arcus periphericus cunei respondens plano $z y B$ ad partes b est æqualis rectæ $z y$; igitur cum idem ostendatur ubicunque iaceat z inter b est c ; peripheria cylindrica cunei primi $g r c$ extenditur ad positionem rectæ $b q$ in figuram $b c q$, modo suprâ præscripto.

Completo parallelogrammo $f c x b t$, quoniam recta $g b$ æquat ex constructione peripheriam $c e$, & recta $a f$ peripheriam $c e f$, patet rectam $f t$ esse dimidium rectæ $f a$, ac proinde esse æqualem arcui $f e$ vel quadranti peripheriæ circularis. Intelligatur figura $f D u c$ subcontraria figuræ $a z c f$, ut in simili casu secundæ propositionis primi libri; ducatur quælibet basi $a f$ parallela $N D$ occurrens in N , D utriusque limbo figuræ ex differentiis genitæ, axi $c f$ in M ; rectæ $b t$ in V : erit igitur ut in pari casu secundæ illius tota $N D$ æqualis toti $a f$; ergo completis parallelogrammis $N M f G$, $M f a E$, si ex æqualibus $E M$, $N D$ auferatur communis recta $N M$, residuæ $E N$, $M D$ erunt æquales: sed $M D$ recta est ex superiore casu æqualis peripheriæ X (ita enim vocetur) cunei primi $r g f$ interceptæ inter plana $r f a$, $r f g$ ad partes plani $g f a$: ergo residua $N M$ est æqualis reliquæ peripheriæ quæ vnâ cum X æquat semicirculi peripheriam: ergo cum $M V$ æquet quadrantem eiusmodi peripheriæ circularis, recta autem $E V$ æquet alterum quadrantem, & $E N$ portionem cunei primi, recta $N V$ æquabit portionem cunei secundi ad partes b positam: ergo tota linea $N H$ continet rectam æqualem duplo rectæ $M V$, hoc est semiperipheriæ circuli, & insuper aliam æqualem duplo rectæ $N V$, hoc est circulari lineæ attinenti ad cuneum secundum. Figura igitur inferior $a N b q H d$ ad positionem rectæ $a f$, methodo antè præscripta respondet superficiæ cylindricæ attinenti ad cuneum secundum, & insuper superficiæ semicylindricæ, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

In duodecima propositione primi libri ostendimus figuram superiorem $b c q$ esse æqualem duplo quadrati $c g$; in præsentī verò, eiusmodi figuram esse superficiem cylindricam cunei primi expansam ad positionem plani $h c x$. Vnde nunc primùm colligimus nos tunc nihil cogitantes quadrasse superficiem illam sed expansam, quam antequam expandatur P . Gregorius à S. Vincentio appellat *cylindricam superficiem vngularem*, & subtilissimè quadrat libri noni propositione 45. & 54. assumpta in suæ huius quadraturæ fundamentum propositione vigesima libri quinti collectionum Mathematicarum Pappi. Colligimus præterea istas duas superficies expansam videlicet, & contractam in curuum, esse æquales: hoc enim ipsum quod nos de expansa, ille de contractâ demonstrat, quod non sine admiratione examinatori cuiuslibet constabit. In hanc igitur figu-

ram possunt conferri ferme omnia quæ ille de sua illa superficie eruditè admodum demonstrat : sed aliena frustra exscribere non amo , licet admiranda iudicem.

Figuram istam in posterum vocabo vno ex istis nominibus, nempe *paruam cyclordem*, vt eam distinguam à maiore Torricellij, vel *cunei expansam superficiem cylindricam*, vel breuiùs *cunei expansam superficiem*, vel certè *cuneum expansum*; eius vero partes superiorem $b c q$ & inferiorem $b q d$ a distinguam sicut in præsentì.

COROLLARIUM II.

Quoniam ordinatim applicatæ $M D$, $E N$ sunt æquales perpetua lege, patet lineam $a N B$ esse cauam ad partes rectæ $a E$, & conuexam ad partes rectæ $f M$; ipsamque figuram $E B N a$ esse subcontrariè positam figuræ $b z c g$ & eandem cum ipsa.

S C H O L I V M.

Figuras expansam & contractam esse inter se æquales si quis generaliter & pro omni casu assumat, rem à Geometriæ certitudine alienissimam facit: speciosum quidem est illud postulatum sed planè dolosum; ideòque nos sæpe sapius illo delusi æqualitatem inter expansam & contractam in præsentì casu intulimus ex demonstrationibus seorsum factis pro expansâ & contractâ. Sunt igitur longè diuersa duo ista, aliquam superficiem curuam expandi in rectam, & esse illi æqualem; nec istud ex illa generali methòdo inferatur. Atque hanc cautionem intelligi volumus in corollario primo decimæ septimæ tertij libri, Vbi conijunctam superficiem expansam damus. Vtrum autem contracta sit expansæ æqualis, an inæqualis, nihil ibi consultò pronuntiamus: nouimus etenim plurimas cautiones esse adhibendas vt æqualitas legitimè inferatur, eæ verò quænam sint, non est huius loci dicere. Aduerto vnum in præsentì casu quod cum probabili Veritatis larvæ suppositum lateat plures decipere posset; superficiem istius contractæ & ante explanationem sumptæ illum limbum qui peripheriæ circulari opponitur esse ellipseos arcum; at verò in expansâ figurâ limbum $a b c q d$ non rectè inferri æqualem illi arcui propterea quod is in ipsum $a b c q d$ expandatur & explicetur. Si enim consecutio ista esset legitima, plura demonstrarentur quæ ad hunc vsque diem licet diu quæsitæ, attamen irreperita latent. Qui autem noua principia totos dies inquirunt, videant ne nitore Veritatis Geometricæ quam nobis maiores nostri tradiderunt, incauti officiant: nihil enim faciliùs est quàm vt quod in aliquo casu tantummodo verum est, ad alios inani quadam Veritatis specie traducatur; iuuatque meminisse Archimedes testari (vt S. 5. prolegomenon nostrorum aduertimus) quosdam quadraturam circuli aggressos successis caruisse, quòd principia noua & minimè concedenda assumpsissent.

PROPOSITIO IX.

A Ssumpto schemate propositionis primæ (Fig. 12.) ducta sit quæcunque $z i$ parallela axi $c f$ occurrens limbo expansæ cyclocylindricæ superioris in z ; rectæ $b g$ in i ; per z ducta sit $z y u$ pa-

D 2

rallela rectæ bg occurrēs axi c fin y ; peripheriæ semicirculi c o fin u .

Ostendendum est completo parallelogrammo $gyum$, figuræ izc g æquale esse rectangulum ogm .

Istud ostendi posset ex methodo duodecima primi libri, quia tamen methodus Gregorij à Sancto Vincentio est facilior eam vsurpamus hoc loco. In planum cgo ex puncto c excitetur perpendicularis ct æqualis rectæ cg , cuius dupla sit cx , & iungantur rectæ gt , gx . Si ergo circulus diametri cf ponatur basis cylindri, & is secetur plano xgb transuerso ostendit ille Autor libri noni propositione quadragesima septima superficiem cunei primi xgc respondentem arcui c u esse æqualem rectangulo contento sub circuli c o fr diametro or & sub eius parte gm ; cumque in quinquagesima quarta eiusdem libri demonstret superficiem cunei primi xgc ad superficiem primi tgc esse vt rectam xc ad tc , hoc est vt diametrum ro ad semidiametrum go , patet superficiem cylindricam cunei tgc respondentem arcui c u esse æqualem rectangulo ogm .

Quoniam verò arcus c u extenditur in rectam yz , & rectæ in superficie cylindricâ cunei tgc quæ sunt sectiones planorum parallelorum plano gct sunt æquales ordinatim applicatis ad diametrum ro : m u vel iz erit ordinatim applicata ad basim bg figuræ cylindricæ expansæ. Igitur portio izc g est æqualis portioni cuneatæ superficiæ cylindricæ insistenti super arcu c u: ergo figura izc g est æqualis rectangulo ogm , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Cum tota portio bzc g sit per duodecimam primi libri equalis rectangulo ogo , & eius pars izc g rectangulo ogm , patet partem bzi esse æqualem rectangulo gom .

COROLLARIUM II.

Quando arcus c u est bes peripheriæ c u o, hoc est, quando c u arcus est duplus alterius ou patet rectam gc bifariam secari in y , & rectam go ad gm esse potestate vt quaternarium ad ternarium. Quod si arcus c u foret triens peripheriæ c u o patet rectangulum ogm fore æquale semiquadrato rectæ gc , & ipsam gc fore ad gy potestate vt quaternarium ad ternarium.

PROPOSITIO X.

Reuocato schemate propositionis primæ (*Fig. 9.*) intelligatur a n d circulus fieri basis cylindri cuius superficies describatur motu rectæ a s perpendicularis ad planum circuli a n d. Pede circini manente in puncto a intelligatur intervallo rectæ a d describi linea quam vocamus absolutè cyclocylindricam.

Ostendendum est spatium inclusum istâ cyclocylindricâ esse æquale spatio quod potest c u dupla rectæ a c.

Intelligatur basis cylindri esse circulus centro g per d & a descriptus, ut $a h$ recta æquet peripheriam $a n d$: ordinatim autem applicatæ ad basim $a h$ æquent rectas in cyclocylindricâ figurâ ante ipsius expansionem parallelas axi cylindri. Istius itaque figuræ ita expansæ semiaxis longior erit $a h$, breuior $a c$ (ita enim vocentur) eius verò quadrans erit $a h o c$. In rectâ $a h$ sumatur quoduis punctum f , & $a f$ æqualis sit arcui $a n e$: ergo si $c a$ ponatur axis semicunei primi expansi vel cycloideos parvæ respondentis quadranti circuli $a d b c$, $a h$ æquabit peripheriam $d b c$ ex primæ corollario, ac proinde $a h$ erit basis illius semicunei expansi: igitur per quintam recta $f o$ ordinatim applicata ad semibasim $a h$ semicunei primi expansi $a c o h$ potest spatium quo recta $a d$ superat quadratum subtensæ $a e$: ergo $f o$ est ordinatim applicata figuræ cyclocylindricæ expansæ. Nam ante expansionem si per e agatur $e t$ parallela rectæ $a s$, quæ axi cylindri æquidistat, recta $e t$ erit in superficie cylindrica, si autem $a t$ recta ponatur æqualis intervallo circini siue rectæ $a d$, patet rectam $e t$ secari à circino in puncto t , ergo recta $e t$ est ordinatim applicata, axi parallela, insistens super peripheria $d n a$; ergo $t e$ recta & $a e$ possunt duo quadrata æqualia quadrato $a t$ vel $a d$; ergo cum quadratum $a e$ quadratumque $f o$ vel $m b$, vel $d e$ æqualia simul sint eidem quadrato $a d$, erunt rectæ $f o$, $e t$ æquales; ergo cum arcui $a n e$ æqualis sit recta $a f$, & ordinatim applicatæ $e t$, ordinatim applicata $f o$, semicuneus expansus primus $h o c a$ erit quadrans cyclocylindricæ figuræ expansæ, earumque limbi $h o c$, $h p c$ erunt vnus & idem.

Quoniam igitur ex duodecima primi libri tota figura $h o c a$ æqualis est quadrato $a c$, & $h o c a$ est, ut iam ostendimus, quadrans cyclocylindricæ figuræ, patet quadruplum quadrati $a e$, vel quadratum quod potest dupla rectæ $a c$ esse æquale cyclocylindricæ integræ, quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

De hac figura quadrandâ ut cogitarem fecit Clarissimus D. de Fermat; postea enim quam primum huius operis librum vulgaui, nescio qua se dante occasione significauit mihi inuenisse se solidi, motu cuiuslibet cyclocylindricæ primi nominis circa basim geniti proportionem cum cylindro circa eandem basim genito motu rectanguli cuius vnum latius sit eadem basis, alterum æquet axem cyclocylindricæ. Vbi primum solus fui, cæpi mecum cogitare quid istud rei foret, reperi que tandem post aliquot dies non tantum proportionem illam, quam mihi vir optimus non expresserat, sed etiam quadraturam cyclocylindricæ primaria primi nominis. Hoc, cum iterum illum alloquerer, ipsi denuntiavi, deque meo inuenio pro sua qua me licet immerentem completitur beneuolentia, & pro studio illo quo artium omnium incrementa mirifice fouet, mihi ample gratulatus est. Aliquot post diebus literis ad D. Carcani datis inserui quantum hac in re deberem integerrimo illi senatori, quanti facerem subtilissimam quam mihi tunc communicarat demonstrationem circa proportionem cylindri & solidi. De me nihil scribere aliud tunc libuit nisi meâ quidem sententia facturum illum rem docta sæ-

culi curiositate dignam qui cyclocylindricas figuras (nempe primi nominis, nam de aliis nondum quicquam cogitaram) quadraret. Quarta Septembris proximè lapsi die primus ad me dedit literas D. Pascal, ut me doceret quas ego edideram viginti propositiones de cycloide, non attigisse problematum ab Anonymo propositorum difficillima, & quæ ego ex illis soluiſſim si comparantur ad solidum circa axem cycloideos magna vel parua, esse ut elementa Euclidis collata cum Archimedeis operibus. Præterea tam longè adhuc distare inuentionem solidorum istorum circa axem genitorum ab inuentione centri gravitatis solidorū propositā, quàm procul remoti sunt eiusdem Euclidis libri ab inuentis Luca Valerij aut Archimedis. Ut autem intra inuentorum infimum gradum potentiùs me cohiberet, subiecit in infimo illo loco esse quadraturam cyclocylindricā, quam ego tamen in literis ad D. Carcaui tantopere extollo, eamque iam repertam esse etiam à me ipso quamvis insciente; sed pace illius dixerim, fallitur; conscius enim mihi eram mei istius inuenti ostendit autem à me inuentam esse, quòd cycloideos parua quadraturam dederim in duodecima primi libri iam tunc edui; illa autem cyclocylindrica expansa, quando describitur interuallo diametri baseos cylindricæ, sit ipsa (quod demonstrare inquit paratus sum, si opus fuerit) cycloides parua. Ista sincere narraui ut constet quid me doceri de cyclocylindrica figura curarit Anonymus: at certè nihil; expectabam tamen quadraturam cyclocylindricæ cuiuslibet, quam eruditā ista ætate dignam existimabam tunc, & etiam nunc existimo. Quis tamen non putet mihi arcanum aliquid de cyclocylindrica figura, quod numquam in mentem meam venire potuisset, detectum tunc fuisse, si attendat ad illa Verba Autoris historia Cycloideos edita Gallice 10 Octob. 1658. Quo in negotio (inquit ille Autor Anonymus) rem Patri LALOVERÆ gratissimam facturum me credidi; quia suis in literis, quæ penes nos seruantur, scribit de quadratura huius figuræ, quam cyclocylindricam vocat, tanquam de re sibi maximè incognita, & quam imprimis optaret cognoscere. Dominus de Carcaui, cum non vacaret per se, per vnum ex amicis (is est D. de Pascal) illi explanauit ista omnia, & quidem valde amplis literis, quibus idem Pater respondit. Diceret isto responso me agnouisse insciām meam, & gratias illi egisse me de doctrinā summè reconditā. Respondi, fateor, sed hoc ipsum quod hic inculco, me nihilò doctiorem circa cyclocylindricam ex illis literis euasisse, meque in illis desiderasse illam cyclocylindricā quadraturam, quam tantorum Geometrarum nomine allecta spes mihi pollicebatur.

PROPOSITIO XI.

Iisdem manentibus (Fig. 13.) in quadrante cyclocylindricæ figuræ $h o c a$ ducta sit quælibet ordinatim applicata $f o$ ad semiaxem longiorem $a h$, parallela axi $a c$ breuiori.

Ostendendum est figuram alterutram $a f o c$, vel $h f o$ esse æqualem rectilineo noto.

Istud patet ex nona; ibi enim ostendimus modum quadrandi istas portiones semicunei primi expansi; sed $h o c a$ quadrans cyclocylindricæ

per demonstrata in superiore est primus semicuneus expansus; ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus circa axem longiorem circumuoluatur quadrans cyclocylindricæ h o c a & describatur conoides cyclocylindricum.

Ostendendum est conoides istud cyclocylindricum esse æquale cylindræ baseos æquantis circulum descriptum diametro breuiore u c, altitudinis quæ ad semidiametrum huius circuli sit ut circulus ad quadratum suæ diametri.

Istud non aliter demonstratur quàm decima nona primi libri; nam ex decima sexta eiusdem libelli librâ u c suspensâ ex a perpendiculari a h, brachio a u æquiponderans quadranti cyclocylindricæ expanso h o c a integro pars est octaua circuli diametro u c descripti; ergo octuplum illius est circulus diametro u c descriptus, quod pro isto casu demonstrandum erat, ut cætera decimæ nonæ libri primi illi competerent; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam cyclocylindrica expansa componitur ex duplici parte superiore cycloideos paruæ, hæc & plura alia ampliùs constabunt ex proximè sequenti libro, ubi octo Anonymi problemata applicantur cycloidi paruæ, ac proinde etiam cyclocylindricæ expansæ. Paucula tamen adhuc quæ sequuntur addere lubet.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem manentibus (Fig. 13.) rectæ a u, h a bifariam secantur in C, r, & compleantur parallelogramma h r q A, h a C A: centro r per q intelligatur descriptus circulus qui sit genitor partis superioris q t h r cycloideos paruæ; sitque etiam genitor partis superioris q i u C cycloideos paruæ: figuræ q t h r respondeat h x q A subcontrariè posita. In recta h r sumptum sit quoduis punctum f, & per id ducta f o ordinatim applicata ad basim h a occurrens curuis q t h, q x h & rectæ q A in punctis t, x, y.

Ostendendum est tres rectas a c vel a d, f o, f x esse proportionales.

Quoniam semicunei primi q x h A, h t q r sunt subcontrariè positi, & duæ rectæ h f, f r æquant peripheriæ circularis quadrantem d e n, repræsentantque arcus d e, e n qui sibi sunt ad quadrantem d e n mutuò complementa; ergo cum per propositionem tertiam rectæ t f, x y repræsentent sinus arcuum d e, e n complementum simul quadrantem d e n, duo autem isti sinus possint simul quadratum g d vel q r, patet duo quadrata

$f t$, $y x$ esse simul æqualia quadrato $q r$, & rectam $y x$ repræsentare sinum complementi arcus $d e$. Cum igitur per propositionem quartam sinus versus arcus $d e$ sit sinus totus $d g$ vel $y f$ imminutus sinu $x y$ complementi, patet rectam $f x$ esse æqualem sinui verso $d z$. Tribus igitur rectis $d z$, $d e$, $d a$ æquales sunt tres, $f x$, $f o$, $a c$ vel $d a$: atqui ex corollario octauæ sexti Euclidis tres $d z$, $d e$, $d a$ sunt proportionales; igitur tres $f x$, $f o$, $a c$ vel $d a$ sunt proportionales, quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Quod si punctum e cadat inter n & a tunc sinus versus componetur ex rectâ $q r$ & ex rectâ $f t$, vt ex eadem quarta liquet. Vnde præterea constet duas simul figuras $h x q r$, $r q i u a$ continentes sinus versos qui toti semicirculo $d n a$ respondent, esse æquales parallelogrammo $h A C a$. Similis est ratio si sumantur duo simul arcus vtrinque æquales, & ad centrum g eodem respectu positi, ambo enim æquant parallelogrammum altitudinis $q r$, baseos æquantis eam rectæ $a h$ portionem cui duo illi arcus sunt simul æquales.

COROLLARIUM II.

Quoniam tres figuræ quarum prima est parallelogrammum $a c D h$, secunda est quadrans $h o c a$ cyclocylindricæ figuræ, tertia est $h x q i u a$ cuius dimerientes æquant sinus versos iam dictos, habent dimerientes $l f$, $f o$, $f x$ proportionales, apertum est ad positionem rectæ $a c$, cylindri, circumuolutione parallelogrammi $a c D h$ circa rectam $a h$ manentem geniti sectionem parallelam plano $s a c$, esse ad sectionem conoideos geniti circumuolutione figuræ $h o c a$ circa eandem $a h$ manentem, vt est figura plana parallelogramma $a c D h$ ad figuram sinuum versorum $h x q i u a$: ita enim vocetur.

PROPOSITIO XIV.

Idem manentibus cylindrus supra descriptus respondens toti parallelogrammo $a c D h$ est ad conoides genitum ex quadrante cyclocylindricæ respondens toti rectæ $a h$, vt binarius ad vnitatem. Quod si ad positionem plani $s a c$ sumantur quæuis duæ portiones cylindri & conoideos inter eadem plana condita & inæqualiter à puncto r remota interceptæ, conoideos portio ad portionem cylindri habebit porportionem certo quodam modo notam.

Quoniam enim parallelogrammum $a c D h$, quadrans $h o c a$ cyclocylindricæ figuræ, & figura constans sinibus versis habent parallelas rectæ $a c$ continuè proportionales, vt ex superiore liquet, dicylindraceum genitum ex quadrante $h o c a$ in seipsum ducto ad positionem plani $s a c$, erit ad positionem plani $s a c$ æquale cylindræo altitudinis $a c$, cuius basis sit figura constans sinibus versis, vt ex vndecima quarti tetragonismicorum liquet. Igitur cum dicylindræum genitum ex parallelogrammo $a c D h$ in se ducto, & cylindræum altitudinis $a c$, cuius basis sit figura $h x q i u a$ ex si-

a ex si-

a ex sinibus versis constans habeant eandem altitudinem a c, erunt ad positionem rectæ a c vt bases; ergo dicylindraceum ex parallelogrammo a c D h in se ducto ad dicylindraceum ex quadrante h o c a in se ducto ad positionem plani s a c, est ad positionem rectæ a c condita ratione vt parallelogrammum a c D h ad figuram h x q i u a ex sinibus versis: ergo vt ex decima nona primi libri constat ita quoque est cylindrus ad conoides.

Igitur cum ex corollario primo superioris, basis ex sinibus versis respondens toti h D c a sit æqualis parallelogrammo A C a h. quod est dimidio parallelogrammi a c D h æquale, patet cylindrum genitum ex parallelogrammo a c D h integro ad conoides genitum ex quadrante cyclocylindricæ h o c a integro esse vt binarium ad vnitatem, quod erat vnum ex propositis. Simili verò ratione ostenditur si vltra punctum r sumantur vtrunque f r, r m æquales, portionem cylindri respondentem rectæ d m inter plana ad planum s a c parallela esse ad conoidis portionem inter eadem plana iacentem, vt est binarius ad vnitatem.

Quod si vltra r ad partes h sumpta sit portio quæuis cylindri respondens rectæ r f, cum sinus versi positi inter r & h sint æquales rectæ q r imminutæ dimetiente semicunei expansi h x q A, & quadratura figuræ h x q A obtineatur ex nona propositione, apertum est figuram h x q r ex sinibus versis constantem vnà cum figura h x q A notâ esse æqualem dimidio parallelogrammi altitudinis a c, baseos r h: ergo dicylindraceum genitum ex parallelogrammo p r f l in se ducto ad positionem plani s a c, ad portionem dicylindraceuti similiter geniti ex cyclocylindricæ quadrante h o c a in se ducto se habet vt parallelogrammum p r f l ad parallelogrammum y q r f imminutum figura q x y nota: sed ita etiam se habet portio cylindri ad portionem conoideos, vt ex supra monstratis liquet: igitur portio conoideos ad portionem cylindri est in isto casu vt parallelogrammum y q r f imminutum noto spatio ad parallelogrammum r p l f duplum ipsius y q r f. Hinc verò apertum est si ad partes a sumatur quæuis recta r m, vt est parallelogrammum q r a C altitudinis q r auctum portione semicunei primi q i u C expansi ad parallelogrammum F p r m altitudinis a c duplæ ipsius q r, baseos eiusdem r m, ita esse portionem conoideos cyclocylindrici ad portionem cylindri, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam tres rectæ x f, f o, f l sunt proportionales, & figura h x q r est parallelogrammum A q r h imminutum rectilineo noto æquante figuram A q x h, patet ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum axe libræ planæ r h sustentaculo u G, quod latus est parallelogrammi h a u G, dimidium condita ratione sumptum figuræ h x q r imminutæ figura nota A q x h aptatum sustentaculo iam dicto æquiponderare condita ratione ad rectæ a c positionem, figuræ h o E r vt iacet manenti; reliquæ au-

E

tem figuræ $E r a c$ æquiponderare dimidium parallelogrammi altitudinis $q r$ aucti portione nota semicunei primi expansi $q i u C$.

S C H O L I V M.

Doctissimus D. de Fermat methodo subtilitatis prorsus mirabilis istam proportionem in quacunque primi nominis cyclocylindrica mihi demonstravit; quam quidem methodum suis in operibus, quæ tota Europa enixè expetuntur, edet, vii spes est, Amicorum omnium precibus tandem victus.

P R O P O S I T I O X V.

Iisdem manentibus (Fig. 14.) compleatur quadratum $d a u H$ & in $e o$ ponatur $H u$ axis parabolæ $H m a$ cuius vertex H , ordinatim applicata $u a$: In circuli $d e a$ diametro $d a$ sumptum sit quoduis punctum z & per illud ducta $e z$ ordinatim applicata occurrens rectæ $u H$ in P , parabolæ in puncto m .

Ostendendum est rectam $P m$ esse æqualem rectæ $e t$ dimetienti cyclocylindricæ nondum expansæ: ac promde cyclocylindricæ quadrante nondum expansum esse parabolam $H m a$ u translata in peripheriam $d e a$, illique insistentem ad positionem rectæ $a s$.

Quoniam enim ordinatim applicata $u a$ æqualis est axi $H u$, latus rectum parabolæ erit æquale rectæ $H u$ vel $d a$; ergo rectangulum $u H P$ est æquale quadrato $P m$: sed rectangulum $a d z$ est æquale per corollarium octauæ sexti libri Euclidis quadrato rectæ $d e$ vel $e t$: ergo cum rectangula $a d z$, $u H P$ sint æqualia, erunt quoque $P m$, $e t$ æquales: igitur cyclocylindricæ quadrans nondum expansus est parabola $H m a$ u translata in peripheriam $d e a$ ad positionem rectæ $u a$, illique insistentem ad positionem rectæ $f a$, quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I V M.

Hinc licet inferre cyclocylindricæ figuræ quadrantem hoc a nihil aliud esse quàm parabolam expansam, quæ ante quam expanderetur erat $H m a u$, & ad positionem rectæ $a s$ super limbo semicirculi $d e a$ insisteat. In hac verò extensione istud seruatur vt arcus $d e a$ conuertatur in rectam sibi æqualem, & singulæ illius arcûs portiones extensæ in rectas æquales retineant illas ipsas ordinatim applicatas quæ ipsis competebant ante extensionem. Simili prorsus pacto expansus cuneus primus $h q a$ est semicirculus $d n a$ expansus ita vt curua $a n d$ conuertatur in rectam $a h$ sibi æqualem, & ordinatim applicata $f a$ ad $a b$ basim expansi semicunei $h a q a$ sit æqualis ordinatim applicatæ $z e$ ad diametrum $d a$ semicirculi $d n a$, rectâ $h f$ æquante arcum $d e$. Itaque figura $h q a$ est semicirculus $d e a$ expansus quatenus curuatura $d e a$ intelligitur in rectam $a h$ expandi retentis ordinatim applicatis iisdem parallelis rectæ $g n$. Est autem cuneus primus expansus quatenus superficies cylindrica cunei primi noti insistentem ad positionem rectæ $a s$ super peripheria $d n a$ intelligitur

expandi in rectas parallelas rectæ ah quarum singulæ sunt æquales peripheriæ ad cuneum attinenti circulorum parallelorum basi cylindri. Denique si in plano sa g recto ad planum dac , intelligatur triangulum rectangulum gas ; in semicylindro cuius basis deg , planum fgn auferet semicuneum primum interceptum planis nga , fgn , fga . Superficies autem cylindrica ipsius semicunei erit triangulum gas ad positionem sac translatum in curuam an , & illi insistent ad positionem rectæ as . Pari de causa superficies semicunei eadem est quadrans circularis insistent super semidiametro gn translatus in ipsam superficiem ad positionem plani sa g . Porro dum triangulum vel aliud quid translatum dicimus, nolumus intelligi post translationem manere æquale sibi ipsi ante translationem sumpto; id enim apertè falsum est: sed solum quocunque plano ad planum sac parallelo secetur triangulum fga & cunei superficies illa, sectionem trianguli & superficiem esse inter se æquales. Quæ autem de cuneo primo scripsimus possunt, ut patet, proportionem quadam applicari cuneo secundo, quod ut patet ex corollario secundo decimæ tertiæ & ex ipsa decima tertia expandetur in figuram sinuum versorum ibidem definitam & demonstratam.

PROPOSITIO XVI.

Reuocato (*Fig. 15.*) schemate decimæ tertiæ sit $hoca$ parvæ semicycloideos pars superior, genita quadrante circulari dbc a : sit $hqui$ a figura ex sinibus versis: sit dpc limbus parabolæ cuius axis ac , ordinatim applicata ad : ducta sit bm quælibet ordinatim applicata ad circuli semidiametrum ca occurrens limbo parabolico in p : per b ducta sit bo æquidistans rectæ ad , & occurrens limbo $hoci$ in o ; per o acta sit of parallela rectæ ac occurrens lineis ha , hu in f , x .

Ostendendum est rectas mp , fx esse æquales, ac proinde quopactò figura dbc expanditur in figuram $hoca$, eodem expandi figuram dpc in figuram ex sinibus versis $hqui$ a.

Quoniam enim per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ ua , mb , mp sunt proportionales; tres autem ua , fo , fx sunt proportionales per decimam tertiam, patet rectas fx , mp esse æquales, ac proinde verum id esse quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM

Sicuti quadrans circularis dbc expanditur in parvam semicycloidem superiorem $hoca$, ita parabola dpc a in figuram ex sinibus versis $uqha$: unde fit ut sicuti tres ac , mb , mp ante expansionem sunt proportionales, ita post expansionem tres ac , fo , fx maneant proportionales; potest itaque figura $uxha$ appellari etiam parabola expansa, in sensu videlicet iam exposito.

DE CYCLOIDE

PROPOSITIO XVII.

Iisdem manentibus compleatur quadratum $c a d e$, & ducatur eius diameter $d c$: completo parallelogrammo $u a h l$, intelligatur parua semicycloides superior $a y l h$ subcontrariè respondens superiori semicycloidi $h o c a$. Recta $f x$ occurrat limbo $a y l$ in y , & recta $u l$ in z .

Ostendendum est tres rectas $u a$ vel $z f$, $f y$, $z x$ esse proportionales, figuramque $a y l h$ esse triangulum $c d e$ expansum sicuti in superioris corolario ostendimus $u i x h a$ esse parabolam $d p c a$ expansam.

Recta $o b$ producta occurrat recta $a c$ in n , & rectam b rectis $c d$, $c e$ in r & g . Igitur per secundam huius libri recta $b n$, $f y$ sunt æquales: sed latera $b n$, $g c$ parallelogrammi $g b n c$, sunt æqualia: igitur recta $f y$, $g c$ sunt æquales: sed in triangulo $c d e$ rectangulo cuius duo latera $c e$, $d e$ sunt æqualia, applicata $r g$ æqualis est lateri $c g$: ergo recta $r g$, $f y$ sunt æquales. Igitur $a y l h$ est triangulum $c d e$ expansum iuxta explicationem suprà traditam.

Rursus quoniam recta $z f$ æquat rectam $m g$, & recta $f x$ rectam $m p$ per superiorem, residua $z x$ æquabit reduam $p g$: tres igitur recta $z f$, $f y$, $z x$ æquant tres rectas $m g$, $g r$, $g p$ singula singulas: ergo cum per duodecimam tertij tetragonismicorum tres recta $m g$, $g r$, $g p$ sint proportionales, erunt quoque & tres $z f$, $f y$, $z x$. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Novem, quæ sequuntur, propositiones adiecimus ineunte hoc mense Februario anni labentis 1659. Postea quàm quatuor hos de cycloide libros Regius Magistratus nostro rogatu censuit obsignandos, quod eiusdem autoritate & manu factum deinde est, ut certò omnibus constaret nos eo ipso tempore quo calculum sexdecim casuum edidimus, habuisse exaratos eos libros quorum in eo calculo mentionem facimus. Has porro propositiones non putamus fore Lectori iniucundas, cum cyclocylindrica tractatum mirificè amplificent.

PROPOSITIO XVIII.

Parabolam $f a g$ tangat (*Fig. 16.*) recta ad in a , eiusque axis sit $a e$: illius quemlibet arcum $h n$ subtendat recta $h n$ non parallela recta $a d$, quæ bifariam secta sit in i , & per i ducta sit $i l$ parallela recta $a e$ occurrens arcui $h n$ in l : ex $d e$ abscissa sit $a s$ æqualis recta $i l$, & per s ducta sint vtrunque ordinatim applicata $f g$, $f f$ ad axem $a e$, per f , g , h , n ducta sint $f r$, $g m$, $h c$, $n d$ parallelæ axi $a e$ & occurrentes tangenti in r , m , c , d . Parabola $f a g$ latus rectum $a C$ respondeat axi $a e$.

Ostendendum est rectas $r m$, $c d$ esse æquales, & si describantur semicirculi $r B m$, $c t d$ ex centris a , x , sumptisque $a y$, $x z$ æqualibus agantur $y q$, $z p$ æquidistantes axi $a e$, & occurrentes in A , u , q , b , o , p lineis $B m$, $a g$, $g s$, $t d$, $l o n$, $h i n$, rectas $q u$, $o p$ esse æquales: & tres rectas $C a$, $A y$, $q u$, vel $C a$, $z b$, $o p$ esse proportionales.

Rectas $f g$, $c d$ esse æquales patet ex methodo propositionis 267. & 266. Gregorij à S. Vincentio de Parabola. Præterea quoniam rectangulo $C a s$ æquale est quadratum ordinatim applicatæ $f g$ vel $a m$, vel $a B$, tres rectæ $C a$, $a B$, $a s$, vel tres $C a$, $t x$, $i l$ erunt continuè proportionales: ergo per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ $C a$, $y A$, $q u$, vel tres $C a$, $z b$, $p o$ erunt proportionales: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si recta $a s$ non esset axis, sed quævis alia diameter, $r B m$, $c t d$ non forent semicirculi, sed semiellipses quarum semidiametri coniugatæ $r a$, $a B$, vel $c x$, $x t$ forent inter se æquales: Cætera verò perinde demonstrarentur, vt patet. Cæterum præsentem propositionem cum haberemus in nostris manuscriptis nondum editis aliter demonstratam, & pendentem ex nonnullis aliis, libuit illam breuitatis studio monstrare adhibita methodo Gregorij à S. Vincentio.

PROPOSITIO XIX.

Intelligatur (Fig. 17.) semicirculus $f e g$ diametro $f g$, centro s descriptus circa manentem $f g$ volui & describere sphæricam superficiem, cuius centrum erit s , diameter $f g$. Ad diametrum $f g$ semicirculi $f e g$ excitetur perpendicularis se ex centro s ad peripheriameducta, sitque $e a$ dupla rectæ $f e$: ponatur $f a g$ parabola cuius axis $a s$, basis $f g$. Ex rectâ $f g$ vtrinque productâ in infinitum abscindatur quælibet recta $d p$, quæ vel tota sit inter puncta f , g vel saltem aliqua ipsius pars; & y eius bisectio non congruat puncto s . Per d , p ducantur $d c$, $p b$ parallelæ axi $f a$ occurrentes limbo parabolico in c , & b : iungatur recta $c b$ occurrens rectæ $f g$ in r : rectangulo contento sub rectis $f e$, $d c$ fiat æquale rectangulum contentum sub rectis $d r$, $r q$: describatur parabola $r t u$ cuius axis $r d$, latus rectum $r q$. Intelligatur cylindrus cuius basis sit circulus centro y , semidiametro $y p$ vel $y h$ descriptus, axis verò sit $y x$: parabola $u t r d$ intelligatur circa axem manentem $d r$ volui, quousque planum $u d r$ stet rectum ad basim cylindri; ad positionem plani $x y h$ intelligatur parabola $u t r d$, veleius portio $u t p d$ transferri in superficiem cylindricam iuxta methodum traditam in decima quinta propositione.

E 3

Ostendendum est parabolam ita translata esse portionem superficiei cylindricæ inclusam hemisphærio quod supra basim cylindri abscindit circulus centri s semidiametri se : ac proinde duplum illius parabolæ ita translatae esse totam portionem superficiei : cylindricæ comprehensæ intra sphæram centro s, semidiametro ss descriptam.

Recta cd producta occurrat peripheriæ fe g in z : ergo per tertiam tertij tetragonismicorum erunt tres rectæ se, z d, dc proportionales, & rectangulo es, dc erit æquale quadratum ordinatim applicatæ dz ad fg diametrum semicirculi f z g generantis sphæricam superficiem; idemq; ostenditur in quacunque alia ordinatim applicata pn. Cum ergo rectangulo contento sub rectis es, dc æquale sit rectangulum dr q siue quadratum du, erunt du, dz æquales : simili prorsus pacto ostendentur pt, pn æquales. Igitur rectæ pt, du non transferentur, sed manentes in plano urd erecto ad basim cylindri occurrent in t & u superficiei cylindricæ & sphæricæ simul.

Rursus in recta dp sumatur quodcunque aliud punctum y, & per illud ducta sit yh ordinatim applicata ad dp diametrum circuli dhp, quæ occurrat peripheriæ fe g in m, rectæ cr in i, curvis utr, fag in o & l. Igitur per superiorem rectangulo contento sub rectis se, il æquale est quadratum yh : Præterea rectangulo contento sub rectis se, yi æquale esse quadratum yo patet, quia quadratum du ad quadratum yo est vt recta dr ad yr, cum sint æqualia rectangulis dr q, yr q : sed rectangulum altitudinis es baseos dc est ad rectangulum eiusdem altitudinis, baseos yi vt recta dc ad yi, hoc est in triangulo cdr vt recta dr ad yr; ergo vt quadratum du ad yo, ita est rectangulum altitudinis se baseos dc, ad rectangulum eiusdem altitudinis, baseos yi : ergo cum illud rectangulum sit æquale quadrato du, rectangulum altitudinis se, baseos yi erit æquale quadrato yo. Duo igitur quadrata yo, yh æquant duo rectangula altitudinis se, basium il, iy, vel æquant rectangulum altitudinis se, baseos yl : sed rectangulo isti æquale est per tertiam tertij tetragonismicorum quadratum ym; ergo quadrato ym æqualia sunt duo simul quadrata yh, yo : ergo cum manente cdr plano recto ad basim cylindri, rectæ oy, yh constituent angulum rectum, & perpendicularis oy transferatur ex puncto y in punctum h; circulus intervallo rectæ my descriptus, motu semicirculi describentis peripheriam sphæricam, transibit per punctum o translatus : ac proinde punctum o translatus erit in peripheriâ cylindri & simul in peripheriâ sphæricâ, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Parabolam cuius vertex congruat termino diametri circularis, & quæ ex superioris methodo sit translata, quadrare & expandere.

Reuocetur schema decimæ quintæ, (Fig. 14.) & in eo datus sit semicirculus $d e a$ centro g , semidiametro $g n$ vel $g d$ descriptus, quem tangat recta $d H$ siue sit æqualis rectæ $d a$, siue inæqualis, & completo parallelogrammo $H d a$ intelligatur in eo parabola $H m a$ cuius axis $H u$, ordinatim applicata $u a$. Ponatur curvæ $a e d$ æqualis recta $a h$, & describatur cuneus expansus $h o c a$ respondens quadranti circuli $a d b c$ centro a descripti; ex $a c$ auferatur $a M$ æqualis rectæ $a u$ & describatur cuneus proportionalis expansus cuius dimetiens $f N$ ad $f o$ sit vt recta $a M$ ad $a c$, vel vt recta $H d$ ad $d a$. Dico figuram $h N M a$ esse æqualem parabolæ translata in peripheriam $d e a$, & esse ad quadratum $a c$ vel $a d$, vt est recta $d H$ ad $d a$. Quod si non sumatur tota, sed eius pars $f N M a$, aio illam esse ad partem $f a c$ o vt est recta $d H$ ad $d a$; partis verò $f a c$ o quadratura absoluta constat per nonam & vndecimam.

Si $H d$, $d a$ sint æquales, ex decima quinta propositione parabola translata expanditur in figuram $h o c a$; si autem $H d$, $d a$ sint inæquales, patet figurarum $h N M a$, $h o c a$ dimetientes parallelas rectas $a c$ esse inter se vt rectas $H d$, $d a$, vel vt rectas $a M$, $a c$: ac proinde ex sexta primi tetragonismicorum figuram $h N M a$ esse condita ratione ad figuram $h o c a$, vt est recta $a M$ ad $a c$.

Vt autem portionem $f o i c a$ respondentem portioni parabolæ translata in arcum $a n e$ inueniamus, hac methodo vtemur. Completo semicirculo $d b c x l$, ex $a c$ auferatur recta $a r$ æqualis rectæ $d e$; per r agatur recta $r x$ parallela rectæ $a h$ occurrens peripheriæ $l x c$ in x , & limbo $h i c$ in o ; per x agatur $x p$ complens parallelogrammum $a r x p$; compleatur quoque parallelogrammum $a r o f$. Ex methodo nonæ patet figuræ $f o i c a$ æquale esse rectangulum $l a p$, ex prima verò eiusque corollario liquet rectas $f o$, $d e$ esse æquales, & arcui $a n e$ rectam $a f$ esse æqualem. Habemus igitur portionem parabolæ translata insistentem arcui $a n e$ esse æqualem rectangulo $l a p$; portionem verò reliquam insistentem arcui $d e$ esse æqualem rectangulo $a l p$. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quando recta $g d$ bifariam secatur in z , cum tres rectæ $z d$, $d e$, $d a$ sint proportionales, patet rectam $d e$ vel $a r$ esse æqualem rectæ $d g$, ac proinde esse dimidium rectæ $a c$ vel $a d$. Ergo in isto casu recta $a p$ ad $a l$ est potestate vt ternarius ad quaternarium; portio verò parabolæ $H m a$ u translata in arcum $d e$, si $H d$, $d a$ sint æquales æquat rectangulum $a l p$; si verò sint inæquales, se habet ad rectangulum $a l p$, vt recta $H d$ ad $d a$. Atque ex calculo huius casus manifesta est methodus calculi reliquorum omnium.

PROPOSITIO XXI.

SI (Fig. 18.) vt in decima nona $f e g$ semicirculus cuius motu circa diametrum manentem $f g$ generetur spherica superficies

habens centrum s , diametrum fg , & c. proinde circulum maiorem fe g qui diuidat sphaeram in duo hemisphaeria, superius ad partes puncti x quod extat plano fe g , & inferius oppositum. In diametro fg sumatur recta gd minor recta gf , bifariamque secetur in y ; centro y per d , g describatur circulus d h g i qui fiat basis cylindri cuius axis yx sit perpendicularis ad planum circuli (de isto enim cylindro loquimur quoties aliud non indicamus, ut monuimus initio praesentis libri.) Per d ducta sit d z ordinatim applicata ad fg diametrum semicirculi fe g .

Ostendendum est portionem superficiei cylindricae inclusam superficie illa sphaerica esse aequalem quadruplo rectanguli gd z .

Describatur ut in decima nona parabola gu d , & parabola fa p , cuius limbo recta z d occurrat in c : ergo ut ibi ostendimus du ordinatim applicata parabolae up d transferendae erit aequalis rectae d z : igitur per superiorem parabola translata siue portio cylindricae superficiei arcui d h g insistentis & comprehensa hemisphaerio superiore est ad quadratum d g sicut recta d g vel p d ad rectam du vel d z : ergo aequat rectangulum gd z : ergo duae portiones insistentes arcibus d h g , d i p aquant bis rectangulum gd z : ergo cum totidem insistant iisdem arcibus ad partes hemisphaerij inferioris: quater rectangulum p d z erit aequale superficiei cylindricae inclusae superficiei sphaericae, quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M

Ex superioris demonstratione nota fit quadratura cuiuslibet portionis ex ista superficie cylindrica intra sphaeram contenta abscissae per planum hy x , vel per aliud quodcunque illi parallelum. Porro ex definitionibus initio libri praesentis praefixis patet istam portionem cylindricam sphaeram conclusam, quando punctum y congruit puncto s , esse cyclocylindricam primariam; quando autem non congruit, cyclocylindricam secundi nominis. Vnde insuper liquet praesentem propositionem esse longe amplio-rem decimam, ibi enim quadratura solius cyclocylindricae primariae tradita est, hic & illius primariae primi nominis, & primariae etiam secundi nominis, quoties recta gd minor est recta gf : nam si fuerit non minor, cylindrica superficies non secat sphaeram. Pes porro circini qui figitur intelligi debet collocatus in puncto s , ut describatur cyclocylindrica primaria primi & secundi nominis definita initio libri, & congruens portioni cylindricae clausae intra sphaeram semidiametri sp . Ista autem quadratura ita ample sumpta non dubito quin nouitate sua plurimos teneat suspensos, & quin comparantes quadraturam circuli una cum quadratura istius quasi-circuli dubitaturi primo aspectu sint vtra difficilior existat: vtraque enim figura est portio superficiei cuiusdam intra sphaeram inclusa; circulus quidem superficiei planae, altera vero superficiei cylindricae & minus

LIBER SECVNDVS.

41

minùs tractabilis. Cæterùm licet postquam res est monstrata, non videatur multò difficilior quadratura cyclocylindricæ primariæ secundi nominis, quàm primi; fuit tamen mihi longè abstrusior, quousque ad hanc methodum omnia oculis lustrando perductus fui. Neque vnquam mihi proposita ab vllò fuit alia cyclocylindrica præter eam qua pes circini collocatur in ipsa superficie cylindrica, non autem extra illam, vt fit in cyclocylindricis secundi nominis.

PROPOSITIO XXII.

Iisdem manentibus cylindrus genitus circumductu rectanguli cuius latus circumactum æquet rectam se, est ad solidum genitum ex cyclocylindricæ, de qua superior propositio agit, circumuolutione circa basim suam, vt est recta se ad dimidium rectæ d c.

Ista propositio demonstratur eadem prorsus methodo, qua vsi sumus in demonstranda decima quarta superiore. Quando enim punctum d puncto s congruit, & recta d c congruit rectæ s a, fit casus illius decimæ quartæ; ac proinde cylindrus est duplus solidi, quia parallelogrammum quo circumactò gignitur cylindrus est duplum spatij æquantis figuram sinuum versorum, in quam expanditur triangulum c g d, vt in corollario decimæ quintæ monuimus. Atque in aliis casibus pro figura ex sinibus versis vsurpatur alia illi proportionalis cuius dimetientes quæ ad rectam s a parallelæ sint, se habent ad dimetientes figuræ sinuum versorum, sicut se habet recta c d ad d g, vel sicut quadratum d z ad d g. Ergo (sicuti in vigesimæ propositionis pari causa ostendimus) proportionalis ista figura ad figuram ex sinibus versis constantem se habet ad positionem rectæ a s, vt recta c d ad d g: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si non sumatur totus cylindrus sed pars eius cum parte solidi intra easdem ad rectam s a parallelas positi, eorum proportio inuenietur adhibita methodo corollarij illius decimæ quartæ. Quando autem totus sumitur, si d g sit quadrans rectæ g f, cylindrus ad solidum est vt octonarius ad ternarium: si verò d g sit dodrans eiusdem g f, cylindrus ad solidum est vt octonarius ad ternarium, & ita de aliis. Hinc verò patet propositionem istam patère latiùs decimâ quartâ.

PROPOSITIO XXIII.

IN quibuscunque (Fig. 19.) cyclocylindricis secundariis tam primi quàm secundi nominis inuenire proportionem cylindri & solidi de quibus agitur in pari causâ superioris propositionis pro cyclocylindricis primariis vtriusque nominis.

Maneat vt in decima nona f e g semicirculus genitor spheræ circa axem f g, & parabola f c g, cuius axis s a æquet rectam f s, vel s e: d p sit diameter circuli d h p, qui fiat basis cylindri, cuius axis y x perpendicularis.

F

ris ad planum baseos. Per e ducatur $e t$ parallela rectæ $f g$, & completis parallelogrammis $f e t p$, $d n t p$; ponatur $t i$ recta æqualis peripheriæ $p h d$, & super $t i$ intelligatur constructa figura $i l m t$ proportionalis sinuum versorum, cuius dimetiens ad dimentientem figuræ sinuum versorum sit ut recta $c d$ ad $d r$. Per p agatur $p u$ complens parallelogrammum $b c u p$; recta $c u$ producta occurrat limbo $i l m t$ in m . Quando punctum g cadit inter d & r , ut in primo schemate, addatur rectæ $m n$ recta $n q$ æqualis rectæ $c u$ vel $b p$; quando autem r cadit inter d & p dematur rectæ $m n$ recta $n q$; per q agatur $q o$ parallela rectæ $e t$ vel $f g$. Dico portionem figuræ proportionalis $i l m t$ insistentem rectæ $q o$ ad partes l , habere proprietatem quæ demonstratur in decimâ tertiâ, hoc est esse tertium gradum quorum primus ad positionem rectæ $f e$ sit lateris $f e$ parallelogrammum quo circumactio generatur cylindrus, secundus sit figura cyclocylindrica insistens rectæ $t i$, cuius circumductu generatur solidum quod cylindro comparatur: eorum verò graduum dimetientes sint ad positionem rectæ $f e$ proportionales. Igitur per demonstrata in corollario secundo decimæ tertiæ propositionis, & per methodum decimæ quartæ, cylindri quælibet portio intercepta planis ad basim ipsius parallelis est ad solidum iisdem planis contentum, ut parallelogrammi portio iacens inter eadem plana parallela se habet ad portionem figuræ super recta $q o$ consistentis, cuius dimetiens est $q m$. Reliqua patent ex suprâ monstratis: ergo &c. quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIV.

IN secunda figura superioris propositionis punctum d , congruat puncto s (*Fig. 20.*) & ducta $b z$ ordinatim applicatâ ad axem $a s$ parabolæ $f a g$, sint $a s$, $s z$ æquales.

Ostendendum est cylindrum de quo agitur in superiore propositione, nempe cuius basis sit circulus diametri $a e$ ad totum solidum genitum circumductu figuræ totius cyclocylindricæ secundariæ esse in præsentī casu, ut est circulus ad quadratum quod potest latus quadrati circulo inscripti ad ipsum circulum.

Quoniam recta $a z$ ad $a s$ est ut binarius ad unitatem; erit $f g$ ad $z b$ potestate ut est unitas ad binarium: rectæ autem $r p$, $r s$ erunt inter se æquales, ac proinde recta $s p$ ad $s r$ erit potestate ut quaternarius ad unitatem, sed eadem $s p$ vel $z b$ ad $f g$ est potestate ut quaternarius ad binarium, ergo recta $f g$ ad $s r$ est potestate ut binarius ad unitatem: ergo recta $e q$ æquat rectam $p b$ vel $d a$. Rursus quoniam figuræ proportionalis sinuum axis $i l$ ad $s p$ est sicut recta $a s$ ad $s r$, recta $i x$ dimidium rectæ $i l$ erit æqualis rectæ $f a$: sed eidem est æqualis recta $e q$: ergo recta $o q$ producti convenit in punctum x . Igitur ex generatione figuræ sinuum versorum proportionalis, recta $x q o$ aufert ex ipsâ proportionali

figuram xlm o quę ad quadratum semidiametri r p vel r s est vt recta la ad sr , vel vt diameter quadrati ad latus; ergo figura xlm o æqualis est rectangulo rfa .

Rurſus quoniam rectangulum sub sr semidiametro circuli dhp , & sub ti recta æquante arcum shp est æquale circulo diametri sp , vt ex tertia primi liquet, recta verò it bifariam secatur in u vt ex generatione figurę sinuum verſorum patet, rectangulum contentum sub semidiametro sr vel sy & sub recta iu erit æquale semicirculo diametri dp : ergo rectangulum iuA contentum sub sa vel uA & sub iu erit ad semicirculum dhp vt recta as ad sr , vel vt rectangulum asr ad quadratum sr . Quoniam igitur vt rectangulum asr ad quadratum sr , ita est rectangulum iuA ad semicirculum shp , erit alternando vt rectangulum asr ad rectangulum iuA , ita quadratum sr ad semicirculum: sed rectangulum asr est æquale figurę $xqoml$: ergo figura $xqoml$ ad rectangulum iuA , hoc est solidum ad cylindrum est vt quadratum sr ad semicirculum, vel vt quadratum quod potest latus quadrati circulo inſcripti ad ipſum circulum, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

Tres rectas sr , fg , sp eſſe proportionales quamcunque porportionem habeat recta as ad az , & ſiue z cadat intra puncta a , s , ſiue extra, patet ex demonſtrandi methodo: nam vt recta as ad az , ita eſt poteſtate ordinatim applicata fg ad zb : ſed vt a s ad a z , ita eſt sr ad zb , vel ad sp : ergo vt sr recta ad sp , ita eſt poteſtate fg ad eandem sp æqualem rectę zb : igitur tres rectę sr , fg , sp ſunt proportionales.

COROLLARIUM II.

Ex methodo præſentis caſus poterit facili negotio fieri progreſſus ad quoscuque alios, quamuis puncta d , & s diſcrepent: ac proinde iſti methodo ſatis ſit vnus iſte calculus. Ex demonſtratis autem circa cyclocylindricam manifeſtum eſt facilius eſſe quadrare ſolidum genitum ex quacunque cuiuſcunque nominis cyclocylindrica, quàm illam quadrare: ſolidi enim quadraturâ datâ circuli quadraturâ demonſtrauiſus pro omni caſu cuiuſlibet nominis cyclocylindricę: cùm tamen quadraturam cyclocylindricarum vtriuſque nominis primariarum tantummodo dederimus, prætermiſſa quadraturâ ſecundariarum. Hoc tamen habemus quadraturam cyclocylindricarum datam non pendere à quadratura circuli; cùm illa ſolidorum inde pendeat.

PROPOSITIO XXV.

Reuocato ſchemate (*Fig. 17.*) propoſitionis decimę nonę, circulus ſphærę genitor motu circa axem fg eſto feg , & baſis cylindri dhp : ſemidiametri eius dimidium yE ita ſecetur in V vt tres rectę pr , VE , Vy ſint proportionales: ex recta yp abſcindatur $y\lambda$

F 2

dupla rectæ yV , per λ ducantur λD , λH ordinatim applicatæ ad $d p$ diametrum circuli $d h p$, & ad $r \lambda$ axem parabolæ $r t u$.

Ostendendum est parabolam $u t r d$ translata lege præscripta in superficiem cylindricam baseos $d h p$ ita respondere illi figuræ quæ in eadem superficie $d h p$ intelligitur gigni ex rectis à puncto λ eductis ad singula peripheriæ $d h p$ puncta, & postea erectis perpendiculariter ad basim, ut sicut est recta λD ad rectam λH , ita sint singulæ dimetientes parabolæ translatae ad singulas istius figuræ insistentes eidem peripheriæ puncto.

Ex constructione patet trium rectarum proportionalium quarum prima Vy , secunda VE , tertia sit pr , rectam $y \lambda$ continere bis primam; rectam $y p$ vel $y h$ bis primam & bis secundam; ergo $y r$ composita ex $y p$ & ex $p r$ tertiâ continebit bis primam, bis secundam & semel tertiam: ergo ablata $y \lambda$ bis prima, residua $y \lambda$ vel illi æqualis $r B$ contineat necesse est, ut attendenti patet statim, bis secundam semel tertiam: ergo duæ simul $y r$, $r B$ vel tota $y B$ continent bis primam, quater secundam, & bis tertiam. Igitur $y \lambda$ æquat bis primam, $y p$ verò bis primam & bis secundam, $y B$ denique bis primam, quater secundam & semel tertiam; vel si bis prima sumatur pro primo termino, recta $y \lambda$ est primus terminus; recta $y p$ primus & secundus; recta $y B$ primus, secundi duplus, & tertius: ergo ut ex decursu propositionis septimæ libri tertij tetragonismicorum liquet, tres rectæ $y \lambda$, $y p$, $y B$ sunt proportionales.

Quoniam igitur tres rectæ $y \lambda$, $y p$, $y B$ sunt proportionales, & rectæ λB dimidium r occupat vertex parabolæ $r t u$, ex trecentesima prima propositione libri quinti Gregorij à S. Vincentio constat ut est ordinatim applicata λD ad λH , ita rectam à puncto λ eductam & ad quodvis circuli $d h p$ punctum terminatam esse ad parabolæ $r t u$ ordinatim applicatam axi $r i$ per idem peripheriæ punctum ductam, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quando punctum r siue vertex parabolæ $r t u$ congruit puncto p , ex trecentesima propositione libri quinti Gregorij à S. Vincentio, & ex hactenus demonstratis à nobis satis constat proprietatem iam explicatam competere huic casui. Quando autem punctum r caderet inter y & p , eiusmodi proprietas cessare convincitur ex vi demonstratorum. Quoties autem $D \lambda$, λH fuerint æquales, parabola $r u d$ translata erit ut patet, ipsa figura descripta in superficie cylindri baseos $d h p$, cuius dimetientes æquant rectas ex puncto λ eductas ad perimetrum $d h p$.

PROPOSITIO XXVI.

ESto semicirculus $f h d g$ (Fig. 21.) in cuius diametro $f g$ sumpta sint duo puncta a, b æqualiter remota à centro y ; per b, a eductæ sint ordinatim applicatæ $a c, b d$; & per c, d tangentes $c e, d F$;

per centrum yeducta sit ordinatim applicata y h: eductæ etiam sint rectæ a h, b h ex punctis a, b ad h.

Ostendendum est sumpto quouis puncto m in peripheria circuli & eductis rectis a m, b m, duo quadrata a m, b m simul esse æqualia duplo quadrati a h. Et si ex puncto m excitetur m s perpendicularis ad planum circuli æqualis rectæ m b, figuram in superficie cylindri cuius basis sit f c d g comprehensam curuâ f c d g & lineâ descriptâ à punctis s, esse cyclocylindricam secundariam descriptam à circino cuius vnus pes hæreat in puncto a, intervallum autem inter extrema crurum puncta æquet rectam h r cuius quadratum sit duplum quadrati h a.

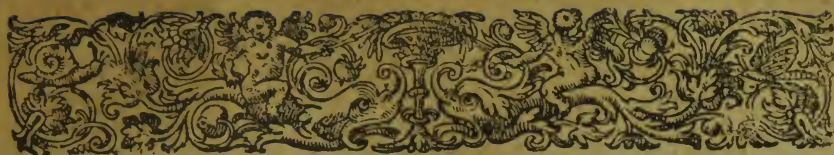
Rectæ a e, b F bifariam secentur in l, t, & describantur parabolæ l c, t d quarum vertices l, t, ordinatim applicatæ a e, b d; ex puncto m demittatur perpendicularis m u ad f h rectam. Patet duas istas parabolæ esse easdem, & habere idem latus rectum; patet quoque ex superiore, rectam m b esse æqualem ordinatim applicatæ ad parabolæ t diametrum t b per punctum u ductæ; similiterque rectam a m æqualem esse ordinatim applicatæ per u punctu a tæ ad axem parabolæ l c. Esto l q latus rectum parabolæ; igitur rectangulum q l u est æquale quadrato ordinatim applicatæ vnus, & rectangulum sub q l & sub t u comprehensum est æquale quadrato ordinatim applicatæ alterius: ergo duo quadrata simul ordinatim applicatarum per u ductarum sunt æqualia rectangulo q l t quocunque cadat punctum u: ergo quando punctum u congruit puncto y, cum a h, b h sint æquales, & duo quadrata a h, b h sint simul æqualia rectangulo q l t, patet duo quadrata ordinatim applicatarum ad parabolæ communem axem, vel duarum rectarum a m, m b vel m s esse æqualia quadrato h r: ergo recta a s est æqualis rectæ h r; ergo punctum s est in superficie sphæræ ex centro a descriptæ, cuius semidiameter æquet rectam h r, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Puncta a & b repræsentantur in schemate præsentis propositionis intra diametri f g terminos f, g: sed eadem est demonstrandi ratio si collocentur extra illos terminos, vt in e & F; ostendit enim Gregorius à S. Vincentio in propositione 303. de parabola, rectas ex punctis e, F eductas ad peripheriæ f h d g quodlibet punctum m esse æquales ordinatim applicatis certæ cuiusdam parabolæ. Hinc verò præterea conficitur præsentis propositionis methodo ampliorem euadere demonstrationem quam Gregorius à S. Vincentio fecit vltimam libri sui tertij. Hinc denique patet istam proprietatem non conuenire solis punctis f, g extremis diametri f g, quod tantum in Elementis Euclidis demonstratur.

Figuram cuius dimetientes m & s æquales sint rectis b & m ex puncto vno b eductis esse æqualem superficiei cylindri scaleni demonstravit Dettonuillæus in epistola data ad D. de Hugguens, vnde factum est vt ex demonstratione perfecta istud nos lucrum perceperimus pro præsentis & superiore propositione, nimirum superficiem cyclocylindricæ secundariæ, cuius dimetientes m & s sunt æquales rectis m & b , esse certa quadam ratione æqualem superficiei cylindri scaleni; ac proinde data huius scalenæ superficiei quadratura, inuentum esse à nobis tetragonismum cyclocylindricarum secundariarum de quibus agunt duæ huius libri postremæ propositiones. Istud verò lucrum cum non contemnendum esse duxerimus, adiciendum quoque putauimus sub finem huius libri.





DE CYCLOIDE

LIBER TERTIVS.

In quo octo problemata ab Anonymo proposita demonstrantur in cycloide parua.

DEFINITIONES.

Intelligatur progressio geometrica cuius primus terminus sit quadratum semidiametri circularis, secundus sit ipse circulus, ac proinde cuius primum spatium sit ad secundum ut est circuli diameter ad rectam æqualem toti peripheriæ ipsius; vel ut est circuli semidiameter ad rectam æqualem semiperipheriæ ipsius; vel ut est semidiameter circuli genitoris ad semibasim cycloideos parua. Ista progressio vocetur *perspecta*, cuius hæc est proprietas ut si intelligatur altera progressio rectarum quæ *adiuncta* dicatur, & cuius primus terminus sit semidiameter circuli genitoris, secundus sit semibasis cycloideos parua, rectangulum sub primo & sub secundo termino huius progressionis sit æquale secundo termino primæ progressionis, itemque rectangulum sub primo & tertio secundæ progressionis sit æquale tertio, & sic de aliis, ita ut rectangulum sub primo & sub quouis alio termino secundæ progressionis æquet terminum primæ numero pari procedentem à primo. Primæ enim progressionis termini sunt ut termini secundæ; sed rectangula quorum altitudo sit primus, bases sint alij termini consequentes se habent ut bases; ergo se habent ut termini primæ; ergo cum rectangulum sub primo & sub ipso primo comprehensum sit primus terminus primæ, patet rectangula consequentia esse æqualia terminis primæ consequentibus, singula singulis. Inde insuper patet tertio termino primæ progressionis æquale esse quadratum secundi termini secun-

dæ, & quinto primæ quadratum tertij secundæ, & septimo primæ quadratum quarti secundæ, & sic deinceps. Progressio *subperspecta* vocetur illa cuius primus terminus est quadratum semidiametri circuli, secundus verò est spatium quod ad quadratum semidiametri, sit ut ipsum quadratum ad circulum: *subadiuncta* verò progressio ea vocetur quæ rectis constat in eadem ratione spatiorum procedentibus, eiusque primus terminus est semidiameter circuli eiusdem.

PROPOSITIO PRIMA.

ESto (Fig. 22.) semicuneus primus expansus $c z b g$ respondens circulo genitori diametro $c f$ descripti, ita ut recta $b g$ æquet quartam partem totius peripheriæ circularis; completo rectangulo $b g f n$ ponatur $b m f n$ alter semicuneus primus expansus respondens circulo genitori semidiametro $n b$, centro n descripti. Intelligatur solidum $b g a c$ comprehensum planis $b g c$, $a g c$ secantibus se in recta $g c$, & ad se inuicem rectis, & superficies curua, cuius hæc sit proprietas ut quæcunque $z d$ ordinatim applicata ad axem $c g$ ducatur, si ex puncto d excitata fuerit perpendicularis $d e$ occurrens superficiei in e , & iungatur recta $z e$, ipsa $z e$ sit in superficie, & angulus $e z d$ sit semirectus. Ex recta $g a$ perpendiculari ad planum $b g c$ abscissa sit $g u$ æqualis rectæ $g c$.

Ostendendum est solidum istud ad positionem plani $a g c$ esse condita ratione æquale cylindræo altitudinis $g u$, bateos $b m f g i$.

Ducta sit quælibet $i p$ ordinatim applicata ad basim $b g$, per i ducta sit $i s$ parallela rectæ $g a$ occurrens superficiei curuæ solidi in s ; iungatur recta $b s$, quæ ex constructione erit in superficie solidi, & angulus $s b i$ erit semirectus, ac proinde rectæ $b i$, $i s$ erunt æquales. Planum $f i p$ secet superficiem curuam solidi secundum lineam $f t p$; quæcunque $z d$ ordinatim applicata ad axem ducatur occurrens rectæ $i p$ in o ; si per o ducatur $o t$ parallela rectæ $i s$ occurrens lineæ $p t s$ in t , recta $z t$ erit in eadem superficie ex constructione, & $o t$ erit æqualis rectæ $z o$; cum anguli ad z , t trianguli $z o t$ sint æquales. Igitur figura $p t f i$ ad positionem plani $b g a$ est condita ratione æqualis figuræ $b z p i$, cum ambæ insistant super eadem basi $p i$, & ordinatim ad illam applicatæ $z o$, $o t$ sint inter se æquales.

Præterea ex quarta superioris libri constat sinum rectum arcus in circulo genitore æquantis rectam $b i$, æqualem esse rectæ $p i$; & sinum versum, rectæ $i m$; est enim $b g f m$ complementum subcontrariæ ibidem definitum. Igitur per septuagesimam quintam libri noni quadraturæ Gregorij à S. Vincentio ut $i l$ recta vel $g f$ semidiameter circuli genitoris est ad $m i$ sinum versum arcus æquantis rectam $b i$, ita est cunei vel vngulæ expansæ portio

LIBER TERTIVS.

49

portio i s t p hoc est b z p i ad b z c g : sed figuræ b z c g est per nonam superioris æquale quadratum g c vel g f vel i l : ergo ut i l recta ad m i rectam , ita quadratum l i ad solidi sectionem i s t p : sed ut l i recta ad m i ita etiam est idem l i quadratum ad rectangulum l i m : ergo sectio i s t p est æqualis rectangulo l i m , hoc est sectioni cylindræci altitudinis g u vel l i , baseos b g f m ; ergo istud cylindræcum & illud solidum sunt conductæ ratione æqualia ad positionem plani a g c , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Hinc patet si compleatur quadratum e d z q & iungatur diameter d q , cum triangulo z d e , quod est quadrati z d e q dimidium , æquale sit triangulum q d z quod etiam est dimidium eiusdem quadrati , notum esse cuneatum solidum cuius sectio sit triangulum q d z , basis sit c z b g , vel quævis eius portio p z b i abscissa per rectam p i parallelam axi c g . Igitur si libræ b g brachium g x ponatur æquale rectæ g f vel g u , & libra suspendatur ex g , perpendicularo c g , æquiponderans figuræ b z c g erit per vigesimam primam quarti tetragonismicorum æquale figuræ b m f g i , quæ per nonæ superioris libri methodum est æqualis dimidio circuli genitoris deducto quadrato g u vel g c . Item si suspendatur ex i , brachio i r æquante eandem g u vel g c , perpendicularo i p , æquiponderans figuræ b z p i esse æquale spatio b i m , quod per methodum nonæ illius reducitur ad spatium mixtum ex circuli genitoris parte & ex rectilineo noto.

COROLLARIUM II.

Si in curvâ b z c sumatur quodvis punctum z , & per z ducatur z d ordinatim applicata ad axem g c , propositumque sit brachio g x perpendicularo g c inuenire æquiponderans portioni z p c d , res faciliè obtinetur. Nam toti y z c g æquiponderat y A m f g spatium mixtum ex methodo illius nonæ : præterea parallelogrammo z y g d æquiponderat dimidium rectanguli d g C , ponendo tres rectas x g , g y , g C esse proportionales : ergo cum recta g y sit data , & recta g x sit nota , notum quoque erit rectangulum d g C , eiusque dimidium : igitur dempto hoc æquiponderante de spatio y A m f g pariter noto (hic notum appello quod ad rectilineum dato tetragonismo circuli reducitur) relinquetur notum æquiponderans figuræ z p c d datæ . Hinc patet notum quoque esse æquiponderans figuræ d z b g datæ , cum notum sit toti c z b g , & parti c z d .

COROLLARIUM III.

Quoniam , z e & aliæ omnes rectæ quæ sunt sectiones communes superficiei istius curvæ & planorum ad planum a g b parallelorum , æquidistant rectæ b a , patet istam superficiem esse cylindræcam descriptam motu rectæ lineæ quæ sit , ad rectam b a parallela , & quæ incedat per limbum b z c .

G

SIt (Fig. 23.) totus semicuneus expansus $c z b s a f$ respondens Circulo genitori diametri $c f$, cuius pars superior sit semicuneus primus $b z c g$, reliqua autem pars sit inferior $b s a f g$. In arcu $b s a$ sumptum sit quodcunque punctum s , & per s ducta $s t$ æquidistans rectæ $a f$, siue s congruat puncto a , siue ab eo discrepet; per s ducta sit ordinatim applicata $s t$ ad axem $c f$: ex recta $s t$ abscindatur $t x$ æqualis rectæ $g c$.

Ostendendum est librâ $s x$ suspensâ ex t perpendicularo $t c$, brachio $t x$, æquiponderans figuræ $t s b z c$ esse notum rectilineum, dato tetragonismo circuli, vt in corollario secundo superioris vocem istam usurpauimus.

Compleatur parallelogrammum $f a q g$, & recta $s t$ occurrat rectæ $q a$ in r : ex recta $g c$ abscindatur $g y$ æqualis rectæ $g t$, & per y ducatur ordinatim applicata $z y$ ad axem $c f$. Per corollarium octauæ libri superioris recta $r s$ erit æqualis rectæ $z y$, & figura $r s b q$ erit æqualis & similis figuræ $b g y z$. Si ergo ex recta $t r$ abscindatur $r d$ æqualis brachio $t x$; brachio verò $t x$ perpendicularo $t c$ inueniatur per superiorem spatium A æquiponderans figuræ $g b z y$: libra $d t$ suspensâ ex r perpendicularo $r q$, brachio $d r$ æquiponderans figuræ $r s b q$ vt iacet manenti erit A . Vt est recta $d r$ ad $r t$ rectâ, ita fiat figura $r q b s$ per nonam superioris nota ad B : ergo per methodum nonæ secundi libri tetragonismici paulo ampliata, si perpendicularum $r q$ mutetur in $t c$, & brachium $d r$ in $t x$ æquiponderans figuræ $r q b s$ vt iacet manenti erit B spatium imminutum spatio A . Rursus vt est $t x$ ad $t r$ vel ad $f a$, ita fiat ipsa $f a$ ad $f e$, cuius bisectio sit h : ergo per principia libræ vulgaris parallelogrammo $q r t g$, brachio manente $t x$ æquiponderat rectangulum notum C contentum sub rectis $t g$, $f h$: sed figuræ $q r s b$ æquiponderat spatium B imminutum spatio A : ergo residuæ $g b s t$ æquiponderat rectangulum C auctum spatio noto A , & imminutum spatio noto B : ergo cum figuræ $b z c g$ æquiponderet per superiorem rectilineum notum, patet duabus simul figuris $f b g t$, $b z c g$, hoc est toti figuræ $f b z c t$ æquiponderare rectilineum notum, posito tetragonismo circuli, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Duo superioris propositionis corollaria huc transferuntur nullo negotio, vt patet.

COROLLARIUM II.

Quoniam ex superioris corollario primo æquiponderans parti superiori $c z b g$ est æquale semicirculo genitori dempto quadrato $g c$, spatium A erit semicirculus genitor imminutus quadrato $g c$: ergo æquiponderans toti $c b a f$ est rectangulum C contentum sub recta $f h$ & sub

$t g$ vel $f g$ (nam in hoc casu t & f sunt idem punctū) auctum circulo genitore & imminutum duplo quadrati $g c$, & spatio B quod ad quadratum $g c$ sic ut recta $f a$ ad $g c$; hoc est ut circulus genitor ad quadratum ipsius semidiametri: nam rectangulum $g f a$ æquat circulum genitorem, & ut $g f$ ad $f a$, ita quadratum $g f$ ad $g f a$. Igitur circulus genitor & B sese elidunt, & restat purgatum æquiponderans toti $c b a f$ rectangulum $g f h$ vel semiquadratum $f a$ imminutum duplo quadrati $g c$.

PROPOSITIO III.

Idem manentibus datum sit semisegmentum $c z y$ ita ut z sumatur ad libitum, propositumque sit inuenire eius centrum grauitatis.

Ex $c f$ abscindatur $y i$ æqualis rectæ $g c$ vel $t x$, & ex $z y$ abscindatur $y l$ eidem æqualis. Ex primi libri decima sexta eiusque corollario inueniatur rectilineum D notum dato tetragonismo circuli, quod librâ $i c$ suspensâ ex y perpendicularo $y z$ æquiponderet figuræ $c z y$, brachio $y i$. Inueniatur per superiorem rectilineum E quod librâ $l z$ suspensâ ex y perpendicularo $y c$ æquiponderet eidem $c y z$, brachio $y l$. Inueniatur per duodecimam eiusdem primi, vel per nonam superioris libri, rectilineum F pari modo notum, quod æquet figuram $c z y$. Ut est F ad D ita fiat $i y$ recta ad $y p$, & ut est idem spatium F ad E , ita fiat $l y$ recta ad $y o$, compleatur parallelogrammum $o y p m$. Dico punctum m esse centrum grauitatis in figura $c z y$.

Quoniam enim ut suspensum F ad æquiponderans D ita vicissim est brachium $i y$ ad longitudinem $y p$, & per p acta est $p m$ parallela perpendicularo $y z$, erit in recta $y z$ centrum grauitatis figuræ $c y z$ ut ex vulgaribus elementis libræ liquet. Simili pacto quoniam ut suspensum F ad æquiponderans E , ita vicissim est brachium $y l$ ad longitudinem $y o$, & per o acta est $o m$ parallela perpendicularo $c y$, centrum grauitatis figuræ $c y z$ erit in recta $p m$: sed est in recta $o m$; ergo est in earum communi sectione m , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quod Anonymus proposuit in cycloide sua his verbis *quærimus dimensionem spatij $c z y$, eiusdemque centrum grauitatis*; liquet esse à nobis peractum in figura præfenti, quæ est ipsa cycloides circulo genitore imminuta. Dimensionem enim dedimus figuræ $c z y$ posito tetragonismo circuli, eiusque centrum m grauitatis inuenimus, quod erat propositum: vide corollarium tertium septimæ propositionis sequentis.

PROPOSITIO IV.

Idem manentibus intelligatur circa axem $c f$ circumuolui figura $c b a f$.

Ostendendum est totum solidum hac circumuolutione genitum, vel quamuis eius partem abscissam plano ad planum $u f a$ parallelo

esse æquale cylindræo altitudinis $f u$ quæ ad $f g$ sit vt circulus ad quadratum suæ diametri, baseos æquantis octuplum a quiponderantis inuenti in propositione secunda.

Istud demonstratur eodem prorsus modo quo decima nona primi libri, nec aliud addi debet; ergo &c. quod erat demonstrandum. Hoc verò est vnum ex iis quæ Anonymus postulat in sua cycloide, dum ait *querimus solida genita ex circumuolutione dicti spatij $z c y$, tam circa $z y$ quàm circa $c y$* . Solida ergo ambo habemus, illud ex decima nona primi libri, istud ex præsententi.

COROLLARIUM I.

In corollario secundo superioris extat calculus pro duplici casu, primus est pro tota cycloide, secundus pro superiore parte $b z c g$: igitur octuplum illorum spatiorum est basis cylindræi propositi in præsententi propositione.

COROLLARIUM II.

Cylindræum altitudinis $f u$ baseos æquantis octies rectangulum $h f c$, vel $g f e$ est æquale per methodum decimæ nonæ primi, cylindro genito ex reuolutione parallelogrammi $a f c$ circa latus $f c$: octies autem rectangulum $g f e$ est octies quadratum $f a$, cum tres rectæ $g f$, $f a$, $f e$ sint proportionales. Rursus cylindræum altitudinis $f u$ baseos æquantis octuplum spatij collecti in secundo secundæ corollario pro primo casu, habet ipsam basim mixtam ex octo rectangulis $h f g$ vel ex quatuor $e f g$ vel ex quatuor quadratis $f a$ imminutis duplo quadrati $f g$. Cum igitur cylindrus & conoides sint æqualia istis cylindræis eiusdem altitudinis $f u$, & ipsa sint vt bases, cylindrus ad conoides erit vt octo quadrata $f a$ ad quatuor quadrata $f a$ imminuta duobus quadratis $f g$: hoc est vt quadratum $f a$ ad dimidium eiusdem quadrati imminutum quadrante quadrati $f g$, vel decima sexta parte quadrati $f c$.

COROLLARIUM III.

Quoniam in superiore propositione inuenimus centrum grauitatis cuiuslibet portioni figuræ $c b a f$, ex methodo decimæ nonæ primi libri habemus solidum genitum ex circumuolutione eiusdem figuræ circa quamlibet rectam datam. Cumulatissimè igitur satisfacimus secundæ quæstioni Anonymi, *querimus*, inquit, *solida genita ex circumuolutione dicti spatij $c z y$, tam circa $z y$, quàm circa $c y$* ; cum non tantum circa $c y$ & $z y$, sed circa quamlibet iis parallelam; nec solum ex reuolutione figuræ $c z y$, sed cuiusuis alterius, quamuis $c y$ non sit portio axis.

PROPOSITIO V.

Super rectam $c g$ (Fig. 24.) incidat ad normam recta $b g$, & eidem rectæ $c g$ ad positionem rectæ $b g$ insistat figura $c z b g$ in plano $c g b$ iacens. Ad planum $c g b$ ex puncto g excitetur perpendicularis $g a$ cuiuslibet longitudinis, & ducatur recta $b a$; per limbum

b z c moueatur recta æquidistans rectæ ba describâtque superficiem cylindraceam de qua agit corollarium tertium primæ. Ex b g recta auferatur qualibet g d, & libræ planæ a x e g c, perpendiculari plano a g c, sustentaculo d i parallelo ad rectam g c, solido superficiæ cylindraceæ intercepto inter plana c g a, c g b æquiponderet spatium æquale magnitudini A : itelligatur aliud solidum cuius sectio z y e t parallela plano a g b existat parallelogrammum z y e simile parallelogrammo comprehenso sub rectis b g, g a.

Ostendendum est æquiponderans isti solido cuius sectio est z y e t, esse ad positionem plani a g b triplum spatij A.

Completo parallelogrammo d g y i, quoniam per y ductum est planum e y z parallelum plano a g b; erit triangulum e y z sectio solidi cylindracei, & latera z y, y e erunt vt latera b g, g a trianguli b g a. Recta z y ita secetur in f & h, vt y f sit triens & y h dimidium rectæ y z; per f, h ducantur f x, h u parallelæ ad rectam y e. Trianguli igitur z y e centrum grauitatis erit in recta f x per sextam Archimedæ quadraturæ parabolæ. Similiter in recta h u erit centrum grauitatis parallelogrammi z y e t. Vt ergo recta i y ad rectâ y f, ita est suspensum triangulû e z y quod est dimidiû parallelogrammi z y e t, ad æquiponderans B aptatum puncto i, vt ex libræ planæ definitione patet exposita in vigesima octaua quarti tetragonismicorû. Præterea vt i y brachium ad y h ita est suspensum parallelogrammû t z y e ad æquiponderans C aptatum puncto i. Quoniâ igitur vt recta y h ad y i ita est C ad t z y e vel ad duplum triânguli e z y, vt autem y i ad y f ita est t z y e vel duplum trianguli e z y ad duplum spatij B: ergo ex æquo vt y h ad y f siue vt ternarius ad binariû, ita C ad duplum spatij B: igitur vt ternarius ad vnitatem ita C æquiponderans sectioni parallelogrammæ t z y e ad B æquiponderans sectioni triangulæ e z y: ergo per vigesimam octauam quarti tetragonismicorum æquiponderans solido cuius sectio est t z y e est triplum spatij A, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM

Posuimus angulum e g b esse rectum perspicuitatis causâ, nam id non est necessarium vt patet ad hoc vt demonstratio cogat, dummodo g y, d i æquidistant. Eadem de causa posuimus angulum b g a esse rectum. Porro solido cuius sectio sit triangulum t e z, vel quod in idem redit t y z, patet æquiponderare duplum spatij A, & bessem eius quod æquiponderat solido cuius sectio est z y e t.

PROPOSITIO VI.

MAneat idem solidum cuius sectio sit quadratum z y e t, ita vt latera z y, y e parallelogrammi z y e t sint æqualia, intelligatur aliud solidum periphericum cuius sectio sit quadrans circularis z m e y descriptus centro y semidiametro y z vel y e.

Ostendendum est bessem spatij quod æquiponderat solido sectionis quadratæ æquiponderare solido sectionis periphericæ $z m e y$.

Intelligatur semicirculi $rz m e$ centrum gravitatis p in semidiametro $y z$ iacens; per p agatur $p q$ parallela rectæ $y e$: est igitur in recta $p q$ centrum gravitatis quadrantis circularis $z m e y$. Vt igitur $y n$ æqualis rectæ $y z$ ad $y p$, ita est quadrans circularis $z m e y$ ad æquiponderans aptatum puncto n , vt ex primis libræ principiis patet: sed istud æquiponderans est per decimam octauam tertij tetragonismicorum æquale trienti quadrati $z y$: ergo vt quadrans circularis $z m e y$ ad trientem quadrati semidiametri $z y$, ita est semidiameter $z y$ ad $y p$: ergo vt circulus ad trientem quadrati quod potest diameter, ita est semidiameter $z y$ ad $y p$ distantiam centri gravitatis semicirculi à centro y : & vt circulus ad bessem quadrati circumscripti ita est $h y$ dimidium rectæ $z y$ ad $a p$. Intelligatur quadrans circularis $z m e y$ ita transferri in plano $z y e$ vt punctum p congruat puncto h , & recta $p q$ rectæ $h u$; igitur circulari quadrantis ita translato æquiponderans aptatum puncto n erit ad æquiponderans quadrato $t z y e$, vt est ipse quadrans circularis ad quadratum $z y e t$, hoc est vt circulus totus ad quadratum circumscriptum, vt patet ex decima quinta secundi tetragonismicorum. Rursus si idem quadrans circularis restitatur suæ primigeniæ sedi æquiponderans eidem quadrantis semoto, ad æquiponderans eidem posito in sua prima sede erit vicissim per octauam secundi tetragonismicorum vt recta $y p$ ad $h y$, hoc est vt circulus ad bessem quadrati circumscripti. Quoniam igitur æquiponderans quadrato $t z y e$ vt iacet manenti libræ $n z$ grammicâ suspensâ ex y , perpendicularo $y e$, brachio $i y$, est ad æquiponderans quadrantis circularis $z m e y$ semoti vt quadratum circumscriptum ad circulum, æquiponderans autem semoti ad æquiponderans locati in sua natia sede est vt idem circulus ad bessem quadrati circumscripti; erit ex æquo vt quadratum circumscriptum ad sui bessem, ita æquiponderans quadrato $t z y e$ ad aliud quadrantis circularis $z m e y$ libræ grammicâ $i z$ suspensâ ex y perpendicularo $y e$, brachio $y i$; quod cum perinde demonstretur in aliis omnibus sectionibus istorum solidorum, patet ex vigesima octauâ quarti tetragonismici bessem æquiponderantis toti cuius sectio est quadratum $t z y e$ esse æquale ad positionem plani $a b g$ æquiponderanti solido cuius sectio est quadrans circularis $z m e$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex superiore patet duplum spatij A æquiponderare solido peripherico cuius sectio est quadrans circularis $z m e y$, & quadruplum spatij A æquiponderare solido cuius sectio est semicirculus $rz m e$. Quoniam verò per corollarium superioris solido cuius sectio est triangulum $t y z$, æquiponderat bes eius quod solido sectionis quadratæ, patet cuneo cuius sectio est $t y z$, & peripherico præsentis propositionis idem spatium æquipondera-

re: igitur per octauam secundi tetragonismicorum vt est periphericum sectionis $z m e y$ ad cuneum sectionis $t y z$, hoc est vt semicirculus ad quadratum suæ semidiametri, ita vicissim interuallum, quo cunei centrum grauitatis distat ab axe $c g$, se habet ad interuallum quo peripherici centrum grauitatis distat ab eodem axe. Igitur cum vt quadratum semidiametri, hoc est primus terminus perspectæ progressionis definitæ initio huius libri se habet ad dimidium circuli, siue ad dimidium secundi termini perspectæ, ita se habeat primus adiunctæ progressionis, hoc est radius circuli ad dimidium secundi adiunctæ, hoc est ad quadrantem totius peripheriæ circularis (nam adiunctæ secundus est dimidium totius peripheriæ circularis) patet interuallum centri cunealis ad interuallum centri peripherici esse vt quadrantem peripheriæ circularis ad suum radium.

PROPOSITIO VII.

Reuocato schemate primæ (*Fig. 22.*) intelligatur circa axem $c g$ circumuolui figura $c z b g$ & gigni solidum conoides, cuius dimidio ad partes z plani $a g c$ posito æquiponderans quæratur.

Ostendendum est libræ planæ axe $g c$, perpendicularo plano $a g c$, sustentaculo $x D$ parallelo ad rectam $g c$, æquiponderans dimidio illi conoidis vel toti, vel ad positionem plani $a g c$ ex parte sumpti, esse noto parallelepipedo æquale, ex hypothesi tetragonismi circuli inuenti.

Quoniam per primam solidum cuius sectio est triangulum $a g b$ æquale est ad positionem plani $a g c$ cylindræo altitudinis $g u$, baseos $b g f m$; istius cylindræi, & solidi illius centrum grauitatis erit in eodem plano ad planum $a g c$ parallelò, vt ex vndecima quarti tetragonismicorum liquet. Præterea quoniam istius cylindræi altitudinis $g u$, & eius baseos $b g f m$ centrum grauitatis est in eodem plano ad planum $g c$ parallelo, & per tertiam notum est centrum grauitatis baseos $b g f m$ vel integre vel cuiuslibet eius partis ad positionem rectæ $f g$ sumptæ, nota quoque est quadratura eiusdem per eandem propositionem: ergo axe $g c$, perpendicularo $a g c$, sustentaculo $D x$ ita ducto vt recta $g x$ æquet rectam $g u$ vel $g c$, si inueniatur rectilineum E æquiponderans basi cylindræi, parallelepipedum altitudinis $g u$, baseos E æquiponderabit cylindræo, ac proinde & solido cuius sectio est $b g a$: ergo per corollarium superioris cylindræum altitudinis $g u$, baseos æquantis quadruplum spatij E æquale est æquipõderanti proposito, quando $g x$ æquat altitudinem $g u$. Quòd si $g x$, $g u$ sint inæquales, ex octaua secundi tetragonismicorum liquet vt est $g u$ recta ad $g x$, ita vicissim fieri debere quadruplum spatij E ad basim quæsitam. Vel retenta eadem basi ita vicissim fieri debere altitudinem $g u$ ad altitudinem quæsitæ cylindræi: ergo &c. quod erat demonstrandum.

Quando sumitur dimidium totum conoideos, cum figuræ $b m f n$, brachio æquante rectam $g c$, perpendicularo $b n$, æquiponderans per corollarium secundum secundæ sit semicirculus genitor diametri $f c$ imminutus quadrato $g c$, ex nonâ & decima secundi tetragonismicorum constat si axis $b n$ mutetur in $g c$, brachio $g x$ æquante rectam $g c$, æquiponderans figuræ $b m f n$ esse spatium quod ad $b m f n$ hoc est ad quadratum $c g$ se habeat ut $b g$ recta ad $g c$, auctum quadrato $g c$ & imminutum semicirculo genitore: sed ex eodem corollario spatium illud quod ita se habet ad quadratum $g c$ est æquale semicirculo genitori: ergo figuræ $b m f n$, brachio $g x$, perpendicularo $g c$ æquiponderat quadratum $g c$. Præterea fiant tres rectæ $g c$, $g b$, $g f$ proportionales, punctum verò G sit bisectione rectæ $F g$: æquiponderans ergo toti $b g f n$ parallelogrammo erit parallelogrammum $G g f$, hoc est dimidium quadrati $g b$: ergo si ex hoc æquiponderante dematur æquiponderans figuræ $b m f n$ restat E æquale dimidio quadrati $b g$ imminutum quadrato $g c$. Igitur cylindraceum altitudinis $g u$ baseos æquantis duplum quadrati $b g$ imminutum quadrato $f c$ æquiponderat conoidi propositionis præsentis in casu assumpto.

COROLLARIUM II.

Calculus reliquorum casuum tractari debet pari methodo, qui quidem tam latè patent quàm propositio prima eiusque corollaria. Porro sicuti inuenimus æquiponderans esse æquale cylindraceo cuius altitudo æquet semidiametrum $g c$ circuli genitoris, basis sit dimidium spatij quod potest recta $b g$, dempto rectangulo contento sub $g c$ semidiametro circuli genitoris & sub sinu verso arcus cui æqualis est recta $b g$. Ita si sumatur quælibet figura $b z p i$ ostendetur æquiponderas figuræ $b i s$ cuneatæ, libræ planæ axe $i p$, brachio æquante rectam $g c$, esse æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, cuius basis sit dimidium spatij quod potest recta $b i$, dempto rectangulo contento sub semidiametro $g c$ & sub sinu verso arcus cui æqualis est recta $b i$.

COROLLARIUM III.

Quoniam ex corollario primo brachio $g x$ æquante semidiametrum $g c$ circuli genitoris, perpendicularo $g f$, æquiponderat toti semicuneo primo expanso $b m f n$ spatium æquale quadrato semidiametri $g c$, ipsa autem figura $b m f n$ est æqualis eidem quadrato, si ex recta $g b$ auferatur $g y$ æqualis rectæ $g c$ vel $g x$, & per y agatur $y A B$ parallela rectæ $g f$, ex principiis libræ notis patet, cum ut $g x$ brachium ad $g y$ longitudinem, ita vicissim sit suspensa magnitudo $b m f n$ ad æquiponderans, in recta $A B$ esse centrum gravitatis semicunei expansi $b m f n$. Igitur secluso tetragonismo circuli inuenitur recta $A B$ parallela axi $c g$ ducta per centrum gravitatis semicunei expansi. Pari verò methodo inuenietur secluso eodem tetragonismo, recta per centrum cuiusvis partis $b n l m$ positâ $l m$ parallela rectæ $g c$.

PROPO-

PROPOSITIO VIII.

SVper recta ba (*Fig. 25.*) stet ad normā recta bg , & eidem ad positionem eiundē bg insistat figura ahg , quæ etiam ad positionem rectæ ab insistat rectæ bg . Ex a b abscissa sit quælibet bc , cui bD ponatur æqualis; completo parallelogrammo $gecb$ intelligantur duæ figuræ cfe , cte ita se habentes ad parallelogrammum $gbce$ & ad figuram $bahg$ vt quæcunque hd æquidistans rectæ bc ducatur occurrens lineis ahg , bg , cfe , cte , c in punctis h , f , s , t , d , quatuor rectæ fd , fh , sd , td sint continuè proportionales. Libræ grammica cD suspensa ex b perpendicularo bg , brachio bc , intelligantur generari primæ bi a quadratrix & secunda bx respondentes figuræ $bahg$ sic vt quemadmodum cb ad bo quamvis portionem rectæ ba , ita oh parallela perpendicularo bg & dimetiens figuræ $bahg$, sit ad oi dimetientem primæ quadratricis, & ita sit ipsa oi ad ox dimetientem secundæ.

Ostendendum est quæcunque oh parallela rectæ bg ducatur, completo parallelogrammo $hobf$, trientem figuræ ctd esse æqualem quadratrici secundæ figuræ $bahf$ compositæ ex figura Dox & ex secunda quadratrice notā parallelogrammi $bohf$.

Ad planum abg excitata sit perpendicularis bA & completum sit quadratum $AbDl$, cuius diameter bl ; in plano bDl descripta sit parabola bnl cuius axis Ab , ordinatim applicata Al . Intelligatur cylindraceum cuius basis $bahg$, descriptum per limbum baseos $bahg$ motu rectæ bA perpendicularis ad planum abg ; intelligatur aliud cylindraceum cuius basis $baln$ descriptum per limbum baseos $baln$ motu rectæ bg perpendicularis ad planum AbA . Per h ducatur planum hop parallelum plano Abg secans lineas ab , lnb , lb , lA in punctis o , n , m , p . Quoniam per duodecimam tertij tetragonismicorum vt $b.c$ vel $p.o$ ad bo vel ad om , ita est bo vel om ad on ; rectis autem bc , bo æquales sunt df , fh , & vt df ad fh ita est fh ad sd , erunt on , sd æquales; ergo cum onr h sit sectio parallelogramma dicylindracei suprâ descripti, erunt hr , sd æquales. Quoniam igitur vt df ad fh , ita est sd vel hr ad td , rectangulo sub mediis fh , sd contento æquale erit rectangulum fdt sub extremis comprehensum.

Rursus quoniam planum rhf æquidistat plano AbA , si compleantur parallelogramma rhf u , $nobB$ erunt similia, & cylindracei cum plano rhf sectio rhy erit similis & æqualis siue, vt Archimedes loquitur, erit eadem cum sectione $nobz$. Est igitur ryf parabola quam tangit fh , cuius axis uf , ordinatim applicata ur ; ergo portio $ryfh$ est per demonstrata ab Archimede triens parallelogrammi rhu , siue rectanguli fdt . Quo-

H

niam igitur dicylindraceuti cuius sectio $nohr$ parallela plano Abg singulae sectiones $rhfy$ parallelae plano Ab a sunt aequales trienti rectanguli fdt , patet ex undecima tertij tetragonismicorum dicylindraceutum illud esse ad positionem plani Ab a condita ratione aequale trienti cylindraceuti altitudinis bc , baseos cte .

Rursus quoniam ut cb ad bo vel ut po ad om , ita est oh ad oi , & ut om ad no ita est oi ad ox , erit ex aequo ut po ad no , ita oh ad ox : ergo rectangulum sub medijs no , oh est aequale rectangulo sub extremis po , ox . Igitur dicylindraceutum genitum ad positionem plani Abg ex figuris $baln$, $bahg$ est condita ratione aequale cylindraceuto altitudinis bc baseos bxa o: sed dicylindraceuto isti aequalis est, ut ostendimus, triens cylindraceuti altitudinis fd , baseos cte d: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quando punctum o congruit puncto b patet punctum h congruere puncto g , & nullum esse parallelogrammum $ohfb$. Præterea ex demonstrationis progressu liquet idem euinci quæcunque sit linea ah siue recta, siue caua ad partes rectæ bg , siue conuexa: & siue pertingat ad g , siue non pertingat.

COROLLARIUM II.

Patet quoque ex demonstratis si habeatur quadratrix secunda parallelogrammi boh f, & quadratrix secunda Do x, triplum eiusmodi spatij esse aequale figuræ ctd . Figuras autem istiusmodi quarum prima est parallelogrammum quodlibet bce g, secunda quælibet figura bah g, tertia cfe , quarta cte , habentes iam dictam proprietatem voco gradus primum, secundum, tertium, quartum, & rectas df , fh , fd , dt parallelas rectæ bc , voco earum dimetientes. Dari igitur quarti gradus ad positionem rectæ bc triens est quadratrix secunda ad positionem rectæ bg : & vicissim datæ secundæ quadratricis ad positionem rectæ bg , triplum est quartus gradus ad positionem rectæ bc .

COROLLARIUM III.

Patet insuper ut habeatur quadratrix secunda Do x, datâ figurâ ctd , ex triente figuræ ctd auferendam esse quadratricem secundam parallelogrammi $ohfb$: & vicissim ut ex quadratrice data Do x obrineatur quartus gradus ctd , ad triplum ipsius quadratricis Do x addi oportere triplum quadratricis secundæ parallelogrammi $ohfb$.

COROLLARIUM IV.

Præterea si dicylindraceuto genito ex ipsa figura bah g ad positionem plani Ab a in seipsam ducta notum sit æquiponderans axe libræ planæ bg , perpendicularo plano Abg , sustentaculo ce , patet basim cylindraceuti altitudinis bc , æquantis dictum æquiponderans ad positionem plani Ab a esse dimidium quarti gradus; nam ut de ad fE dimidium rectæ fh , ita est fh ad dimidium rectæ ds ; ergo posita eadem altitudine fh ita quo.

que est quadratum $f h$ ad rectangulum contentum sub $f h$ & sub dimidio rectæ $d s$. Cum igitur quadrati $f h$ centrum gravitatis sit in perpendiculari ad planum $a b g$ ex puncto E excitata, & cum ut $d f$ ad $f E$ ita vicissim sit quadratum $f h$ suspensum ad rectangulum contentum sub $f h$ & sub dimidio rectæ $d s$, patet istud rectangulum aptatum puncto d ad positionem plani $A b a$ æquiponderare quadrato $f h$ ad eandem positionem stanti: ergo per vigesimam octavam quarti tetragonismicorum solido genito ex figura $b a h g$ præscriptâ iam ratione, æquiponderat solidum genitum pari pacto ex secundo gradu $b a h g$ & ex dimidio tertij $c f e$; hoc est ex primo gradu $c b g e$ ex dimidio quarti $c t e$, ut ex demonstratis liquet.

PROPOSITIO IX.

SIt ut in secunda (Fig. 26.) totus semicuneus expansus $c b a f$ circulo genitore diametri $c f$ genitus; axis $c f$ bifariam sectus sit in g , ut $c b g$ sit semicuneus primus expansus: ex recta $g f$ productâ abscissa sit $f E$ æqualis ipsi $a f$, & adimpletum sit parallelogrammum $a f E B$ cuius diameter $a E$, itemque parallelogrammum $f g h a$. Ex puncto h excitetur $h F$ perpendicularis ad planum $b h a$ & æqualis rectæ $h b$: intelligatur figura $a h F G$ conductâ ratione æqualis figuræ $a h b z$ ad positionem plani $F h b$, ita ut quodcunque planum $G F z$ ducatur parallelum plano $F h b$, sectiones eius $F G$, $F z$ cum figuris $a h F G$, $a h b z$ sint æquales. Intelligatur cylindraceum cuius basis sit $a h F G$, altitudo $a f$: per limbum $a z b$ intelligatur incedere recta æquidistans rectæ $h F$, & describendo superficiem cylindræam diuidere cylindraceum altitudinis $a f$, baseos $a h F G$ in duas portiones quarum bases sunt $h a z b$, $a z b g f$. Ista vocetur *portio secunda cylindræci conducti*. Completo quadrato $q h a e$ intelligatur libra grammica $h g$ suspendi ex h perpendiculo $h a$, brachio $q h$, & generetur quadratrix $a o n$ respondens figuræ $a t z b h$, ut sicut $q h$ ad quamlibet $h s$ portionem rectæ $h b$, ita sit parallela rectæ $a h$ dimetiens figuræ $a t b h$, sit ad $r o$ dimerientem quadratricis. Intelligatur præterea solidum cuius sectio parallela plano $F h g$ sit $z y D$ triangulum rectangulum simile triangulo $p f a$ cuius latera $a f$, $f p$ sunt æqualia sicut in primâ descriptum fuit, eius verò basis sit pars inferior $g b t a f$ semicunei expansi $c b a f$.

Ostendendum est figuræ isti cuius sectio $D z y$, æquale ad positionem plani $F h a$ esse cylindraceum altitudinis $f A$ æquantis rectam $f g$, cuius basis sit triangulum rectilineum $a E f$, demptis cylindræco altitudinis $A f$ baseos $a o n$, & portione secunda cylindræci conducti. Eiusmodi verò solidi centrum gravitatis esse in plano noto parallelo ad planum $A f c$.

H 2

DE CYCLOIDE

Quoniam per octauæ libri secundi corollarium 2. figura $h b z a$ est eadem cum figura $c b g$, sed subcontrariè posita; figura autem $c b g$ si ponatur basis solidi cuius sectiones plano $p f a$ æquidistantes sint quadrata, habet notum æquiponderans per septimam, axe $c f$ perpendicularo plano $c f p$: igitur si figura $h b t a$ ponatur basis paris solidi erit notum æquiponderans eiusmodi solidi portioni quæ ad plani $p f c$ partes f iacet. Igitur cum eiusmodi solidum sit ad positionem plani $F h a$ condita ratione æquale cylindræo altitudinis $f A$ vel $f g$, baseos $a o n$ ut ex methodo vigesimæ quintæ & sextæ quarti tetragonismicorum liquet, erit per superioris corollarium secundum nota secunda quadratrix respondens primæ $a o n$ siue tota sumatur, siue ex parte: ac proinde notum est planum parallelum plano $F h a$ incedens per centrum grauitatis cylindræci altitudinis $f A$, baseos $a o n$. Similiter cum cylindræci conditi baseos $a h F G$, altitudinis $a f$, centrum grauitatis iaceat in plano noto parallelo ad planum $F h a$, & portio primæ centrum grauitatis iaceat in plano noto parallelo ad idem $F h a$ ut ex septima constat, notum erit planum parallelum illis incedens per centrum grauitatis portiois secundæ. Cum igitur cylindræci altitudinis $A f$, baseos $a f E$ trianguli rectilinei centrum grauitatis iaceat in plano noto eisdem parallelo, patet si ex isto cylindræco cylindræcum baseos $a o n$, & portio secunda demantur ad positionem plani $F h a$, residui centrum grauitatis iacere in plano noto parallelo ad planum $F h a$.

Quoniam verò solido cuius sectio sit triangulum $a f p$, basis parallelogrammum $a h g f$, ad positionem plani $p f c$ æquale est condita ratione solidum altitudinis $f A$ vel $f g$, baseos $a f E$ rectilineæ: solido verò cuius sectio sit triangulum $F z i$ comprehensum sub $F z$, & sub $z i$ parallelâ rectâ $y D$ in triangulo $F y D$, æquale est ad positionem plani $F h a$ cylindræcum baseos $a o n$: secundæ verò portioi conditi cylindræci æqualis est portio cuius sectio est parallelogrammum $i z D C$; igitur solido cuius sectio est triangulum $z y D$ æquale est ad positionem plani $F h a$ solidum illud residuum de quo paulo antè egimus, & cuius centrum iacet in noto plano parallelo ad planum $F h a$: ergo per vndecimam quarti tetragonismicorum solidi cuius sectio est triangulum $z y D$ centrum grauitatis iacet in plano noto parallelo ad planum $F h a$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM

Propositionis primæ corollaria hîc locum habent rectè aptata, ut patet.

PROPOSITIO X.

Iisdem manentibus ostendendum est de dimidio solidi conoidis descripti circa axem $g f$ motu figuræ $g b z a f$, idipsum quod de dimidio conoidis geniti motu figuræ $b c g$ circa axem $c g$, ostendimus in septima.

Istud posita demonstratione superioris propositionis ostenditur eodem planè pacto, nec aliud quicquam adjici oportet: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam ex corollario primo septimæ æquiponderans toti quadranti conoideos geniti circa axem $h a$ circumuolutione figuræ $h b z t a$, axe $h a$, perpendicularo plano $F h a$, sustentaculo $q e$, est cylindraceum altitudinis $h d$ æquantis rectam $h a$, baseos æquantis quadratum $b g$, vel quadrantem quadrati $f a$ imminutum dimidio quadrati $f c$; istud verò æquiponderans ad æquiponderans solido cuius sectio loco quadrantis circuli fit quadrans quadrati circumscripti est vt binarius ad ternarium per sextam, æquiponderans isti solido homœoconoidi (ita enim fuit appellatum in decima nona primi) erit cylindraceum altitudinis $h d$, baseos æquantis tres semiquadrantes quadrati $f a$ imminutum tribus quadrantibus quadrati $f c$. Si igitur quadratum $q h a e$ ponatur ad positionem rectæ $q h$ esse primus gradus, secundus $h b z a$, quartus ex corollario quarto octauæ erit duplum eiusmodi baseos; videlicet tres quadrantes quadrati $f a$ detractis tribus semissibus quadrati $f c$. Igitur ex corollario secundo eiusdem octauæ quadratrix quadratricis $a o n$, libræ $q b$ suspensæ ex h perpendicularo $h a$, brachio $h q$, est triens quarti illius gradus; nempe quadrans quadrati $f a$, detracto dimidio quadrati $f c$.

Rursus quoniam quadratrix $a o n$ est per corollarium secundum secundæ æqualis semicirculo genitori dempto quadrato $g c$, si perpendicularum $h a$ mutetur in $g f$, & brachium $h q$ in $g l$ ipsi æquale, æquiponderans figuræ $a o n$ erit, vt patet ex methodo nonæ & decimæ libri secundi tetragonismicorum, spatium quod ad supensum $a o n$ (hoc est ad semicirculum imminutum quadrato $g c$) sit vt recta $a f$ ad $f g$, imminutum quadrante quadrati $f a$, & auctum dimidio quadrati $f c$. Igitur æquiponderans quadratrici $a o n$, erit quadrans quadrati $f a$, auctus dimidio quadrati $f c$, & imminutus circulo genitore. Atque hæc est basis cylindracei altitudinis $h d$ æquiponderantis cylindræco eiusdem altitudinis, baseos $a o n$, brachio $g l$ libræ suspensæ ex g , perpendicularo plano $A f c$.

Præterea iisdem positis quadrato $a f E B$ vt iacet manenti æquiponderans ita inuenitur. Fiant tres rectæ $g f$, $f a$, $f V$ proportionales, & $f V$ diuidatur bifariam in M ; igitur rectangulum $M f E$ vel $V f n$ æquiponderat quadrato $a f E B$, vt ex methodo primi corollarij septimæ constat. Rursus quoniam vt recta $g f$ ad $f a$, ita est quadratum $g f$ ad circulum genitorem æqualem rectangulo $g f a$, & vt recta $g f$ ad $f a$ ita est $f a$ ad $f V$, ac proinde ita est rectangulum $g f a$ siue circulus genitor ad rectangulum $g f V$ siue ad quadratum $f a$; erunt porportionalia tria hæc spatia, quadratum $f g$, circulus genitor, & quadratum $f a$. Cum igitur vt recta $f a$ ad $f V$, vel vt $g f$ ad $f a$, ita sit quadratum $f a$ ad rectangulum $a f V$, & ita etiam sit quadratum $g f$ ad circulum genitorem, patet quatuor spatia

H 3

esse continuè proportionalia, quadratum $g f$, circum genitorem, quadratum $a f$, rectangulum $V f a$. Est igitur $V f a$ ad quadratum $f g$ semidiametri circuli genitoris in triplicata ratione circuli ad quadratum suæ semidiametri. Est ergo $V f a$ quartus terminus progressionis perspectæ, cuius dimidium est rectangulum $V f n$. Igitur cum dimidium quarti termini perspecti æquiponderet parallelogrammo $a f E B$, libra $g h$ suspensa ex g perpendiculo $g f$, brachio $g l$, triens huius æquiponderantis, hoc est sextans quarti termini perspecti æquiponderabit toti triangulo $f a E$, ut ex quintæ methodo aperte constat. Igitur cylindræ cuius basis sit triangulum $a f E$, altitudo $f A$ æquiponderat iisdem positis cylindræ eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem quarti termini perspectæ progressionis: nam ipsa hæc est progressio, quam *perspectam* initio huius libri diximus & cuius hæc est natura ut primus terminus ad secundum sit sicuti est diameter circuli ad rectam æqualem toti peripheriæ; quod ad calculum centrorum numeris quàm proximè exprimendum miros præstabit usus.

Rursus cylindræ conditi insistentis super basi $a h F G$ pars prima respondens figuræ $a h b z$ est æqualis per quartam cylindræ altitudinis $h d$ vel $a h$, baseos æquantis circum genitorem imminutum duplo quadrati $g c$. Æquiponderans eidem primæ parti axe $h a$ perpendiculo plano $d h a$, sustentaculo $q e$ est per demonstrata paulò antè cylindræ altitudinis $h d$, baseos æquantis tres semiquadrantes quadrati $f a$ imminutos tribus quadrantibus quadrati $f c$. Si igitur perpendiculum $h a$ mutetur, ut suprà in $g f$, & brachium $h q$ in $g l$ ipsi æquale, æquiponderans primæ partis conditi cylindræ erit spatium quod ad primam illam partem suspensam sit ut recta $a f$ ad $f g$, imminutum æquiponderante antè inuen- to: erit igitur cylindræ altitudinis $f A$ vel $f g$, baseos æquantis quinque octauas partes quadrati $f a$ auctas tribus quadrantibus quadrati $f c$, & imminutas duobus circulis genitoribus.

Quoniam igitur cylindræ conditum baseos $a h F G$ altitudinis $a f$ est ad positionem plani $F h a$ condita ratione æquale cylindræ cuius altitudo $a f$, basis sit figura $a h F G$; hæc verò figura quando tota sumitur æquat quadratum $f g$ vel $a h$ ex duodecima primi, quando verò non sumitur tota sed pars eius ad positionem rectæ $h F$, est æqualis per octauam rectilineo noto; quando igitur tota sumitur istud dicylindræ erit ad positionem plani $A f c$ condita ratione æquale cylindræ baseos parallelogrammæ $g h a$ altitudinis $f A$. Igitur cum basi $g f a h$ æquiponderet dimidium quadrati $a f$ ex methodo supra tradita, cylindræ isti siue cylindræ condito æquiponderabit cylindræ altitudinis $A f$, vel $f g$, baseos æquantis dimidium quadrati $f a$. Tale igitur est æquiponderans duabus simul partibus cylindræ conditi: ergo dempto æquiponderante primæ partis relinquetur æquiponderans secundæ nempe cylindræ altitudinis $f g$ baseos æquantis duos circulos genitores im-

minutos semiquadrante quadrati $f a$, & tribus quadrati $f c$ quadrantibus.

Præterea quoniam cylindræo altitudinis $f A$ baseos rectilineæ $f a E$ æquiponderat cylindræum eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem quarti termini perspecti, si inde auferatur æquiponderans secundæ parti cylindræci conducti, & æquiponderans cylindræo baseos $a o n$, residuum fiet æquiponderans solido cuius sectio est triangulum $z D y$, nempe cylindræum altitudinis $f g$, baseos æquantis sextantem quarti termini perspectæ primæ progressionis auctum quadrante quadrati $f c$, imminutum octava parte quadrati $f a$, & circulo genitore.

Igitur ex corollario sextæ quadruplum huius æquiponderantis videlicet bes termini quarti perspecti auctus quadrato $f c$, imminutus dimidio quadrati $f a$ & quatuor circulis genitoribus est basis cylindræci altitudinis $f A$, quod repræsentat æquiponderans dimidio conoideos geniti circa axem $g f$ motu partis inferioris $b z a f g$, libræ planæ axe $f c$, perpendicularo plano $A f c$, sustentaculo $l x$ parallelo ad rectam $g f$.

Igitur si æquiponderanti isti addatur spatium æquiponderantis dimidio conoideos superioris collectum in corollario septimæ, fiet æquiponderans dimio totius conoideos motu figuræ $c b a f$ descripti, nempe cylindræum altitudinis $f A$ baseos æquantis bessem termini quarti perspecti deductis quatuor circulis genitoribus.

COROLLARIUM II.

Calculus reliquorum casuum tractari debet simili methodo, qui quidem tam latè patent quam propositio prima cum suis corollariis.

PROPOSITIO XI.

SIt (*Fig. 27.*) semicuneus primus expansus $h o c a$ genitus circulo diametri $c u$, centri a , eius basis $a h$ secta sit bifariam in r ; in quam incidat $r q$ parallela rectæ $a c$, & æqualis dimidio rectæ $a c$, vel $a u$. Intelligantur completa parallelogramma $h a u g$, $b h r q$, $y q r a$. Sit $b h t q$ semicuneus expansus genitore circulo centri b , semidiametri $b h$ sit quoque $y u i q$ semicuneus alter expansus genitore circulo centri y , semidiametri $y u$; figura $h t q u a$ sit illa quam ex sinibus versis appellauimus in secundo corollario decimæ tertie secundi libri, ac proinde quæcumque $t l$ parallela axi $a c$ ducatur occurrens basi $h a$ in e , limbo $h o c m o$, lateri $g u m l$, tres rectæ $l e$, $e o$, $e r$ sint proportionales. Intelligatur præterea ex puncto a excitari $a m$ perpendicularis ad planum $c a b$ æqualis rectæ $a c$. Ponatur circa axem $a h$ manentem circumuolui figura $h o c a$ & gignere conoides cuius tantum quadrans interceptum planis $h a c$, $m a h$, $m a c$ hic consideratur perspicuitatis causa, cum ex quadrantis modulo ad totum transitus facile

fiat : ex recta ha , producta abscindatur a B æqualis rectæ ac : ut est quadratum diametri ad circulum, ita fiat recta a m ad a p .

Ostendendum est cylindraceū baseos htq i u a altitudinis a p esse ad positionē plani p a c condita ratione æquale conoidis quadranti proposito, & libra Bh suspensa ex a perpendicularo plano m a c notum esse cylindraceum altitudinis p a , baseos æquantis rectilineum (dato circuli tetragonismo) notum; æquale spatio quod æquiponderat quadranti, vel cuilibet eius portioni ad positionem plani p a c sumptæ.

Quoniam tres rectæ le , eo , te sunt proportionales, rectangulum altitudinis le vel am , baseos te erit æquale quadrato eo : ergo per undecimam quarti tetragonismicorum cylindraceum altitudinis a m baseos htq i u a erit ad positionem plani m a c condita ratione æquale quadranti solidi homœoconoideos cuius sectiones sunt quadrata parallela plano m a c , latera autem eorum sunt ordinatim applicatæ ad basim ha semicunei expansi hoc a . Igitur ut in decima nona primi ostendimus pro pari casu, cylindraceum altitudinis p a eiusdemque baseos erit quadranti conoides proposito æquale condita ratione ad positionem plani m a c .

Quoniam igitur cylindraceum altitudinis p a , baseos ht i u a ad positionem plani p a c est condita ratione æquale quadranti conoides circa basim a h descripti; per eandem undecimam quarti tetragonismicorum, quod ad positionem plani m a c æquiponderabit cylindraceo, æquiponderabit quoque quadranti : sed quod æquiponderat cylindraceo altitudinis a p , est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis æquiponderans figuræ htq i u a ad positionem rectæ ac , ut ex methodo vigesima quintæ quarti tetragonismicorum liquet : ergo cum ex tertiâ methodo habeatur æquiponderans figuræ htq i u a cuilibet portioni ad positionem rectæ a c sumptæ, patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex methodo calculi initi in corollariis septimæ & decimæ inuenitur quadrati conoides integrè sumpto æquiponderare axe a c perpendicularo plano m a c , brachio a B cylindraceum altitudinis p a , baseos æquantis quadrantem quadrati a h , imminutum quadrante quadrati a c , ac proinde toti conoidi æquiponderare quadratum a h imminutum quadrato a c : dimidio verò eiusmodi conoides abscisso per planum m a h , æquiponderare dimidium quadrati a h imminutum dimidio quadrati a c . Diuidatur enim a B bifariam in C , ut rectæ qr , a C sint æquales; ex recta ra abscindatur rs rectæ qr æqualis : igitur per demonstrata initio corollarij primi primæ libræ a h suspensâ ex r perpendicularo rq , brachio rs , æquiponderans figuræ $bhtq$ est æquale quadrato qr : ergo per recessum si axis rq mutetur in ay , & brachium rs in a C æquiponderans figuræ $bhtq$ erit spatium quod ad $bqth$ sit ut recta a r ad rs auctum quadrato qr : sed illud spatium proportionale per demonstrata initio eiusdem corollarij est

larij est æquale semicirculo genitori semidiametri $q r$: ergo figuræ $b q t$ h librâ $C h$ suspensâ ex a perpendicularo $a y$, brachio $a C$ æquiponderat semicirculus semidiametri $q r$ auctus quadrato $q r$. Rursus iisdem positis parallelogrammo $a h b y$ ut iacet manenti ex methodo corollarij primi decimæ æquiponderat dimidium quadrati $h a$: ergo figuræ residuæ $y q t$ $h a$ æquiponderat brachio $a C$, perpendicularo $a y$ dimidium quadrati $h a$ imminutum semicirculo semidiametri $q r$, & quadrato $q r$: sed figuræ $u i q y$ iisdem positis æquipōderat per demonstrata in corollario secundo secundæ propositionis dimidium eiusdem circuli dempto quadrato $q r$: ergo figuræ $u i q t h a$ æquiponderat dimidium quadrati $h a$ imminutum duplo quadrati $q r$ vel dimidio quadrati $a c$: Igitur brachio $a B$, æquiponderat prioris æquipondarantis dimidium per octauam secundi tetragonismicorum, nempe quadrans quadrati $a h$, imminutus quadrante quadrati $a c$. Ergo quadruplum illius est quadratum $h a$ imminutum quadrato $a c$: & huius dimidium illiusque duplum est dimidium quadrati $h a$ imminutum dimidio quadrati $a c$.

COROLLARIUM II.

Propositionis nonæ corollaria hic locum habent, ut patet.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus compleatur totus semicuneus expansus vel tota semicycloides parua $u c o h x A$, additâ parte inferiore $u a h x A$, & figuræ $u i q t h a$ subcontrariè posita sit figura eadem $D h f P$, ita ut tres $E F$, $F z$, $F R$ dimetientes figurarum $g A D h$, $h x A D$, $h f P$ D sint proportionales, est enim $h x A D$ subcontrariè posita eadêmeque cum figura $h o c a$ per superioris libri octauam in corollario. Ex rectâ $h g$ abscindatur $g V$ æqualis ipsi $g h$, & compleatur parallelogrammum $g A T V$: intelligatur figura $T H g V$ ad positionem rectæ $g h$ insistere ita rectæ $T V$, ut quæcunque $S E$ parallela rectæ $a c$ ducatur occurrens lineis $T V$, $T H g$, $A g$, $A x h$ in punctis S , H , E , z , tres rectæ $S E$, $E z$, $S H$ sint proportionales.

Ostendendum est figuram $T H g V$ ad positionem rectæ $a c$ esse conditâ ratione æqualem parallelogrammo $A g h D$ aucto figura $h f P D$, & imminuto bis figura $A z h D$: ac proinde sicuti in superiore, librâ $a h$ suspensâ ex a perpendicularo plano $m a c$, brachio $a B$ æquiponderans quadranti conoidis circa axem $g A$ circumuolutione figuræ $g A x h$ esse idem quod æquiponderans cylindræco altitudinis $a p$, baseos æquantis rectilineum ex dato tetragonismo circuli notum.

Figuræ $A x h D$ axe $h D$ sustentaculo $M P$ æquiponderat conditâ ratione ad positionem rectæ $a c$ dimidium figuræ $h f P D$; cum enim tres

I

rectæ FN , vel $a c$, $z F$ & FR sint proportionales, ut FN brachium ad dimidium rectæ Fz , ita vicissim est tota Fz ad dimidium rectæ FR : ergo ex vigesima octava quarti tetragonismicorum dimidium figuræ $D h f P$ aptatum sustentaculo MP æquiponderat condita ratione figuræ $A z h D$. Si igitur axis $h D$ mutetur in $g A$ & sustentaculum PM in TV , æquiponderans eidem figuræ aptatum sustentaculo TV erit ipsa figura $A z h D$ imminuta dimidio figuræ $D h f P$, ut ex nona secundi tetragonismicorum liquet. Præterea quoniam parallelogrammo $A g h D$ axe $g A$ sustentaculo VT æquiponderat condita ratione ad positionem rectæ $g h$ dimidium parallelogrammi ipsius $A g h D$, æquiponderans figuræ $A g h$ x erit iisdem positis condita ratione æquale dimidio parallelogrammi $A g h D$ ad positionem iam dictam sumpti, addito dimidio figuræ $h f P D$, & ablata figura $A z h D$. Igitur cum figura $TH g V$ sit ad positionem eandem condita ratione dupla istius æquiponderantis, erit ipsa parallelogrammum $A g h D$ auctum figurâ $h f P D$ & imminutum bis figurâ $A z h D$. Ergo ut ex superiore liquet cylindraceum altitudinis $a p$ baseos $V T H g$ est ad positionem plani $m a c$ condita ratione æquale quadranti conoideos circa rectam $g A$ descripti motu figuræ $A z h g$: & habent idem æquiponderans: sed cylindraceo æquiponderat cylindraceum altitudinis $a p$, baseos æquantis rectilineum ut ex præcedentis methodo patet notum, quod figuræ $TV g H$ æquiponderat iisdem positis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Calculus pro casu quadrantis conoideos respondentis toti figuræ $g A z h$ circa rectam $g A$ manentem circumuolutæ exhibet cylindraceum altitudinis $a p$ baseos æquantis nouem decimas sextas partes quadrati $u A$ imminutas circulo genitore, & septem decimis sextis quadrati $u c$. Ex rectâ $a D$ producta abscindatur $D Y$ æqualis rectæ $a c$ vel $a B$. Quoniam figura $TH g V$ est parallelogrammum $A g h D$ auctum figurâ $D h f P$, & imminutum bis figurâ $A x h D$: librâ autem $Y a$ suspensâ ex D perpendicularo $D G$ æquiponderat figuræ $A g h D$ dimidium quadrati $D h$ vel $h a$ ut ex corollario decimæ liquet; figuræ verò $D h f P$ per corollarium superioris æquiponderat quadrans quadrati $D h$ imminutus quadrante quadrati $a c$; figuræ demum $a z h D$ bis sumptæ æquiponderat per corollarium secundum secundæ circulus diametri $u c$ imminutus bis quadrato $a c$: summa ex illis collecta erit æquiponderans figuræ $TH g V$ brachio $D Y$, perpendicularo $D G$, videlicet tres quadrantes quadrati $D h$ aucti septem quadrantibus quadrati $a c$, & imminuti circulo diametri $u c$. Ipsa porro figura $TH g V$ est tres quadrantes circuli genitoris diametro $u c$ descripti dempto bis quadrato $a c$: nam prima pars $A g h D$ est dimidium circuli genitoris ex corollario septimæ; secunda $D h f P$ est quadrans eiusdem circuli siue rectangulum $b h D G$; tertia est bis quadratum $a c$. Si igitur brachium $Y D$ mutetur in $a B$ & perpendicularum $D G$ in $a y$, æ-

quiponderans postremum erit spatium quod ad figuram $THgV$ sit ut recta Da ad $a c$ imminutum æquiponderante priore. Cum igitur $THgV$ sit tres quadrantes genitoris circuli demptis duobus quadratis $a c$, proportionale illi spatium ex methodo corollarij iam dicti erit tres quadrantes quadrati uA vel aD subductis duobus circulis genitoribus: ergo deducto priore æquiponderante relinquetur æquiponderans figuræ $THgV$, nempe nouem decimæ sextæ quadrati aD deducto circulo genitore, & septem decimis sextis quadrati $u c$. Istud verò æquiponderans est basis cylindracei altitudinis $a p$, quod æquiponderat quadranti conoides positi.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem manentibus ut in vndecimâ, circa axem $g u$ intelligatur circumuolui figura $gho c u$.

Ostendendum est figuram cuius dimetiens parallela rectæ $u c$ sit tertia proportionalis post primam Lu , secundam lo parallelam rectæ $u c$ interceptam recta $u g$ & arcu $h o c$, esse compositam ad positionem rectæ $u a$ ex parallelogrammo $u g h a$, ex figurâ $h q i u a$ & ex bis figurâ $h o c a$; ac proinde librâ $a h$ suspensâ ex a perpendicularo plano $m a c$; brachio $a B$ notum esse æquiponderans quadranti huius conoidis nempe cylindraceum altitudinis $a p$, baseos æquantis rectilineum notum, posito circuli tetragonismo.

Quoniam enim tres rectæ $l e$, $e o$, $t e$ sunt proportionales, erunt quoque proportionales $l e$, $l o$ composita ex prima $l e$ & ex $e o$ secundâ, & composita ex primâ, bis secundâ, & semel tertiâ; cum ut prima trium proportionalium ad primam & secundam, ita sit prima secunda, ad primam, bis secundam & tertiam simul sumptas. Cum igitur tertia ista figura respondens secundæ $gho c u$ sit hoc pacto composita, & illi æquiponderans ad positionem rectæ $u a$ sit notum ut ex superioribus duabus liquet, erit quoque nota basis cylindracei altitudinis $a p$ æquiponderantis ad positionem plani $p a c$, libra $B h$ suspensa ex a perpendicularo $a u$, brachio $a B$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quando poneretur circumuolui circa quamvis rectam, parallelam rectæ $a h$, obtinebitur tertia illa figura proportionalis, non multum ab simili methodo, ut propius inspicienti patebit. Nam per axis paralleli rectæ $h a$ recessum ab ipsa $h a$ manet dimidium eiusmodi tertiæ figuræ inuentæ pro æquiponderante in primo statu ante recessum & augetur figura proportionali quæ ad tertiam sit ut recessus interualum ad $u a$ rectam. Huius verò duplum vnâ cum parallelogrammo cuius latus parallelum rectæ $a h$ se habeat ad $u a$, ut quadratum interualli recessus ad quadratum $u a$, erit tertia proportionalis quæ sita. Nec dissimilis admodum

erit ratio per accessum, vel inuertendo brachium ad partes oppositas, prout ex nona & decima secundi tetragonismicorum patet; & planius fiet ex calculo casuum specialium in sequentibus. Semper verò eiusmodi tertiæ figuræ perinde obtinebitur æquiponderans brachio Ba , perpendicularo au . Istud quoque annotari oportet, figuram $hqiua$ esse totam semicycloidem paruum circulo diametri ua genitam centro y , ita ut pars eius superior sit $uiqy$, inferior $yqtha$; ut ex decima tertia secundi liquet.

COROLLARIUM II.

Totius istius conoidis quadranti æquiponderans cylindraceum altitudinis ap si hoc calculo computetur, eius basis inuenitur esse tres decimæ sextæ partes quadrati aD auctæ circulo genitore diametri uc , & imminutæ nouem decimis sextis quadrati uc . Nam parallelogrammo ugh æquiponderat ex corollario superioris dimidium quadrati ah ; figuræ uth quadrans eiusdem quadrati imminutus quadrante quadrati ac ; figuræ $hoca$ bis sumptæ circulus genitor imminutus duobus quadratis ac . Igitur tertiæ illi figuræ brachio aB , perpendicularo au æquiponderat dodrans quadrati ah auctus circulo genitore, & imminutus nouem quadrantibus quadrati ac ; hoc est tres decimæ sextæ partes quadrati aD vel uA auctæ circulo genitore & imminutæ nouem decimis sextis quadrati uc .

COROLLARIUM III.

Si in vnum confundantur æquiponderantia in superioris propositionis corollario, & in præsentis 2. inuenta, fiet æquiponderans quadranti totius conoidis motu figuræ $uAhc$ circa axem uA geniti, nempe cylindraceum altitudinis ap , baseos æquantis dodrantem quadrati uA vel aD , deducto quadrato uc . Duplum illius dimidio conoidis respondebit, & quadruplum toti, ut in corollario vndecimæ ostensum fuit.

COROLLARIUM IV.

Corollaria non aptari possunt præsentī propositioni, cum opus fuerit.

PROPOSITIO XIV.

Rectæ ab , bg (Fig. 28.) secant se ad normam; centro b descriptus sit circulus per a, g , cuius quadrans $afgb$, sit parabola apg cuius vertex g , axis gb , ordinatim applicata ba : circuli diameter fbg intelligatur suspendi ex centro b perpendicularo ba , & generari prima, secunda, tertia quadratrices gm, gl, gi respondentes quadranti circulari ita ut sicuti est fb ad bq quamlibet portionem rectæ bg , sic sit ordinata qf ad ordinatim qm primæ quadratricis, & qm ad ql ordinatam secundæ, & ql ad qi ordinatam tertiæ. Sit alia quadratrix gyx respondens figuræ $apgb$ ita ut sicuti fb ad br , sic pr parallela rectæ db sit ad rx .

Ostendendum est si intelligatur ad positionem rectæ bg figura bg

Iu cuius limbus sit quadratrix secunda gl , basis bu portio rectæ ab productæ; intelligatur autem alia figura $bg y x u$ cuius limbus sit quadratrix $g y x$; tres figuras quarum prima est parallelogrammum $fb u e$, secunda est limbi gl , tertia limbi $g y x$, ita esse positas ut quæcunque $e l$ parallela rectæ bg ducatur occurrens lineis se , bu , $g y x$, gl in e , u , x , l , tres rectæ $e u$, ul , ux sint proportionales.

Per f ducatur fn parallela rectæ bg occurrens limbo parabolæ in p ; rectæ ab in n , rectæ es in o : igitur per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ on , nf , np sunt proportionales. Rursus quoniam ut fb ad bq ita ex generatione quadratricis est $f q$ ad qm , & qm ad ql ; ut autem fb vel on ad bq vel ad nf , ita est fn vel bq ad np vel ad br ; ergo tribus rectis $f q$, qm , ql proportionales sunt tres fb , bq , br ; ergo ex æquo ut fb ad br , ita $f q$ vel pr ad ql : sed ita etiam ex generatione quadratricis est eadem pr ad rx : ergo duæ rectæ rx , ql sunt æquales, cumque sint parallelæ, recta xl connectens puncta $x l$ æquidistabit rectæ bg : tres igitur rectæ $e u$, ul , ux cum sint æquales tribus on , nf , np sunt proportionales: quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Demonstrationis robur viget in quibuscumque aliis figuris dummodo tres rectæ on , nf , np sint proportionales. Oportet autem cauere ut si recta $e u$ secet in duobus punctis limbos gl , $g y$, sumantur illæ tres $e u$, ul , ux quæ tribus on , nf , np proportionalibus sunt æquales, alioqui peruersè omnia incederent.

COROLLARIUM II.

Quoniam tres rectæ $e u$, ul , ux sunt proportionales patet ex vigesima octaua quarti libri tetragonismicorum, si bu ponatur axis libræ planæ & sustentaculum se , cui ad positionem rectæ bg aptetur dimidium figuræ tertix, ita ut puncto e aptetur dimidium dimetientis ux , & sic de aliis, istud dimidium ita aptatum æquiponderare condita ratione figuræ limbi gl : ergo si libra plana conuertatur in grammicam fg suspensam ex b perpendiculari bu , brachio fb , idem manebit æquiponderans ut ex corollario eiusdem vigesimæ octauæ liquet.

COROLLARIUM III.

Axis bg ita diuidatur in d ut $d g$ ad bd sit sicut ternarius ad binarium, & per d agatur dc parallela rectæ ba ; ex demonstratis in prima quarti tetragonismicorum centrum grauitatis figuræ $ap g b$ est in recta dc : ergo axe ba sustentaculo so , æquiponderans figuræ $ap g b$ est ut fb ad bd hoc est ut quaternarius ad binarium: sed $ap g b$ est bes quadrati bg : ergo æquiponderans figuræ $ap g b$ est quatuor decimæ quintæ partes quadrati bg : ergo tota tertia quadratrix $gi b$ est dimidium illius, nempe duæ decimæ quintæ partes quadrati bg .

Quadratrix prima gmb toti quadrati circulari respondens est ut patet ex decima octava tertij tetragonismicorum triens quadrati bg : secunda glb tota est quadrans figuræ $afgb$, nam cunco baseos $afgb$, cuius acies sit ab , & angulus plani inclinati per a b ducti sit semirectus, æquiperat cylindraceum altitudinis bg baseos æquantis quadrantem figuræ $afgb$ ut in decima tertia primi ostendimus: ergo per methodum vigesimæ quintæ & vigesimæ sextæ quarti tetragonismicorum secunda quadratrix glb tota est quadrans figuræ $afgb$ vel decima sexta pars totius circuli centro b geniti.

PROPOSITIO XV.

SIt (Fig. 29.) quadratum $dbCQ$ cuius diameter bQ ; ex puncto d excitata sit ad planum Qd perpendicularis dz æqualis lateri dQ ; ex centro d descriptus sit quadrans circularis $dzMQ$, qui basis sit cylindri habentis axem db ; ex recta Qd abscissa sit dL ipsi æqualis, & completo quadrato $dbBL$ cuius diameter bL , descripta sit parabola bhl cuius axis bB , ordinatim applicata BL , ac proinde latus rectum db . Intelligatur conus descriptus motu trianguli bLd circa latus manens bd , eiusque quadrans inclusus planis dbB , zdb consideretur in præsentī propositione. Iungatur recta zb , & in triangulo bzd descripta sit parabola $bmoz$ quam tangat recta bd in puncto b , & cuius axis æquidistat rectæ zd . Intelligatur solidum cuius quælibet sectio parallela plano $z d Q$ sit $ecgf$ quadrans ellipseos semiaxium fg lateris parallelogrammi $bfgC$, & fe parallela rectæ dz occurrens rectæ zb in e , & parabolæ $fmoz$ in m : intelligatur aliud solidum cuius sectio parallela plano $z d Q$ sit $m q g f$ quadrans ellipseos semiaxium mf , fg . Recta fg producta occurrat limbo bhl in h , & rectis bL , bQ in i , n ; plani efi sectio cum quadrante coni sit quadrans circularis $ipef$: per h ducta sit ordinata hp ad fi semidiametrum circuli centro f peri descripti. Recta tn parallela rectæ bd occurrat lateribus, dQ , bC in y , t , & per y ducta sit yM ordinata ad semiaxem dQ quadrantis circularis $zMQd$.

Ostendendum est ut est recta ba ad mf ita esse spatium $z d My$ comprehensum arcu $z M$ & rectis zd , My , dy ad spatium $hp e f$ comprehensum arcu pe , & rectis ph , hf , fe : & ita spatium MyQ ad phi : spatiumque $mf n q$ comprehensum arcu $m q$ & rectis mf , fn , nq esse æquale spatio $phfe$; spatiumque $qn g$, spatio phi .

Quoniam enim ut ab dimidium diametri ad ad bf , ita est fg recta ad if , erit ut quadratum ab ad bf , ita quadratum fg ad fi : sed qua-

dratum $a b$ ad $b f$ est vt recta $a b$ ad $f m$ vt ex duodecima tertij tetragonismicorum liquet; ergo vt recta $a b$ ad $f m$, ita est quadratum $f g$ ad $f i$ quadratum: ergo vt recta $a b$ ad $f m$, ita quadrans circularis $z M Q$ ad quadrantem circulare $i p e f$. Rursus quoniam tres rectæ $a b$ vel $f g$, $f i$, $f m$ sunt proportionales ex illa duodecima, quadrans ellipticus $m q g f$ erit æqualis quadranti $i p e f$, ac proinde ad positionem plani $z d Q$ solidum cuius sectio $m q g f$ erit condita ratione æquale quadranti conici cuius sectio $i p e f$. Igitur vt recta $a b$ ad $f m$, ita est quadrans circularis semidiametri $f g$ ad quadrantem ellipticum $m q g f$. Sunt igitur proportionales quadrans circularis semidiametri $f g$, quadrans ellipticus $e c g f$, & quadrans ellipticus $m q g f$; cum sint præditi eodem semiaxe $f g$, & alij semiaxes $f D$ vel $f g$, $f e$, $f m$ sint proportionales; inter se verò sunt vt recta $a b$ ad $b f$.

Rursus quoniam vt $a b$ recta ad $b f$ ita est $f g$ recta ad $f n$, & ita est etiam ex duodecima illâ tertij, recta $f i$ ad $h f$; semiaxes $f i$, $f g$ secantur proportionaliter in h & n : ergo cum quadrans ellipticus $m q g f$ sit æqualis quadranti $e f i$, & semiaxes $f g$, $f i$ secantur proportionaliter in n & h , erit $f m q n$ portio æqualis portioni $p e f h$, & portio residua $q g n$ residuæ $p h i$: Tres ergo portiones $z d y M$, $e f n c$, $m f n q$ sunt proportionales tribus rectis $a b$, $b f$, $f m$; tresque item $M y q$, $c n g$, $q n g$: ergo ex æquo vt $a b$ ad $f m$ ita est $z d y M$ ad $f m q n$ vel $p h f e$; & ita etiam est $M y q$ ad $q n g$ vel $p h i$; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM

Quoniam vt $f g$ ad $f i$ vel $f e$, ita est $f e$ ad $f m$, & semiaxes $f g$, $f i$ secantur proportionaliter, tres rectæ $M y$, $p h$, $q n$ erunt proportionales tribus $a b$ vel $f g$, $f n$ vel $b f$, & $f m$: ergo cum tres etiam $M y$, $c n$, $q n$ sint proportionales iisdem tribus, erunt $c n$, $p h$ æquales; ac proinde septimum medium, hoc est portio superficiæ cylindricæ descriptæ motu rectæ parallelæ ad rectam $z d$ incidentis per lumbum $b h L$ inclusa quadrante conici ad positionem plani $z d Q$, habebit easdem altitudines cum septimo medio siue portione plani $E b Q$ recti ad planum $d b C$ intercepto intra quadrantem solidi elliptici $e c g f$. Præterea descriptus sit quadrans circularis $b a C$, & in eo quadratrices prima $b r C$, secunda $b o C$ occurrentes rectæ $n t$ in r , o : quoniam vt $a b$ vel $B b$ ad $b f$ vel ad $f n$, ita est $M y$ vel $t s$ ad $c n$, & $c n$ ad $q n$, & ita quoque est $t s$ ad $t r$, & $t r$ ad $t o$ vt ex generatione quadratricum liquet, erunt $c n$, $q n$ æquales rectis $t r$, $t o$, & rectangula $t n c$, $t n q$ erunt æqualia rectangulis $n t r$, $n t o$; & cuneatum cuius sectio est $t n c$, cuneato, cuius sectio est $n t r$, & ita de aliis.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem manentibus sectio plani $t y M$ cum superficie solidi cuius sectio est $e c g f$, est linea recta $t c M$; sectio verò cum solido cuius

sectio $m q g f$, est parabola $t q M$ cuius tangens $t y$, axis æquidistat rectæ $y M$.

Quoniam enim ut $B b a d b t$, hoc est ut $t y$ ad $t n$, ita est $M y$ ad $c n$; & $c n$ ad $q n$; & ita quoque est $z d$ ad $e f$ & $e f$ ad $f m$; sicuti $b e z$ est recta ita quoque $t c M$ erit recta, & sicuti $b m z$ est parabola quam tangit $b d$ & cuius axis æquidistat rectæ $d z$, ita quoque $t q M$ erit parabola quam tanget recta $t y$, & cuius axis æquidistabit rectæ $M y$; id enim ex eo patet quod ordinatim utrinque applicatæ & parallelæ ad rectam $z d$ sint perpetua lege inter se ut rectæ $z d$, $M y$: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam $t n q$ est ceratoides parabolica, patet figuram $t n q$ esse trientem parallelogrammi $t n q$, ac proinde portionem solidi cuius sectio $f m q g$ intercepta planis ad planum $d b C$ rectis $E b C$, $E b Q$ esse ad positionem plani $E b d$ æqualem trienti solidi geniti ex triangulo $Q b C$ & ex quadratrice secunda $b o C$. Tota igitur portio erit ut ex corollario tertio decimæ quartæ patet, æqualis cylindræo altitudinis $b E$ æquantis rectam $b C$, cuius basis sit duæ quadragesimæ quintæ partes quadrati $b C$; Cum autem ex superiore propositione portio quadrantis conii iacens inter septum medium & planum $E b L$ sit ad positionem plani $E b B$ condita ratione æqualis portioni solidi cuius sectio $m q g f$, intercepti inter plana $E b Q$, $E b C$, patet totam illam conii portionem esse æqualem eidem cylindræo.

COROLLARIUM II.

Quod si quæraturs portionis eiusdem pars intercepta planis $E b B$, $e f i$, illa erit æqualis cuneato genito ex triangulo $b n t$ & ex secunda quadratrice $b t o$, noto per methodum corollarij secundi suprâ laudati, & ex cylindræo altitudinis $n g$, baseos $t n q$ quæ est portio nota ceratoidis parabolicæ, Illa itaque pars erit æqualis cylindræo eiusdem altitudinis, baseos æquantis rectilineum notum.

COROLLARIUM III.

Quoniam si iungatur recta $p f$, sector $i f p$ componitur ex figura $i p h$ & ex triangulo $h f p$, hoc est ex dimidio parallelogrammi $f h p$ vel $f n q$, solidum cuius sectiones sint sector $i f p$ & alij similiter sumpti, erit ad positionem plani $E b C$ condita ratione æquale solido cuius sectio est $i p h$ suprâ computato, & dimidio solidi geniti ad positionem plani $E b C$ ex triangulo $b d Q$ & ex septo medio cuius dimetiens $q n$, hoc est dimidio solidi geniti ad positionem plani $E b d$ ex triangulo $Q b C$: & ex quadratrice $b o C$. Erit igitur ut ex superiore corollario patet æquale cylindræo altitudinis $E b$, baseos æquantis rectilineum notum; & pro casu totius figuræ basis eiusmodi erit una decima quinta pars vel tres quadragesimæ quintæ partes quadrati $b C$. Igitur solidum cuius sectio parallela
plano

LIBER TERTIVS.

73

plano $E b C$ est sector $p f i$, est æquale cylindræo altitudinis $E b$, baseos æquantis rectilineum notum, quod in casu iam computato erit quinque quadragesimæ quintæ partes, vel vna nona quadrati $b C$. Duplum verò eiusmodi solidi erit æquale cylindræo altitudinis $E b$, baseos æquantis duas nouenas partes quadrati $b C$.

COROLLARIUM IV.

Iungatur recta $d M$, patet sectorem $M d Q$ esse similem sectori $p f i$: est enim vt $Q d$ ad $d y$, ita $f i$ ad $f h$: ergo arcus $M Q$, $i p$ sunt similes, atque adeo sectores $M d Q$, $p f i$. Si igitur recta $f i$ producta occurrat rectæ $L B$ in F , & intervallo rectæ $f F$ describatur quadrans circularis $F G D f$ & per i ducatur $i G$ parallela rectæ $D f$ occurrens arcui $F D$ in G , arcus $F G$ erit æqualis arcui $M Q$, cum rectæ $d y$, $f i$ vel $f n$ sint æquales, ergo recta $f p$ producta transit per G ; vt sectores $G F f$, $p f i$ sint similes.

COROLLARIUM V.

Hinc denique patet si in cylindro cuius basis sit quadrans circularis $L z d$, axis $d b$, consideretur quadrantis cylindri portio intercepta planis $E b L$, $E b B$, hoc est cuneus primus; vnà cum portione solidi cuius sectio est triangulum $G f i$, hoc est vnà cum semicuneo primo cuius basis est quadrans ellipseos axium $L b$, $b E$, eiusmodi solidum ex duobus genitum, ad solidum cuius sectio est sector $p f i$ compositum ex duobus aliis solidis esse conditæ ratione ad positionem plani $E b C$ vt est recta $b a$ ad $f m$, vel vt quadratum $b a$ ad $b f$. Res autem in idem redit quamuis inter parallelas $B C$, $L Q$ anguli parallelogrammi $L B C Q$ non sint recti vt in nona primi libri monuimus.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem manentibus (*Fig. 30.*) angulus $L B b$ sit semirectus, ac proinde angulus $L b C$ rectus, sintque $L b$, $b C$ æquales: per a ducta sit $a t$ parallela rectæ $B C$, vt plani $E b L$ sectio cum cylindro baseos $L z Q$, cuius axis $b d$, sit citculus diametrit L vt in septima primi ostendimus. Quadrans circularis $E b L G$ fiat genitor semicunei expansi $L y n b$, ita vt eius dimetiens $i y$ sit æqualis arcui $L G$, vel $F G$. Figuræ $L y n b$ libræ grammica $t L$ suspensâ ex b perpendicularo $b n$, brachio $b t$ respondeat prima quadratrix $L c b$, & secunda $L q b$, ita vt sicut brachium $t b$ ad longitudinem $b i$ (hoc est $a b$ ad $b f$) ita sit $i y$ ad $i c$, & $i c$ ad $i q$.

Ostendendum est ad positionem rectæ $b n$, quadratricem secundam esse æqualem rectilineo noto; & quando tota sumitur, esse æqualem duabus nouenis partibus quadrati $b C$.

Quoniam enim vt quadratum $a b$ ad $b f$, vel vt quadratum $t b$ ad $b i$, ex corollario vltimo superioris ita est sector $G F f$ ad sectorem $p f i$ & ita duplum sectoris illius ad duplum istius; rectangulum autem altitudinis

K

b C baseos y i est per demonstrata in tertia primi libri æquale duplo sectoris G F f: ergo si rectangulum eiusdem altitudinis baseos i r sit æquale duplo sectoris p i f, vt est quadratum t b ad b i ita erit rectangulum ad rectangulum, ac proinde basis i y ad basim i r. Quoniam verò vt t b recta ad b i, ita ex generatione quadraticum est recta y i ad c i, & c i ad c q; ergo vt quadratum t b ad b i, ita est recta y i ad i q: sed ita etiam ostendimus esse eandem i y ad i r: ergo recta i q, i r sunt æquales: ergo rectangulum altitudinis b C, baseos q i quæ est dimetiens ordinata secundæ quadratricis L q b est æquale duplo sectoris p i f. Igitur per vndecimam quarti tetragonismicorum solidum cuius sectio sit dupla sectoris p i h est ad positionem plani E b C condita ratione æquale cylindræo altitudinis E b vel b C, baseos L r b quæ est secunda quadratrix: ergo cum ista basis sit ad positionem rectæ b C rectilineo noto æqualis per corollariū tertium superioris, erit quadratrix secunda æqualis rectilineo noto ad eandem positionem, & tota L q b erit æqualis duabus nouenis quadrati b C, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam vt t b ad b i ita est i y ad i c; & ita quoque est arcus F G ad arcum similem p i; recta vero y i ponitur æqualis arcui F G ex generatione ipsius figuræ L y i: ergo recta i c est æqualis arcui i p conici cuius axis b d, basis L z Q. Cum igitur ex primi decima sexta eiusque corollario primo habeamus quadratricem primam L c b, habemus etiam portionem illam superficiæ conicæ expansam. Similem superficiæ conoideos parabolici obtineremus, si necessarium id foret; quamuis neque istud corollarium erat necessarium; sed prætermittere id noluimus, cum vno verbo absolueretur: huc tamen reuocari ea oportet quæ in scholio propositionis octauæ libri secundi scripsimus.

COROLLARIUM II.

Quoniam, vt ex nona secundi tetragonismicorum liquet, si ex b L producta auferatur L s æqualis rectæ b L & fiat brachium libræ suspensæ perpendiculo L d, quadratrix prima subcontraria figuræ L y n b ita suspensæ est figura L y n b c, hoc est suspensa figura imminuta quadratrice primæ prioris perpendiculi, quæ absolutè vocatur prima, nam alia dicitur subcontraria; igitur secunda subcontraria erit suspensa figura imminuta bis primæ quadratrice & aucta semel secundæ. Suspensa enim figura notetur elemento A, & quadratrix prima B, secunda C. Patet vt A ad A - B ita esse A - B ad A - B - B + C.

COROLLARIUM III.

Ex simili ratiocinij methodo si pro axe primario b n sumatur quilibet i g inter rectas b n, L Q brachium verò maneat æquale rectæ b t, & suspensum vocetur A vt supra, prima quadratrix erit per decimam secundi tetragonismicorum. B - a. Voco a spatium quod ad A sit vt recta i b ad b t, simili pacto b, & c voco spatia quæ ad B & C sint in eadem ratione: b

b autem & c c quæ ad B & C sint in duplicata ratione, & ita de b b b in triplicata &c. Igitur ut A ad B — a ita erit B — a ad C — b — b — c. Quod si punctum i iaceat ultra puncta L, b ad partes t erit prima quadratrix B † a, secunda verò C † b † b † c c. Quæ progressio potest in infinitum propagari, ut intelligunt qui istis sunt assuefacti.

PROPOSITIO XVIII.

Sit semicuneus (Fig. 31.) expansus c b a f genitus circulo diametri c f, ex c f producta abscissa sit f T æqualis rectæ f g, & genita sit b n f g brachio f T perpendicularo f a quadratricis quadratrix respondens parti inferiori b i a f g.

Ostendendum est posito tetragonismo circuli istam quadratricem secundam esse rectilineo noto æqualem; & totam f n b g esse æqualem septem vnciis circuli genitoris diametro f c descripti, deductis vndecim trigesimis sextis quadrati f c.

Quoniam completo parallelogrammo e b d a, ex superioris corollario secundo figuræ e a i b secunda quadratrix est ipsa e a i b, quæ est æqualis quadrato g c, vñ cum secundâ quadratrice notata ibidem elemento C quæ est duæ nouenæ quadrati g c, deductâ bis primâ quadratrice quæ per primi decimam sextam est bis semiquadrans, vel semel quadrans circuli genitoris; quadratrix quadratricis figuræ e a i b erit vndecim nouenæ quadrati c g deducto quadrante circuli genitoris. Sed quadratrix quadratricis parallelogrammi f g e a est, ut patet per duodecimam tertij tetragonismicorum, triens ipsius parallelogrammi quod per corollarium secundum secundæ est æquale circulo genitori: ergo quadratrix quadratricis figuræ a i b g f est circuli genitoris septem vnciæ deductis vndecim nouenis quadrati g c, vel vndecim trigesimis sextis quadrati f c, quod pro casu designato erat demonstrandum.

In aliis verò casibus methodus est eadem positâ superiore propositione, eiusque corollariis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam ex corollarij secundi superioris propositionis methodo quadratrix secunda partis c z b g vt iacet manentis brachio T f perpendicularo f a est † A † bis B † C erit vndecim nouenæ quadrati g c auctæ quadrante circuli genitoris. Ergo quadratrix quadratricis toti c b a f respondens est decem vnciæ vel quinque sextantes circuli genitoris.

COROLLARIUM II.

Quadratrix secunda quarumlibet partium in figura c b a f assignatarum, notam esse, perpendicularo f a vel quouis ei parallelo, patet examinantem rem, neque res eget noua vlla demonstratione homini cui istorum contemplatio est familiaris.

Iisdem manentibus ad planum $a f c$ excitetur perpendicularis $f x$ æqualis rectæ $f g$; intelligatur conoides genitum circa rectam $f a$ reuolutione totius $c b a f$; itemque aliud circa $b g$ reuolutione figuræ $c z b g$; denique aliud circa quamcumque $l i$ parallelam basi $f a$ reuolutione figuræ $i z c l$.

Ostendendum est librâ grammicâ $T g$ suspensâ ex f perpendicularo plano $x f d$, brachio $T f$ æquante rectam $f g$, æquiponderans totius conoidis dimidio iacenti ad partes c esse æquale cylindræo altitudinis $f x$ vel $f g$, baseos æquantis trientes quinque circuli genitoris diametro $c f$ descripti. In secundo verò casu si compleatur parallelogrammum $g f x d$ diuidaturque in duo $g l u$, $u l f$, æquiponderans dimidio conoidis descripti circa rectam $b g$ manentem, librâ $f c$ suspensâ ex g perpendicularo plano $d g b$, brachio $g f$, esse æquale cylindræo altitudinis $g d$, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati $g c$. In tertio denique casu librâ $f g$ suspensâ ex l perpendicularo plano $u l i$, brachio $l o$ æquante rectam $g f$ esse æquale cylindræo eiusdem altitudinis, baseos noto rectilineo æqualis, datâ quadraturâ circuli.

Quoniam ex superioris corollario primo quadratrix secunda figuræ $a b c f$ librâ $T g$ suspensa ex f perpendicularo $f a$, brachio $T f$, est quinque sextantes circuli genitoris, ex corollario secundo octauæ triplum huius spatij erit quartus gradus ad positionem rectæ $f c$, quorum primus sit parallelogrammum dimetientis $f T$, secundus figura $a b c f$. Igitur ex corollario quarto eiusdem octauæ æquiponderans solido cuius sectiones sint quadrata parallela plano $x f g$, latera sint ordinatim applicatæ ad basim $f a$, est cylindræum altitudinis $f x$, baseos quæ sit dimidium quarti gradus. Rursus ex sexta bes istius cylindræi est æquiponderans peripherico cuius sectio est quadrans circuli inscripti quadrato cuius latus sit duplum ordinatim applicatæ: huius verò besis duplum est æquiponderans dimidio conoidis ad partes c posito: ergo cum ex ductu harum minutiarum $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ in se ipsas gignatur minutia, æquiponderans quæsitum erit cylindræum altitudinis $f x$ baseos duplæ spatij inuenti in superiore propositione; eiusmodi ergo basis pro primo casu est quinque trientes circuli genitoris: pro secundo (eadem enim ratio) est quatuor nouenæ partes quadrati $g c$; pro tertio denique duplum inueniendi spatij ex methodo superioris, eiusque corollariorum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Secent se (*Fig. 32.*) ad normam duæ quælibet rectæ $b a$, $a c$; ad positionem rectæ $a c$ insistant rectæ $b a$ figura quæcumque $b i c a$, &c.

eadem $b i c a$ ad positionem rectæ $b a$ insistant rectæ $a c$, ita ut omnes parallelæ ad rectas $b a$, $a c$ cadant intra figuram $b i c a$. Intelligatur ex puncto a excitari ad planum $b a c$ perpendicularis $x a$; concipiatur solidum cuius omnes sectiones parallelæ plano $x a b$ sint quadrata quorum latera sint ordinatim applicatæ ad rectam $a c$, vel certè quadrantes circulorum ut in superiore & in sexta exposuimus; intelligatur aliud solidum cuius sectiones ad positionem plani $x a c$ sint ut modo diximus quadrata vel quadrantes circulorum. Ex rectis $a c$, $a b$ abscindantur $e a$, $a d$ inter se æquales.

Ostendendum est solido sectionis quadratæ genito ad positionem plani $x a c$, brachio $d a$, perpendicularo plano $x a c$ æquiponderare idem spatium quod solido sectionis quadratæ genito ad positionem plani $x a b$, brachio $e a$ perpendicularo plano $x a b$. Idemque æquiponderans respondere solidis sectionum periphericarum pari pacto comparatis.

Compleatur parallelogrammum $e a b h$, & super recta $h e$ ad positionem rectæ $a c$ insistant figura $h m a e$ cuius quælibet dimetiens $t m$ parallela rectæ $a c$ sit tertia proportionalis post primam $t f$ dimetientem parallelogrammi $e a b h$, & secundam $f i$ dimetientem figuræ $b i c a$; per m ducatur $m q$ parallela ad rectam $h e$; ex punctis e , q educantur perpendiculares $e o$, $q p$ ad planum $h e a$ æquales dimetientibus $h e$, $m q$ figuræ $h m a e$, & iungantur rectæ $h o$, $m p$ quæ erunt sectiones planorum $o e h$, $p q m$ & superficiæ cylindraceæ descriptæ motu rectæ parallelæ ad rectam $h o$ incidentis per limbum $h m a$, ut in corollario tertio primæ notatum extat. Intelligatur quoque superficiæ cylindracea descripta simili pacto motu rectæ ad rectam $h o$ parallelæ incidentis per limbum $b i c$. Per i ducatur planum parallelum plano $x a c$ cuius cum solido contento sub basi $b i c a$ & sub cylindracea superficiæ modo descripta sit figura $f s i$; sectio verò cum solido comprehenso sub basi $h m a e$ & sub superficiæ cylindracea primò descripta sit $r t m$.

Quoniam ut in primæ pari prorsus casu ostendimus figura $f s i$ est eadem cum figura $b f i$, & figura $r t m$ eadem quoque est cum figura $h t m$; dimidium autem figuræ $h t m$ ad positionem rectæ $a c$ aptatum sustentaculo $h e$ axe $b a$ æquiponderat figuræ $b f i$ ut iacet manenti: ergo in plano $r t i$ figuræ $f s i$ ut iacet manenti axe $f f$ sustentaculo $t r$ æquiponderabit dimidium figuræ $r t m$ aptatum sustentaculo $r t$. Igitur ex vigesima octava quarti tetragonismicorum dimidium solidi cuius sectio est triangulum $p m q$ aptatum plano $h e o$ ad positionem plani $x a c$ æquiponderat condicta ratione solido cuius sectio est triangulum rectangulum $i h u$ habens latera $i h$, $h u$ æqualia, posito libræ planæ axe $b a$, perpendicularo plano $x a b$, sustentaculo plano $h e o$; siue quod in idem redit recta $h e$

obeunte vicem sustentaculi. Igitur solido cuius sectio est quadratum lateris hi duplum trianguli ihu , ad positionem plani xac æquiponderat iisdem positis solidum cuius sectio est triangulum mqp . Sed solidum cuius sectio est triangulum pqm est ad positionem plani xab idem cum solido cuius sectio est triangulum qym contentum sub lateribus qm , my parallelogrammi $pqmy$, & sub qy eius altera diametro: sunt enim triangula pmq , ymq æqualia: ergo cum solidum cuius sectio est triangulum ymq habens angulum yqm semirectum, & angulum qmy rectum, sit ex vigesima tertia quarti tetragonismicorum æquale spatio quod cylindraceo altitudinis xa baseos $hmae$ æquiponderat libræ planæ axe a c perpendicularo plano xac , sustentaculo dg latere parallelogrammi $dacg$, patet spatium quod axe ba , sustentaculo he æquiponderat solido cuius sectio est quadratum lateris ih vel hu esse æquale solido cuius sectio est triangulum pqm . Cum igitur per methodum undecimæ cylindraceum cuius basis est $hmae$ altitudo xa habeat ad positionem plani xac idem æquiponderans cum solido cuius sectio parallela plano xac est quadratum lateris fi , patet solido cuius sectio est quadratum lateris fi axe a c sustentaculo dg æquiponderare idem spatium quod solido cuius sectio parallela plano xab est quadratum lateris hi , axe a b sustentaculo he , quod erat demonstrandum. Nam de solidis periphericis cum eorum periphericæ sectiones sint proportionales sectionibus quadratis, rationum consequutio idem euincit.

COROLLARIUM I.

Hic si quando opus fuerit adhiberi cum proportionibus debent corollaria primæ, ut patet.

COROLLARIUM II.

Rectæ a c insistant ad positionem rectæ ad figura $adnc$ tertia post primam $adgc$, & secundam $abie$, ita ut tres dimetientes lh , hi , hn sint proportionales; ex demonstratis liquet quadratricem figuræ $hmae$ libræ da suspensa ex a perpendicularo ae , brachio ad , esse æqualem spatio quod figuræ $adnc$ æquiponderat libræ ec suspensa ex a perpendicularo ad brachio ca . Nam solidis quorum sectiones sunt quadrata laterum fi , hi æquiponderant ex præsentibus æqualia spatia; ex prima verò illa spatia æqualia sunt cylindraceo altitudinis ax , basium æquantium spatia æquiponderantia modo iam præscripto figuris $hmae$, $adnc$ ergo &c. quod erat demonstrandum. Hanc porro propositionem extendemus ad curvas in septimæ libri quinti corollario secundo.

PROPOSITIO XXI.

REuocatâ figurâ undecimæ & decimæ tertiæ (*Fig. 27.*) circa axem a c manentem gigni conoides motu figuræ Ahc intelligatur. Ostendendum est libræ u c suspensa quolibet perpendicularo y b sine punctum y congruat puncto a , vel puncto u , siue non congruat, bra-

olio æquante rectam ac , æquiponderans conoidis istius portioni quæ iacet ad rectæ yr partes h esse idem cum æquiponderante conoidis alterius dimidio geniti circa axem $y b$ motu eiusdem figuræ inuento in illis iam laudatis propositionibus.

Istud ita apertum est ex propositione superiore, ut nihil addendum sit, ne quicquam otioso scribatur calamo, dum ad alia currimus.

PROPOSITIO XXII.

Reuocetur (*Fig. 31.*) figura decimæ octauæ, & ex recta af abscindatur fp æqualis rectæ Tf vel fg : intelligatur circa axem fc gigni conoides motu figuræ $c b i L$, ita ut punctum L sumptum sit ad libitum.

Ostendendum est centrum grauitatis dimidij conoideos abscissi plano ulc esse notum.

Per quartam inueniatur A cylindraceum æquale suspenso; per septimam & decimam inueniatur cylindraceum B æquale spatio quod axe fc , perpendicularo plano $xf c$, sustentaculo $S p$ latere parallelogrammi $p f c S$ æquiponderat suspenso. Per superiorem inueniatur cylindraceum C æquale spatio quod axe li , perpendicularo plano $ul i$ sustentaculo $o r$ latere parallelogrammi $l h t o$, eidem solido æquiponderat. Ut est A suspensum ad B æquiponderans, ita fiat recta pf ad $l q$ abscissam ex lh : ut autem est A ad C ita fiat lo brachium ad rectam lg abscissam ex lc : compleatur parallelogrammum $q l g r$.

Dico punctum r esse centrum grauitatis solidi quod ad rectæ fc partes b iacet.

Primò centrum grauitatis eiusmodi portionis solidi est in plano $c f a$, cum sectiones illius plano $ul h$ parallelæ, sint semicirculi diuisi bifariam per ipsum planum. Præterea ex puncto r excitetur perpendicularis rs ad planum $h l c$, ergo ex lege æquiponderantium reciproca cum ut suspensum A ad æquiponderans B , ita sit interuallum fp ad gr , centrum grauitatis suspensi erit in plano $sr q$ parallelo ad perpendicularum planum $ul c$. Simili pacto cum ut suspensum A ad æquiponderans C , ita sit interuallum ol ad lg , centrum grauitatis suspensi erit in plano $sr g$; ergo erit in eorum communi sectione. sr : sed est etiam in plano $bg f$: ergo punctum r est centrum grauitatis solidi propositi; ergo istud centrum est notum; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si tota portio solidi quam vtrinque abscindit planum $ul i$ sumatur, patet eius centrum grauitatis esse punctum g .

PROPOSITIO XXIII.

MAnente eadem figura decimæ octauæ, circa manentem li intelligatur circumuolui eadem figura $iz c l$.

Ostendendum est centrum grauitatis dimidij conoideos abscissi plano u li esse notum.

Per decimam nonam primi libri inueniatur A cylindraceum æquale suspenso; & per decimam nonam præsentis spatium C æquiponderans suspenso libræ axeli perpendiculo plano u li, sustentaculo o t; per undecimam & decimam tertiam inueniatur spatium B quod æquiponderet suspenso libræ planæ axeli c, perpendiculo plano u l c, sustentaculo p S. Ut est A ad B ita fiat o l recta ad l q; & ut A ad C, ita fiat ad l g. Dico completo parallelogrammo q l g r, punctum r esse centrum grauitatis quæsitum. Istud ostenditur ut superior propositio.

COROLLARIUM.

Si tota portio solidi sumatur, patet eius centrum grauitatis esse punctum q.

PROPOSITIO XXIV.

OCTO problematis ab Anonymo propositis solutionem esse hæcenus à nobis pro cycloide paruâ datam demonstrare.

Primò iisdem manentibus quæritur dimensio spatij z c y. Demonstratur in duodecima primi libri & in eius corollariis.

Secundò quæritur centrum grauitatis spatij z c y. Demonstratur in corollario tertiz.

Tertiò quæritur solidum circa basim z y. Demonstratur in decima nona primi libri.

Quartò quæritur solidum circa axem c y. Demonstratur in quartâ huius libri.

Quintò quæritur solidi totius circa basim z y centrum grauitatis. Demonstratur in corollario superioris.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi totius circa axem c y. Demonstratur in corollario vigesimæ secundæ.

Septimò quæritur grauitatis centrum dimidij solidi circa basim z y diuisi à plano per rectam z y ducto & recto ad c y z planum. Demonstratur in superiore.

Octauò quæritur centrum grauitatis dimidij solidi circa c y geniti & diuisi à plano per rectam c y ducto & recto ad planum c y z. Demonstratur in vigesima secunda propositione: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

Proponitur calculus octo problematum pro duplici casu quem Anonymus in primis ad Europæ Geometras literis designauit.

Sit a c d (Fig. 33.) cycloides parua circulo genitore diametri c f, eiusque pars superior sit b c o, inferior b o d a; rectæ g e, si abscissæ ex rectis b o, a d æquent singulæ rectam c g: ad planum c f a ex puncto f excitata sit perpendicularis f n æqualis rectæ f g, & completum sit parallelogrammum

logrammum $nfgm$. Vt quadratum circulo circumscriptum se habet ad ipsum circulum ita ponatur recta fn ad fu : intelligatur perspectæ progressionis in fronte huius libri definitæ primus terminus esse quadratum gc , vt secundus sit circulus genitor diametri fc , & tertius quadratum fa : erit ergo recta fn ad fu vt quadruplum primi termini perspectæ progressionis definitæ initio huius libri ad secundum: vel vt primus terminus ad quadrantem secundi. Per solos terminos istius perspectæ progressionis definiemus singulorum casuum epilogismum, vt methodi ratio clarior euadat, & vt quàm proximè ad vera spatia, rectas, & puncta accedere quilibet possit, assumpto quod Archimedes in tertia propositione circuli dimensionis demonstrauit, secundum huius progressionis terminum esse triplum primi, & adhuc superare parte quapiam quæ quidem minor est septima primi, maior autem decem septuagesimis primis eiusdem termini primi. Quod si quis recentiorum numeros alios grandiores & propius accedentes ad veram istius progressionis rationem abhibere maluerit, ipsi integrum esto.

Primò quæritur segmentum acd , itémque segmentum bco . *Istud constat ex duodecima propositione primi libri.*

Segmentum acd æquat duplum termini secundi progressionis perspectæ; segmentum bco æquat duplum termini primi.

Secundò quæritur grauitatis centrum pro figura $czbg$, itémque pro figura $cba f$. *Istud obtinebitur ex corollario secundo secundæ propositionis.*

Vt est primus terminus ad dimidium secundi imminutum primo, ita fiat recta ge ad gq abscissam ex gb . Vt autem idem primus terminus ad octauam partem secundi, ita fiat recta gf ad gy abscissam ex rectâ gc . Completo parallelogrammo $y g q p$, dico punctum p esse centrum grauitatis in figura $czbg$.

Præterea vt est secundus terminus ad dimidium tertij imminutum duplo primi, ita fiat recta fi ad fr abscissam ex fa : punctum t ita secet rectam $c f$ vt tota $c f$ ad ft sit sicut octonarius ad ternarium. Completo parallelogrammo $t f r s$, dico punctum s esse centrum grauitatis in figura $c b a f$.

In figuris autem bco , acd centra grauitatis sunt y & t .

Tertiò quæritur solidum genitum circa basim bo circumuolutione figuræ bco , itémque aliud circa basim ad circumuolutione figuræ acd . *Istud obtinetur per decimam nonam primi libri.*

Solidum genitum circa rectam bo est æquale cylindræo altitudinis fn , baseos æquantis duplum secundi termini; vel per leges reciproationis altitudinis fn , baseos æquantis dimidium tertij termini. Solidum verò aliud est æquale cylindræo altitudinis fu , baseos æquantis duode-

cim terminos secundos, vel reciprocè altitudinis fn , baseos α quantis triplum tertij termini perspectæ progressionis.

Quartò quæritur solidum genitum circumuolutione figuræ $czbg$ circa rectam cg manentem; & aliud præterea genitum circumductu figuræ $cba f$ circa rectam cf manentem. *Istud habetur ex quarta propositione.*

Solidum primò quæsitum est æquale cylindræo altitudinis fu , baseos α quantis quadruplum secundi termini imminutum octuplo primi: vel reciprocè altitudinis fn , baseos α quantis tertium terminum, imminutum duplo secundi. Alterum verò solidum est æquale cylindræo altitudinis fu , baseos α quantis quadruplum tertij, termini imminutum sexdecuplo primi: vel reciprocè altitudinis fn , baseos α quantis quartum terminum imminutum quadruplo secundi.

Quintò quæritur centrum grauitatis solidi circa bg geniti motu figuræ $czbg$, itémque alterius geniti motu figuræ $cba f$ circa manentem af . *Istud obtinetur ex corollariis undecimæ & decimæ tertie libri præsentis.*

Vt secundus progressionis terminus ad quadrantem tertij imminutum primo, ita fiat recta ge ad gq abscissam ex recta gb . Dico punctum q esse centrum grauitatis pro primo casu.

Vt autem sextuplum eiusdem secundi termini ad triplum tertij imminutum sexdecuplo primi, ita fiat recta fi ad fr abscissam ex recta fa . Dico punctum r esse centrum grauitatis pro casu secundo.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi circa cg geniti motu figuræ $czbg$, itémque alterius geniti motu figuræ $cba f$ circa manentem cf . *Habetur ex vigesima prima & ex corollariis undecimæ & decimæ tertie.*

Vt quadruplum secundi termini imminutum octuplo primi se habet ad quadrantem tertij imminutum primo, ita fiat recta fg ad gy abscissam ex gc . Dico punctum y esse centrum grauitatis pro primo casu.

Vt autem quadruplum tertij imminutum sexdecuplo primi se habet ad triplum eiusdem tertij imminutum sexdecuplo primi, ita fiat recta xf ad ft abscissam ex fc . Dico punctum t esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Septimò solidum genitum circa rectam bg circumuolutione figuræ $czbg$ intelligatur diuidi bifariam per planum $mg b$, nec non solidum genitum circa rectam fa circumuolutione figuræ $cba f$ per planum $nf a$. Quæritur centrum grauitatis dimidij solidi in vitroque casu. *Obtinetur per decimam nonam propositionem.*

Vt octaua pars tertij termini ad quatuor nouenas primi, ita fiat recta

g f ad g y abscissam ex g c, & manente puncto q in solutione quinti re-
per- to compleatur parallelogrammum y g q p. Dico punctum p esse centrum
grauitatis pro primo casu.

Vt autem tertij termini dodrans ad quinque trientes secundi ita fiat
recta f x ad f t abscissam ex recta f g, manente autem puncto r reper- to in
solutione quinti compleatur parallelogrammum t f r s. Dico punctum s
esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Octauò solidum genitum circa rectam c g circumductu figuræ c z b
g intelligatur bifariam diuidi per planum m g c, item aliud ex circum-
ductu figuræ c b a f concipiatur bifariam secari per planum n f c. Quæ-
ritur centrum grauitatis dimidij solidi pro utroque casu. *Habetur ex
septima & decima corollariis.*

Vt dimidium tertij termini imminutum secundo ad idem dimidium
tertij imminutum quadruplo primi, ita fiat g e recta ad g q abscissam ex
g b; manente autem puncto y quod in solutione sexti repertum est, com-
pleatur parallelogrammum y g q p. Dico p esse centrum grauitatis quæ-
situm in primo casu.

Rursus vt dimidium quarti terminni imminutum duplo secundi ad bef-
sem quarti termini imminutum quadruplo secundi, ita fiat f i recta ad
f r abscissam ex f a; manente verò puncto t quod in solutione sexti suprâ
inuenimus compleatur parallelogrammum t f r s. Dico punctum s esse
centrum grauitatis pro secundo casu. Ergo &c. quod erat propositum.

S C H O L I V M I.

Cum vt suspensum ad æquiponderans, ita sit x f ad f t, & i f ad f r, & e g ad
g q, & f g ad g y, ; ipsa verò suspensa & æquiponderantia sint interdum solida, lo-
co ipsorum solidorum vsurpauimus in calculo bases eorum ad eandem altitudinem reuo-
catorum; tunc enim vt solida, ita & bases. Torrò vt dignoscamus pingui quadam
minerua inter computandum virum punctorum q, y, r, t epilogismus rectè incedat
duæ istæ regulæ adhiberi possunt. Prima est, portiones a r, b q, c t, e y esse maiores di-
midio ipsarum rectarum a f, b g, c f, e g. Altera est, in solidis easdem a r, b q, c t,
e y esse maiores, quàm in planis. Si itaque in subducendis rationibus appareat ali-
quid peccari contra aliquam harum regularum, cobibendus est calculus, & retroce-
rendus quousque origo erroris occurrat. Id autem nullo negotio apparere potest exerci-
tatis cogitantibus secundum terminum continere ter primum & vnam fernè septimam
ipsum. Atque hæc omnia obseruanda erunt in calculo quem sub calcem libri sequentis
adscripsimus. Superest vt ad ipsum quartum librum progrediamur, in quo inuenien-
do mirum quantum laborauit mens nostra, nec vnquam nisi illi Deus optimus speciali
face præluxisset, rem inuentu difficillimam explorassit.

S C H O L I V M I I.

Quori in Autor Historiæ Cycloideos multa de me scribit calumniæ, non possum
quin literas D. Pascalij ad me datas hîc representem, quarum sola lectiõne falsitas
Historiæ manifesta fiat. Is igitur cum Parisios misissim calculum duplicem solidi circa

axem geniti, de quo problema præsentis propositionis quartum agit, respondi XI. Septemb. 1658. in hæc verba. Utinam, mi Pater, inspicere posses quantum sit illud gaudium quo postremæ tuæ literæ me affecerunt, quando in iis legite inuenisse dimensionem solidi circa axem tam cycloideos totius, quàm dati segmenti. Credas velim neminem esse qui mihi par sit in extollendis meritis hominum: sed, fateor, ad id non adducor vnquam nisi graui de causa. Rara, profectò & eximia virtus præcipuè in iis qui scientias profitentur, est ille sincerus omnisque inuidiæ vacuus animi candor quo nunc ego gloriator, & quem tuâ causâ quoties occasio se dederit manifestum omnibus faciam. Hoc enim tibi seriò affirmo tanto me gaudio nunc exultare, dum palàm omnibus prædico à te solutum esse vnum ex difficillimis Geometriæ problematis, quanto mærore antea premebar dum veritatis non dissimulandæ studio coactus fatebar priora illa quorum solutionem edidisti non nisi tantillum quid præ magnis istis inuentis esse. Dubitari non potest, Pater mi, quin istud Problema sit verè magnum; quare optarem addiscere quænam te via eò deduxerit: nam, vt vno verbo rem dicam, D. Roberuallius vir certè eruditissimus, sex annos impendit in eo inueniendo, sed methodo quæ non exhibet nisi vnum casum, nempe cycloideos totius; tu verò habes solutionem pro omni etiam segmentorum casu generalem, quod ego semper extollam, summorumque inuentorum laude dignum comprobabo. Postea verò decimo octauo eiusdem illius mensis eum numeros calculi nostri examinasset, scripsit iterum his verbis. Tibi satis explicare non possum, Pater mi, quàm impatienter hic optemus viam scire quam tibi fecisti in inueniendis solidis circa Cycloideos axem genitis. Tuus porrò illorum calculus nuper ad nos missus ne erroneus esset, iniuriâ timebam; examine enim accurato comperi eum omni prorsus errore vacare.... Sed vt ad te redeam, mi Pater, nullam quietem capiam quousque à te obtinuerim v' me doceas qua methodo perueneris ad illa solida, vel quod (vt tibi aliàs significauimus) in idem redit, ad solida ex rectis, quæ arcubus circuli sint æquales, generata; cupidè enim & curiosè admodum illam addiscere expeto.... Ceterum quod in vtraque hac epistola D. Pascalius assumit ex inuentâ solutione problematum in cycloide parua, citato cursu statim perueniri ad solutionem eorundem in magnâ, id nostrâ nobis experienciâ non constat, sed contrarium potius, vt ex toto libro sequenti patebit. Historiæ illius Autor Dettonuillaus, quem dicunt esse Pascalius imprimis necessarium, postquam nostrum istum calculum vidit & examinauit, cauillatorem eum fore asseruit, qui methodum illam Roberuallianam esse generalem negauerit. D. Pascalius erit illum admonere, hoc sine casillo vllò à se ita ad amicos perscriptum fuisse. Fortasse dum D. Pascalius hac ad me scribebat, methodus erat adhuc particularis, & de illa cuiusmodi erat testatus est; interlabente verò tempore de particulari facta est generalis, prout sæpè accidit, atque de hac is prouectus loquutus fuerit Dettonuillaus. Porrò Geometras rectè Venatoribus comparari in confesso est; sicuti enim sæpè Venatoriæ artis minus periti fortunatiores sunt in inueniendâ & capiendâ præda, ita non rarò minis nobilis Geometra

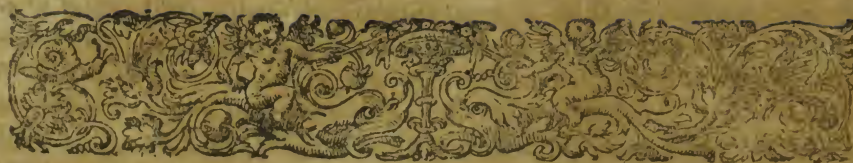
LIBER TERTIVS.

85

felicior nobiliore est in indaganda solutione alicuius problematis. Certè nullus est qui tantum sibi in hoc inuentionis negotio arroget, ut auxiliantis Numinis immemor Vocem illam in sacris libris consignatam Verè & sincerè vsurpare recuset, voluntas Dei fuit, ut citò occurreret mihi quod volebam. Hoc quippe est ipsum quod Rex ille sapiens Vidisse se pronuntiat, nec velocium esse cursum, nec fortium bellum.... Sed tempus casumque [cui Deus supremus cunctorum moderator praeest] in omnibus.



[3]



DE CYCLOIDE

LIBER QVARTVS.

*In quo octo ab Anonymo proposita de magnâ
Cycloide problemata solvuntur.*

PROPOSITIO PRIMA.

SIT (Fig. 34.) quadratum $abdf$, & ex a excitata sit ao perpendicularis ad $abdf$ æqualis lateri af : in planis oab , oaf descripti sint quadrantes circulares onb , oza . Intelligatur solidum cuius quælibet sectio nmc p parallela plano oaf sit quadrans ellipsos semiaxium np , pe ; sit autem n p ordinatim applicata ad circuli onb a semidiametrum ab , & p e compleat parallelogrammum $fape$. Eiusmodi solidum intelligatur secari quocunque plano hgc ad planum oab parallelo, & eius cum solido sectio sit hmc g comprehensa sub linea hmc , & sub rectis gh , gc , quarum gh est ordinatim applicata ad af semidiametrum circuli oza , & gc compleat parallelogrammum $gabc$.

Ostendendum est sectionem hmc g esse quadrantem ellipsos semiaxium hg , gc .

Compleatur parallelogrammum $ghsc$, & intelligatur cylindrus cuius basis sit $ohfa$, axis ab , eius verò sectio per axem ab sit parallelogrammum $aoqb$; In recta gc sumatur quoduis punctum l & per l ducta sit pe parallela rectæ af ; ex p excitata sit pn parallela rectæ ao occurrens peripheriæ onb in n ; rectæ oq in r ; sit ru ep sectio cylindri, quadrans videlicet circularis æqualis quadranti $ohfa$: ergo cum isti quadrantes secantur plano hgc , ordinatim applicatæ gh , lu effectæ occurru illius plani sunt inter se æquales. Recta lu occurrat curvæ hmc in m . Quoniam quadrantis circularis ru ep , & quadrantis elliptici nm

e p communis est semiaxis p e sectus in l, vt est alter semiaxis r p ad alterum p n, ita est ordinatim applicata l u ad ordinatim applicatam l m: igitur vt r p vel o a ad ordinatim applicatam p n in quadrante circulari o n b a, ita est u l vel g h ad l m. Quoniam ergo quadranti circulari o n b a ita respondet figura h m e g, vt si ex a b, g c auferantur æquales a p, g l & ad a b semiaxem quadrantis circularis excitetur ordinatim applicata p n, recta verò l m parallela rectæ g h occurrat limbo h m c in m, sicut est a o ad p n, ita sit g h ad l m, ex vigesima prima primi conicorum inferetur figuram h m e g esse quadrantem ellipseos semiaxium h g, g c, quod erat demonstrandum. Istud solidum dicatur *utrinque ellipticum*, eiusque basis b a f d; quadrans circularis genitor, o n b a.

COROLLARIUM.

Iste demonstrandi modus latissimè patet, estque imprimis utilis ad plurima è tenebris eruenda. Eo verò iam ante vsi sumus in decima sexta superioris libri.

PROPOSITIO II.

Vtriusque elliptici basis sit (Fig. 35.) quadratum a b e c, cuius diameter a e, sit f c dupla rectæ a c, basisq; segmenti parabolici, cuius axis a t sit æqualis rectæ a b: sumptum sit in diametro a e quodcunque punctum g, & per g ductæ sint i m, f h complentes parallelogramma a i m c, a f h b; per puncta f, i ducantur ordinatim applicatæ t n, i l ad semidiametros a c, ab quadratium circularium a d n c, ad l b: plani i m sectio cum solido utrinque elliptico sit l o m i quadrans ellipticus; sectio plani n f h cum eodem solido sit n o h alter quadrans ellipticus, vt ex superiore patet; lineæ l o m, n o h secent se in puncto o superficiei ellipticæ; iungatur recta o g quæ erit perpendicularis ad planum b a c, cum sit communis sectio planorum n f h, l i m rectorum ad planum b a c, ac proinde erit in plano d a e. Sectio plani eiusdem d a e cum superficiei elliptica sit d o e.

Ostendendum est figuram d o e a esse semisegmentum parabolicum, cuius axis a d, ordinatim applicata a e, & si recta g f producta occurrat limbo parabolæ s t c in u, rectam f u esse æqualem rectæ g o.

Centro a semidiametro a t descriptus sit quadrans circularis a t z c, cuius peripheriæ t z c recta f u occurrat in z: igitur rectæ f n, f z sunt æquales; & per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ b a, f z, f u sunt proportionales. Rursus quoniam a i, a f latera quadrati a i g f sunt æqualia, erunt l i, f n æquales: ergo per demonstrata in progressu superioris vt d a recta ad l i, ita est f n ad g o, ac proinde cum l i, f n sint æquales, tres rectæ a d vel b a, l i vel f z, & g o sunt proportionales: ergo

cum tres etiam rectæ ba , fz , fu ostensæ sint proportionales, rectæ go , fu sunt æquales; & figura $doea$ est semisegmentum parabolicum, cum da ad go sit sicut at ad fu , & rectæ ae , ac secantur proportionaliter in g & f : ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Si recta bt poneretur basis segmenti parabolici cuius axis as , perinde ostenderetur ad positionem plani dac rectam og fore æqualem rectæ ip parallelæ axi sa & in puncto p conuenienti cum parabolico limbo spb .

COROLLARIUM II.

Recta ac ita diuidatur in x ut portio xc sit ad ax sicut quinarium ad ternarium, & per x agatur recta xy parallela rectæ at : igitur ex corollario quarto primæ quarti libri tetrágonisimicorum figuræ $atuc$ centrum grauitatis est in recta xy : ergo si libra sc suspendatur ex a , perpendicularo at , brachio sa æquiponderans eiusmodi figuræ erit tres octauæ partes ipsius figuræ: sed ipsa est bes quadrati ac ; ergo æquiponderans illi figuræ est quadrans quadrati ac . Igitur per methodum corollarij quarti decimæ quartæ superioris libri cuneatum solidum genitum ad positionem plani dab ex triangulo aec & ex parabolica figurâ $atuc$ totâ, est æquale cylindraceo altitudinis da , baseos æquantis quadrantem quadrati ac . In aliis verò casibus quando non sumetur tota figura $atuc$, sed eius quælibet pars ad positionem rectæ at , pari methodo inuenietur portio cuneati illi respondens.

PROPOSITIO III.

Ostendendum est iisdem manentibus, solidum vtrinque ellipticum esse ad cylindrum baseos adl altitudinis ac , ut est circulus ad quadratum suæ diametri.

Quoniam enim sectio quæcunque lom est ad rectangulum mil sub semiaxibus li , im comprehensum ut est circulus ad quadratum suæ diametri, patet ex vndecima quarti tetrágonisimicorum, totum solidum cuius sectio est rectangulum lim esse ad solidum cuius sectio est quadrans ellipticus lom , ut est quadratum diametri circularis ad ipsum circulum: sed solidum cuius sectio est rectangulum lim parallelum rectæ ac perpendiculari ad planum dab , & ex centro circuli dlb eductæ est cylindrus habens axem ac , basim bl da ; ergo illud solidum de quo agit præsens propositio est ad cylindrum baseos adl altitudinis ac , ut est circulus ad quadratum suæ diametri.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus ostendendum est solidum illud cuius sectio est lom parallela plano dac , diuidi bifariam per planum $dæ$: & quodcunque quadratum $aigf$ ducatur circa diametrum ae , portionem solidi insistentem quadrato $aigf$ diuidi bifariam a plano $dæ$.

Per i,

Per i , f ducantur il , fn ordinatim applicatæ ad semidiametros ab , ac quadrantium circularium dab , dac n . Quoniam ai , af sunt æquales, sunt quoque li , fn æquales; ergo quadrantes elliptici lim , $onfh$ sunt æquales & similes: ergo portio nfg est æqualis portioni lig : ergo si portio insistsens triangulo ace intelligatur manente a circumferri donec recta ac recta ab congruat, & recta ce iaceat in directum recta bh , duo ista solida talia erunt ut ad positionem plani dac sint condita ratione æqualia: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Iisdem manentibus portio eiusdem solidi insistsens parallelogrammo fhe c ad positionem plani dac est ad cylindrum cuius basis sit quadrans ellipticus $nohf$, altitudo fc , ut quadrantis circularis d $nqca$ portio $nqcf$ ad parallelogrammum nfc .

Quoniam quodcunque planum lim ducatur parallelum plano dac , faciensque sectionem lor mi quæ sit quadrans ellipseos semiaxium li , im , semiaxis im secatur in g , sicuti semiaxis ac in f , ut quadrans circularis dac q n ad sui portionem $nqcf$ ita est quadrans ellipticus lim ro ad portionem sui $ormi$; ergo ut rectangulum nfc ad figuram $nqcf$ in ipso contentam, ita rectangulum ogm ad figuram $ormg$ in ipso inclusam: igitur per undecimam quarti tetragonismicorum, ut figura nfc q ad rectangulum nfc , ita ad positionem plani dac est portio solidi utrinque elliptici insistsens parallelogrammo fhe c ad solidum cuius sectiones sunt parallelogramma nfc , ogm ; sed solidum cuius sectiones sunt illa parallelogramma est, ut ex superioris pari casu patet, cylindrus aut quasi cylindrus (hoc enim nomen paulò latius sumere cogimur) baseos fn o h altitudinis fc : ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam ex superiore nota est portio insistsens parallelogrammo a i m c , & ex præsentis nota est portio insistsens parallelogrammo f g m c , patet notam esse portionem insistentem quadrato $aigf$. Similiter quoniam ex superiore nota est magnitudo insistsens parallelogrammo $aceb$, & ex præsentis insistsens parallelogrammo fhe c , nota erit insistsens parallelogrammo abh f : ergo dempta portione quæ quadrato $aigf$ incumbit, nota erit portio parallelogrammi $bigh$, quamvis bh latus non foret in latere quadrati ace , sed ei æquidistaret.

COROLLARIUM II.

Ex demonstratis hætenus in præsentis libro patet portionem solidi utrinque elliptici interceptam planis dac , dac una cum dimidio cuneati dicylindracei expositi in corollario secundo secundæ, complecti dimidium solidi quod ad cylindrum altitudinis ac , baseos dla , sit ut circulus ad quadratum ipsi circumscriptum, insuper verò complecti parallelepipedum altitudinis ac , baseos æquantis semiquadrantem quadrati

M

a c. Duplum igitur complectetur cylindraceum altitudinis d a cuius basis contineat quadrantem quadrati a c vel d a, & spatium quod ad quadrantem circularem a d l b sit ut circulus ad quadratum circumscriptum. Simili pacto procedendum erit in aliis casibus.

PROPOSITIO VI.

MAneat solidum utrinque ellipticum (Fig. 36.) cuius basis sit quadratum a b e c, quadrans circularis genitor d l b a, alter quadrans ad positionem plani d a c sit d n c a: in plano a b e c super latere b a constructum sit aliud quadratum b a C B. Centro a descriptus sit quadrans circularis C y b a, cui ita respondeat figura C u b a, ut quæcunque i u parallela rectæ a C ducatur occurrens in y peripheriæ C y b; in u limbo C u b; in A rectæ C B, tres rectæ A i, i u, i y sint perpetua lege proportionales. Intelligatur a o b quadratrix respondens figuræ C u b a, ita ut sicut brachium a D æquans rectam a b se habet ad a i, sic se habeat i u ad i o dimetientem figuræ quadratricis. Motu figuræ C u b a circa rectam b a manentē descriptum sit periphericum solidum cuius quadrans insistent figuræ C u b a hîc tantummodo consideratur: intelligatur quoque cylindracea superficies descripta motu parallelæ ad rectam a d incidentis per limbum a o b: huius verò superficiei portio intercepta superficie peripherici & plano C a b vocetur *septum medium* quadratricis.

Ostendendum est ad positionem plani d a c periphericum & solidum utrinque ellipticum esse condita ratione æqualia. Item portionem peripherici insistentem inter curvas C u b, a o b portioni alterius solidi interceptæ inter plana d a e, d a c esse æqualem; & consequenter portionem peripherici residuam portioni alterius solidi residuæ. Denique si agatur q i u planum parallelum plano d a c, eiusque sectio cum peripherico sit quadrans circularis i u r q, & ex puncto o excitetur ordinatim applicata o r parallela semidiametro i q, iungaturque recta i r constituens sectorem r i u, solidum cuius sector est r i u esse condita ratione æquale portioni alterius solidi interceptæ inter plana d a e, d a c, & simul dimidio dicylindracei cuneati geniti ex triangulo b a e, & ex parabola B z a b cuius vertex a, axis a b, ordinatim applicata b B.

Quoniam enim tres rectæ i m vel A i, i u & i y vel i l ordinatim applicata parallela semidiametro a d quadrantis circularis d l b a sunt per constructionem proportionales, rectangulum l i m erit æquale quadrato i u; ergo & quadrans ellipseos semiaxium l i, i m erit æquale quadranti circulari u r q i: ergo ad positionem plani d a c periphericum & solidum

utrinque ellipticum sunt æqualia. Quod ad æqualitatem portionum attinet, demonstratur eodem pacto quo in superioris libri decima sexta eiusque corollariis vti sumus pro simili causa: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex corollario secundo superioris liquet bis totum solidum cuius sectio est sector uri esse æquale cylindræo altitudinis $a d$ vel $a b$ cuius basis contineat quadrantem quadrati $a c$ vel $d a$, & spatium quod ad quadrantem circulearem $a d l b$ sit vt circulus ad quadratum circumscriptum.

PROPOSITIO VII.

MAneat (*Fig. 37.*) peripherici quadrans geniti motu figuræ $C u b a$ circa axem $b a$, eiusque sectio sit quadrans circularis $ur q i$, maneátque, vt supra, sector uri : sit parua semicycloides superior $g z b a$, eiusque ordinatim applicata $i z$ parallela lateri $b B$ quadrati $a b B C$. Sit figura $b m c a$ ita se habens ad figuram $b z g a$ ad positionem rectæ $a C$, vt sicut est $A i$ vel $a C$ recta ad $i z$, ita $i y$ ordinatim applicata ad $a b$ semidiametrum quadrantis circularis $C y$ $b a$ sit ad $i m$ dimetientem figuræ $b m c a$.

Ostendendum est figuram $b m c a$ vel totam vel ex parte sumptam esse ad positionem rectæ $a c$ æqualem rectilineo noto, posita quadraturâ circuli: in casu verò quo tota sumitur, ipsam esse æqualem quadranti quadrati $a b$, & spatio quod ad quadrantem circuli semidiametro $a b$ descripti sit vt circulus ad quadratum circumscriptum.

Istud demonstratur vt decima septima prioris libri. Nam si intelligatur cylindrus cuius axis $a b$, basis sit quadrans $B f b$ circuli ad planum $c a b$ recti centro b descripti, & iungatur diameter $a B$ quadrati $C B b a$ per quam ducatur planum rectum $d a B$ secans quadrantis circularis $A h e i$ peripheriam in h ; rectæ $h i$ & $r i$ iacebunt in eadem recta vt ibidem ostendimus, & vt $A i$ recta ad $y i$, ita erit sector $A h i$ ad sectorem $u r i$, & ita bis solidum cuius sectio est sector $A h i$ ad bis solidum sectoris $u r i$.

Rursus solido bis sectoris $A h i$ æquale est ad positionem plani $d a C$ cylindræum altitudinis $d a$ æquantis rectam $a b$, baseos $g z b a$, vt ex tertia primi constat. Quoniam igitur vt $A i$ recta ad $i z$, ita est $i y$ recta ad $i m$, ita quoque erit rectangulum altitudinis communis $d a$, baseos $z i$, ad rectangulum baseos $i m$; cum autem ita etiam sit bis sector $A h i$ hoc est rectangulum baseos $z i$, ad bis sectorem $u r i$, rectangulum baseos $i m$ erit æquale bis sectori $u r i$: ergo cum per superiorem notum sit cylindræum altitudinis $d a$, ad positionem plani $d a C$ æquale solido bis sectoris $u r i$, nota quoque erit basis $b m c a$. Ex corollario verò supe-

rioris tota $b m c$ a erit æqualis quadranti quadrati $a b$, & simul spatium quod ad quadrantem circuli semidiametro $a b$ descripti sit vt circulus ad quadratum circumscriptum, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Spatium quod ad circulum sit vt ipse circulus ad quadratum circumscriptum est quadratum quod potest $a g$, vel recta æqualis quartæ parti peripheriæ eiusdem circuli: nam ex corollario secundo decimæ nonæ primi libri, quadratum circumscriptum est ad circulum vt $b a$ semidiameter circuli ad $a F$ rectæ $a g$ dimidium. Cum igitur rectangulum contentum sub $b a$ & sub $a F$ dimidio rectæ $a g$ sit quadrans circuli semidiametro $a b$ descripti, & vt quadratum $b a$ ad rectangulum $b a F$, ita sit $b a F$ ad quadratum $a F$ patet vt quadratum circumscriptum ad circulum, ita esse $b a F$ siue quadrantem circuli ad quadratum $a F$, siue ad quadrantem quadrati $a g$: ergo vt quadratum circumscriptum circulo est ad ipsum circulum, ita est circulus ad quadratum $a g$. Igitur spatium quod ad quadrantem circuli sit vt quadratum circumscriptum circulo ad circulum, est quadrans quadrati $a g$: vel decima sexta pars quadrati quod potest dupla rectæ $a g$.

PROPOSITIO VIII.

SIt parua semicycloides tota $c b a f$ (*Fig. 38.*) circulo genitore diametri $c f$, semidiametri $g f$ procreata; sit semicirculus genitor $c o f$, & intelligatur ad positionem plani $t f a$ recti ad planum $c f a$ generari dicylindraceum ex tota semicycloide & ex $c o f$ semicirculo: item ex quacunque $c b h d$ & ex $c o e d$.

Ostendendum est in primo casu illud spatium esse æquale cylindraceo altitudinis $g f$, baseos æquantis quadrantem quadrati $f a$; in aliis verò casibus æquantis rectilineum notum, datâ circuli quadraturâ.

Intelligatur semicycloides parua $f r f c$ subcontrariè posita: igitur duæ simul $z y$, $y q$ æquant totam $a f$: igitur dicylindraceum genitum ex $g o p c$ & ex figuris $c z b g$, $c f q r g$ est æquale cylindraceo altitudinis $f a$ vel $c s$, baseos $c p o g$: ergo cum dicylindraceo genito ex figuris $c p o g$, $c f q r g$ æquale sit dicylindraceum genitum ex figuris $b h a f g$, $g o e f$, patet dicylindraceum genitum ex semicirculo $c o f$, & ex tota $c b a f$ esse æquale cylindraceo baseos $c p o g$, altitudinis $f a$: hoc est altitudinis $g f$ baseos æquantis quadrantem quadrati $f a$. Nam si fiant tres rectæ $g f$, $f a$, $f u$ proportionales, cum rectangulum $g f a$ sit æquale circulo diametri $c f$, quadrans rectanguli $g f a$ erit æqualis quadranti circuli $c f$. Igitur cum cylindracea æqualia habeant reciproce bases & altitudines proportionales, vt altitudo $f g$ ad altitudinem $f a$, ita reciproce erit basis $c g o p$ siue qua-

drans rectanguli gfa ad quadrantem rectanguli gfu , hoc est ad quadrantem quadrati fa ; quod erat primò ostendendum.

Rursus inuenire oporteat dicylindraccum genitum ex figuris $czbhd$, $cpe d$; ponimus autem figuram $cbhd$ esse maiorem parte superiore $c-zbg$; nam si sit illi æqualis, vel sit ea minor problema solutum est in superiore. Ex recta gc abscindatur gy æqualis rectæ gd . Ex methodo demonstrationis pro primo casu usurpatæ liquet ex figura $zydh$, & ex $y p e d$ idem gigni spatium quod ex figuris $bzqr$, $ypog$, nempe cylindraccum altitudinis fa , baseos $ypog$: sed ex superiore constat dicylindraccum genitum ex figuris czy , cpy : ergo per additionem constat dicylindraccum genitum ex figuris $cbhd$, $cpe d$: quod erat secundum ex demonstrandis.

PROPOSITIO IX.

Iisdem manentibus (*Fig. 38.*) sit semicycloides magna $amncf$ ita vt figura $amncz$ sit ad positionem rectæ fa condita ratione æqualis semicirculo genitori cof .

Ostendendum est libræ planæ axe cf , sustentaculo ou , notum esse ad positionem rectæ af æquiponderans cycloidî magnæ vel toti vel ex parte designatæ.

Ducatur quæcunque ny parallela rectæ fa occurrens limbo cycloidis magnæ in n , cycloidis parvæ in z , & axi cf in y . Quadratum lateris ny est æquale duobus quadratis nz vel yp , zy & simul bis rectangulo nzy . Si ergo intelligatur solidum cuius basis sit $amcf$, sectiones verò eius parallelæ plano tfa sint quadrata laterum ny , ld &c. patet istud solidum esse æquale solidis quadratorum zy , yp , & bis rectanguli zyp . Atqui solidum quadrati zy demonstratur ex tertij quarta; solidum verò quadrati yp habetur ex secunda quinti tetragonismicorum; solidum verò bis rectanguli zyp obtinetur ex superiore: ergo notum est solidum cuius sectio parallela plano tfa est quadratum lateris ny . Ergo ex corollario quarto octauæ libri superioris dimidium baseos cylindraccæ habentis altitudinem cg & æquantis solidum iam dictum est æquiponderans quod erat inueniendum.

COROLLARIUM I.

Pro casu totius semicycloideos magnæ $amcf$, solidum quadrati yp est cylindraccum altitudinis gc , baseos æquantis bis bessem quadrati gc ; solidum bis rectanguli zyp est per superiorem æquale dimidio quadrati fa ; solidum verò quadrati zy cum sit duplum æquiponderantis inuenti in corollario secundo secundæ libri superioris, est cylindraccum eiusdem altitudinis, cuius basis sit quadratum af imminutum quadrato cf : Totum igitur solidum pro illo casu est tres semisses quadrati fa , deducto besse quadrati cf : ergo æquiponderans pro isto casu est tres quadrantes quadrati fa , deducto triente quadrati fc .

M 3

COROLLARIUM II.

Pro casu superioris partis $cnmg$ solidum quadrati yp est cylindraceum altitudinis gc baseos æquantis bessem quadrati gc : solidum bis rectanguli zy est per septimam eiusque corollarium, cylindraceum eiusdem altitudinis baseos æquantis dimidium quadrati gc & simul octauam partem quadrati fa : solidum verò quadrati zy est duplum spatij inuenti in corollario secundo secundæ supra laudatæ nempe circulus cf dempto bis quadrato gc . Summa ex tribus collecta est circulus genitor auctus octaua parte quadrati fa , & imminutus quinque vigesimis quartis quadrati fc : ergo æquiponderans pro isto casu est semicirculus genitor, auctus decima sexta parte quadrati fa , & imminutus quinque quadragesimis octauis quadrati fc .

COROLLARIUM III.

Quoniam ex primi decima sexta habetur æquiponderans eidem figuræ axe zy , & ex præfenti habetur axe cf , ipsum verò suspensum est notum per duodecimam primi, patet ex methodo tertiæ tertij libri inueniri centrum grauitatis figuræ cny .

PROPOSITIO X.

Iisdem manentibus ostendendum est (*Fig. 38.*) notum esse solidum periphericum circa manentem fc motu cycloideos magnæ $amcf$ descriptum, siue totum sumatur, siue quælibet eius pars ad positionem plani tfa .

Vt quadratum circumscriptum circulo est ad ipsum circulum ita recta ft (quæ æqualis est rectæ fg) fiat ad fx . Dico octuplum baseos æquiponderantis reperi in superiore propositione esse basim cylindracei altitudinis fx , quod sit æquale solido proposito, & quadruplum semisolido. Istud patet ex methodo decimæ nonæ primi libri: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Igitur basis cylindracei habentis altitudinem fx æquantis periphericum genitum circa rectam cg motu figuræ $cnmg$ æquat quadruplum circuli genitoris auctum dimidio quadrati fa & imminutum quinque sextantibus quadrati fc . Basis verò cylindracei æquantis periphericum genitum circa rectam cf motu figuræ cba æquat sextuplum quadrati fa imminutum octo trientibus quadrati fc .

PROPOSITIO XI.

Sit vt in vndecima (*Fig. 39.*) superioris libri $hocg$ pars superior Scunei expansi geniti circulo semidiametri gc , sitque $fqthg$ figura ex sinibus versis illi ita respondens vt tres dimetientes le , cd , e sint proportionales. Sit cycloidis magnæ pars superior gcz eodem

circulo genitore descripta. Sit $f u B$ parabola cuius axis $f g$, ordinatim applicata $g B$ æqualis ipsi $f g$: sit $c A B$ quadrans circuli genitoris: in recta $g c$ sumptum sit quodcunque punctum y , & per y ordinatim applicata $y z$ occurrens limbo cycloidis magnæ in z , parvæ in o . Sit figura $f a C b g$ ita descripta vt quæcunque $z C$ parallela axi $g c$ ducatur occurrens basi $g b$ in i , curvæ $f a b$ in C , rectæ $f l$ in d , tres rectæ $d i$, $i z$, $i C$ sint proportionales: per C ducatur $C x$ parallela rectæ $b g$ occurrens lineis $f q h$, $f g$, $f u B$ in t , x , u .

Ostendendum est rectas $t C$, $x u$ esse æquales.

Recta $z y$ producta occurrat arcui circulari $c B$ in A . Quoniam ex prima propositione libri primi rectæ $z o$, $y A$ sunt æquales, erunt quoque $y A$, $C t$ æquales. Nam cum rectæ $l e$, $D i$ sint æquales, item $e o$, $i z$, tertia proportionalis post rectas $l e$, $e o$ erit æqualis rectæ $C i$ vel $t e$; sed illa in recta $l o$ interceptitur inter curuam $f q h$ & rectam $h g$: ergo punctum t iacet in recta $l e$. Cum igitur duo quadrata $g y$, $y A$ æquent simul quadratum $f g$ vel $g A$, siue rectangulum $c g f$; quadratum autem $g y$ vel $e o$ æquet rectangulum $L e t$, vel $c g x$, relinquitur vt quadratum $y A$ vel $C t$ æquet rectangulum contentum sub rectis $g c$, $f x$, hoc est rectangulum $E f x$, contentum sub $f x$ & sub $f E$ latere quadrati $f g B E$, & latere quoque recto parabolæ. Cum igitur quadratum ordinatim applicatæ $x u$ æquet rectangulum $E f x$, patet quadratum $x u$ esse æquale quadrato $C t$, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus ex puncto g excitetur perpendicularis $g m$ ad planum $c g b$ æqualis rectæ $g c$.

Ostendendum est cylindraceum genitum ad positionem plani $m g b$ ex parabola $f u B g$, & ex figura $f q t h g$ esse æquale cylindraceo altitudinis $g m$, baseos æquantis rectilineum notum, si nota sit quadratura circuli.

Intelligatur cylindraceum genitum ad positionem plani $m g c$ ex ipsa figura $f t h g$ in seipsam ducta, vt eius sectiones parallelæ plano $m g c$ sint quadrata. Ex recta $g f$ producta abscindatur $f H$ æqualis rectæ $g c$, & compleatur parallelogrammum $f H M D$. Recta $f g$ bifariam secta sit in n , & completa sint parallelogramma $h g n P$, $P n f Q$: recta $h g$ bifariam secta sit in S , & per S ducta sit $S R$ complens parallelogramma $S q n g$, $q R f n$. Igitur ex tertij vndecima propositione figura $P q t h$ est semicycloides parua subcontrariè posita semicycloidi item parvæ $f q n$ genitæ circulo centri q , diametri $R S$. Quoniam verò figura $f q h g$ est illa quam in decima tertia libri secundi appellauimus *ex sinibus versis*, erit (vt in corollario primo decimæ tertiæ libri tertij ostendimus) integra

semicycloides parua genita diametro fg , centro n . Si igitur compleatur parallelogrammum $HfQL$, & intelligatur superior semicycloides parua $LVfQ$, respondens genitori circulo semidiametri QL , cuius limbus LVf occurrat recta Tl in V , erunt per decimam septimam secundi libri tres recta Tl , lV , lt proportionales, ac proinde media inter Tl , lt erit lV , & posito ad positionem recta fg primo gradu parallelogrammo $LQfH$, secundo $LVfQ$, tertius erit ft h Q . Igitur ex decima nona superioris libri adiuncto corollario quarto octauae libri eiusdem habemus notum quartum gradum post tertium ft h Q .

Intelligatur parabola fuB g stare erecta super plano fg h & per eius ita stantis limbum fuB incedere linea parallela recta gh & describere superficiem cylindraceam; intelligatur alia superficies cylindracea describi motu parallela ad rectam mg incedentis per limbum fqt h Q . Igitur sectio lt NF cylindracei prioris, baseos fuB g erecta, parallela ipsi basi & inclusa intra cylindraceum posterius, incedens per rectam lt quamlibet, erit ipsa fx u translata; ergo ut LT prima ad lt tertiam, ita erit x u vel t N secunda ad quartam: ergo rectangulum sub quarta & sub prima Tl est aequale rectangulo lt N: sed sectio lFN t est bes eiusmodi parallelogrammi ut ex quadratura parabola constat: ergo cum solidum cuius sectio est parallelogrammum lt N sit per undecimam secundi tetragonismicorum ad positionem plani mg c condita ratione aequale cylindraceo altitudinis Tl vel gm , baseos aequantis quartum gradum notum, si nota sit quadratura circuli; patet solidum cuius sectio est lFN t esse aequale bes huius cylindracei noti. Cum igitur notum sit cylindraceum altitudinis gh , baseos fuB g erecta, si ex hoc cylindraceo dematur bes cylindracei cuius basis est quartus gradus, residuum fiet cylindraceum altitudinis gm , baseos nota, aequale portioni dicylindracei geniti ex parabola fuB g, & ex parua cycloide fqh g, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Huc aduocari debet corollarium simile illi quod propositioni undecimae superioris libri adscriptimus.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem manentibus (Fig. 39.) circa basim gh intelligatur circumduci semicycloidis magnae pars superior gbz c.

Ostendendum est illi aequiponderans esse notum datam circuli quadraturam, si libra Bb suspendatur ex g perpendicularo plano mg c, brachio Bg latere quadrati f g BE .

Quoniam tres rectae di , iz , Ci sunt proportionales, patet ex methodo undecimae superioris libri cylindraceum altitudinis gm , baseos fa b g ad positionem plani mg c esse condita ratione aequale dicylindraceo genito ex bg c z superiore parte magnae semicycloideos ad positionem plani mg c

ni $m g c$ in seipsam ducta; & si vt quadratum diametri ad circulum, ita fiat $g m$ recta ad $g \lambda$ cylindraceum altitudinis $g \lambda$, baseos eiusdem, esse condicta ratione æquale conoidi descripto circa rectam $g b$ manentem. Ex eiusdem methodo constat cylindraceum altitudinis $g \lambda$ baseos æquantis æquiponderans figuræ $f a b g$ axe $f g$, sustentaculo $E B$ latere quadrati $f g B E$, esse æquale æquiponderanti spatio conoidis.

Supereft vt ostendamus notum esse æquiponderans figuræ $f a b g$ iisdem positis. Ducta fit quælibet $x C$ parallela rectæ $b g$ occurrens limbo $f a b$ in C , & rectæ $g f$ in x . Quadratum igitur $x C$ componitur ex quadratis $x t$, $t C$, & bis rectangulo $x t C$, vt ex Elementis Euclidis liquet. Per methodum superioris libri in quartâ propositione, habemus rectangulum altitudinis $g m$ baseos notæ, æquale quadrato $x t$; per parabolæ quadraturam eiusque centrum grauitatis habemus rectangulum altitudinis eiusdem, baseos quoque notæ, æquale solido cuius sectio est quadratum lateris $t C$ vel $x u$: per superiorem habemus cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos pariter notæ æquale bis rectangulo $x t C$: ergo per vndecimam quarti tetragonismicorum notum est cylindraceum altitudinis $g m$, baseos æquantis rectilineum notum positâ circuli quadraturâ, æquale solido cuius sectio parallela plano $m g b$ est quadratum lateris $x C$: ergo vt ex demonstratis in prima tertij libri patet, æquiponderans cylindraceo altitudinis $g m$, baseos $f a b c$, est ad positionem plani $m g b$ condicta ratione æquale dimidio cylindracei inuenti; ergo cum ambo cylindracea sint eiusdem altitudinis, patet figuræ $f a b g$ vt iacet manenti æquipondere ad positionem rectæ $g b$ dimidium baseos cylindracei inuenti si libræ planæ axis ponatur $g f$, sustentaculum $B E$. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Applicentur huic propositioni corollaria primæ & septimæ superioris libri. Reliqui verò casus quando recta circa quam fit reuolutio equidistat rectæ $f a$, facile expediuntur ex methodo præsentis casûs, vt patebit ex calculo tradendo in sequentibus.

COROLLARIUM II.

Si $b z c g$ poneretur contraria ratione esse semicycloides parua superior, & illi ad partes g insisteret figura $b z c o h$ condicta ratione æqualis circuli quadrantis $g c A B$ ad positionem rectæ $g b$: Similiter si $f a b g$ esset tota semicycloides habens axem $f g$, & illi ad partes g insisteret figura $f a b h q$ condicta ratione æqualis parabolæ $f u B g$, patet ex cylindraceis æquantibus quadrata $x C$, $C t$ nota demendum fore bis cylindraceum æquale dicylindraceo genito ex cycloide $f a b g$ & ex parabola $f u B g$ vel $f a b h q$, vt haberetur æquiponderans conoidi genito ex reuolutione figuræ $h o c g$ circa axem $g h$: figura autem $h o c g$ est in isto casu parua semicycloides superior imminuta quadrante circulari, sicuti in casu superioris est aucta eodem quadrante.

N

SIt (*Fig. 40.*) tota semicycloides magna $azbcf$, eiusque axis fc ; circa rectam fa circumuolutione partis inferioris $Dazb$ (nam parallelogrammum $fDbg$ pertinet ad figuram $Dbcf$ circa fD reuolutam) intelligatur gigni solidum periphericum.

Ostendendum est illi æquipouderans esse notum si libra Bb suspendatur ex g perpendicularo plano mgc , brachio gB latere quadrati $fgBE$.

Descripta sit semicycloides parua $aohcf$ habens eundem axem hc , & eandem semibasim fa : completo parallelogramma $fgTa$, & $hTaQ$, erit $aohT$ parua semicycloides superior subcontrariè posita parua superiori $hicg$, vt ex secundi libri octauæ propositionis corollario liquet. Igitur ex tertiæ propositionis corollario huius libri axe fg , sustentaculo EB (ita vt Bg , gc sint æquales) perpendicularo plano mgc ; notum est æquipouderans solido genito ex circumuolutione figuræ azb circa rectam Tb .

Intelligatur quadratum lateris di parallelum plano mgc in quo recta mg ponatur perpendicularis ad planum hgc , & æqualis rectæ gc ; eiusmodi verò quadratum concipiatur diuisum in duo quadrata zi , zd & in bis rectangulum dzi . Per ipsa quadrata & per rectangula volumus intelligi in præsentī solida quorum ipsa quadrata & rectangula sunt sectiones. Per corollarium superioris axe fg & cæteris manentibus, notum est æquipouderans quadrato zi ; rectangulo autem diz æquipouderans notum est, videlicet cylindraceum altitudinis di baseos æquantis rectilineum notum quod figuræ planæ $azbT$ æquipouderat per tertiam tertij libri; ergo diuisa altitudine di in duas dz , zi notum est æquipouderans duobus rectangulis eadem basi zi præditis, altitudinum dz , zi , hoc est rectangulo dzi , & quadrato zi ; ergo dempto æquipouderante noto quadrati zi , relinquitur notum æquipouderans rectanguli dzi . Cum ergo notum sit æquipouderans totius quadrati d cylindraceum nempe altitudinis di , baseos æquantis æquipouderans figuræ planæ parallelogrammæ $aDbT$, cumque notum sit æquipouderans partium, videlicet quadrati zi & bis rectanguli dzi , si ista demantur ex illo, relinquetur æquipouderans quadrati d , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si circa alios axes parallelos rectæ fa fiat circumuolutio, demonstratio methodo non admodum diuersa succedet, idque satis constabit ex sequentibus calculis. Quæ verò de alijs casibus in vndecimâ superioris scriptum, hic cum proportionē intelligi debent.

PROPOSITIO XV.

REuocato schemate propositionis duodecimæ (*Fig. 39.*) dicylindraceum genitum ad positionem plani $m g b$ ex parabola integra $f u B g$ & ex figurâ integrâ $f q t h g$ est æquale cylindraceo altitudinis $g m$, baseos æquantis trientem circuli genitoris $f c$ imminutum quatuor nouenis partibus quadrati $g c$.

In casu proposito si libra $f c$ suspendatur ex f perpendicularo plano $X f D$ recto ad planum $H f Q$, ita ut rectæ $X f$, $m g$ æquidistant & sint æquales vni tertiæ $g c$, sustentaculo verò $g h$, solido cuius sectio parallela plano $g m c$ sit quadrans circularis insistens super $l v$ dimetiente figurâ $f v l q$, æquiponderans per decimam nonam superioris libri est cylindraceum altitudinis $f x$ vel $g c$, cuius basis sit duæ nouenæ quadrati $g c$ vel $l q$: sumi enim debet dimidium æquiponderantis ibi apposti ut patet, cum sectio parallela plano $m g c$ in casu illius decimæ nonæ sit bis quadrans circularis insistens super $l v$. Igitur per sextam eiusdem libri solido cuius sectio sit quadratum lateris $l v$ æquiponderant tres semisses æquiponderantis iam inuenti; ac proinde solido sectionis illius quadratæ æquiponderat cylindraceum altitudinis $g c$ vel $x f$, baseos continentis trientem quadrati $g c$. Igitur ex corollario quarto octauæ superioris libri duplum huius baseos nempe bes quadrati $g c$, est quartus graduum, quorum primus est parallelogrammum dimetientis $f g$, secundus est figura $f v l q$, tertius est figura $f q h q$: ac proinde cylindraceum altitudinis $g m$ vel $g c$ baseos æquantis bessem quadrati $g c$ est æquale condita ratione ad positionem plani $m g c$ solido cuius sectio est parallelogrammum $l t n$.

Quoniam verò per methodum secundæ propositionis bes huius cylindracei est æquale dicylindraceo genito ex parabola $f u B g$ & ex figura $f q h q$ ad positionem plani $m g h$, patet istud dicylindraceum esse æquale cylindraceo altitudinis $g c$ vel $g m$, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati $g c$.

Rursus quoniam cylindraceum altitudinis $g h$ baseos æquantis quadratum $f g$, est per leges reciproationis æquale cylindraceo altitudinis $f g$ baseos æquantis semicirculum $f c$, nam recta $g h$ ad $f g$ est per demonstratam in corollario secundo decimæ nonæ primi libri ut semicirculus $f c$ ad quadratum $f g$: sed $f u B g$ basis est bes quadrati $f g$: ergo cylindraceum altitudinis $g h$ baseos $f u B g$ est cylindraceum altitudinis $g m$ baseos æquantis bessem semicirculi $f c$, vel trientem circuli $f c$. Cum igitur ex præscripto eiusdem secundæ isti cylindraceo demi debeat illud paulo antè inuentum eiusdem altitudinis, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati $g c$, ut relinquatur dicylindraceum quæsitum, patet illud esse æquale cylindraceo altitudinis $g m$, baseos æquantis trientem circuli genito-

ris $f c$ imminutum quatuor nouenis quadrati $c g$, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Reuocato schemate propositionis decimæ tertię (*Fig. 39.*) intelligatur semicycloideos magnæ pars superior $g b z c$ tota volui circa rectam $b g$; ostendendum est librâ $B b$ suspensâ ex g perpendicularo plano $m g c$, brachio $g B$, æquiponderans istius solidi quadrantem esse æquale cylindræo altitudinis $g \lambda$, baseos æquantis quadrantem quadrati $g h$ auctum triente circuli $f c$ & imminutum quatuor nouenis quadrati $g c$.

Ex corollario secundo secundæ tertij libri habemus æquiponderans figuræ $f q h g$ librâ grammicâ $B h$ suspensâ ex g perpendicularo $g f$, brachio $g G$ æquante rectam $g n$ vel dimidium rectæ $g B$, esse æquale dimidio quadrati $g h$, deducto duplo quadrati $n g$: ergo æquiponderans eidem, brachio $g B$ duplo prioris, est dimidium æquiponderantis illius; sed duplum æquiponderantis illius si fiat basis cylindræi altitudinis $g B$ vel $g m$ æquale est dicylindræo genito ex parua semicycloide $f t h g$ in se ducta ad positionem plani $m g h$: ergo solidum cuius sectio parallela plano $m g h$ est quadratum lateris $x t$ æquat cylindræum altitudinis $g m$, baseos continentis dimidium quadrati $g h$, imminutum duplo quadrati $n g$, vel dimidio quadrati $f g$.

Præterea quoniam parabola $f u B g$ cuius axis $f g$, centrum grauitatis distat ab axe $f g$ interuallo trium octauarum rectæ $g B$ ex corollario quarto primæ quarti tetragonismicorum, æquiponderans illi figuræ brachio æquante rectam $g B$, perpendicularo $g f$, erit tres octauæ suspensæ; cum igitur suspensum sit bes quadrati $B g$, æquiponderans erit quadrans quadrati $g B$; ergo duplum huius nempe dimidium quadrati $g B$ est basis cylindræi altitudinis $g B$ vel $g m$, quod æquat cylindræum ex parabola $f u B$ in seipsam ducta ad positionem plani $m g B$.

Rursus per superiorem bis solidum cuius sectio parallela plano $m g h$ est rectangulum $x t C$ vel $t x u$ est æquale cylindræo altitudinis $g m$, baseos æquantis bessem circuli $f c$ imminutum octo nouenis quadrati $c g$. Igitur ex methodo eiusdem decimæ tertię cylindræum altitudinis $g \lambda$ baseos æquantis dimidium trium illorum spatiorum iam computatorum in bases trium cylindræorum, est æquiponderans toti conoidi circa rectam $g b$ geniti circumuolutione figuræ $c z b g$. Istud autem dimidium est quadrans quadrati $g h$ auctus triente circuli $f c$, & imminutus quatuor nouenis quadrati $g c$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Duobus igitur quadrantibus istius solidi, siue dimidio illius æquiponderat duplum spatij iam inuenti nempe cylindræum altitudinis $g \lambda$, baseos æquantis dimidium quadrati $g h$, auctum besse circuli $f c$, & immi-

nutum octo nouenis partibus quadrati $g c$. Quatuor verò quadrantibus siue toti solido, baseos æquantis quadratum $g h$ auctum quatuor trientibus circuli $f c$, & imminutum sexdecim nouenis quadrati $g c$.

COROLLARIUM II.

Si $g b z c$ ponatur pars superior semicycloideos parua, & $b z c o h$ circuli quadrans insistenti illi ad partes g ; similiter si $f a b g$ ponatur tota semicycloides parua habens axem $f g$, & $f a b h q$ parabola insistenti ad partes g ; solidum cuius sectio parallela plano $m g h$ est quadratum lateris $x r$, erit duo simul solida quadratorum $x C$, $C t$, dempto bis solido rectanguli $x C t$: cylindraceum verò illis æquale altitudinis $g m$ habebit pro basi dimidium quadrati cuius latus æquat peripheriam $B A c$ auctum octo nouenis quadrati $f g$ vel $g c$, imminutum besse circuli $f c$ genitoris. Ergo dimidium huius baseos nempe quadrans quadrati $g h$, auctus quatuor nouenis quadrati $f g$ & imminutus triente circuli $f c$ genitoris est pro hoc casu basis cylindracei æquantis æquiponderans quæsitum & habentis altitudinem $g \lambda$.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem manentibus vt in decima tertia (*Fig. 39.*) circa rectam $f D$ intelligatur circumuolui figura $D b z c f$, ostendendum est solidi illius quadranti iisdem vt supra manentibus, æquiponderare solidum altitudinis $g \lambda$, baseos complectentis quinque quadrantes quadrati $g h$, auctos vndecim sextantibus circuli genitoris $f c$, & imminutos septem nouenis quadrati $g c$.

Quoniam æquiponderans basi quæ sit tertius gradus modo supra explicato, quorum primus sit parallelogrammum $H f D M$, secundus figura $D b z c f$ ad positionem rectæ $f c$, est basis cylindracei altitudinis $g \lambda$ quod æquale sit æquiponderanti quæsito vt ex superioris praxi patet, superest vt in præsentem inueniamus illud æquiponderans tertij gradus. Porro vt ex methodo qua vsi sumus in corollario primo decimæ & in corollariis decimæ septimæ tertij libri constat, tertius gradus componitur ex parallelogrammo $H f D M$ & ex bis figura $g c z b$, nec non ex tertio gradu $f a b g$ inuento in superiore propositione: inueniendum igitur restat æquiponderans tribus illis figuris planis libræ grammicæ $B h$ brachio $B g$, perpendicularo $g f$: id autem ita præstamus.

Ex superioris progressu æquiponderans figuræ $f a b g$ est quadrans quadrati $g h$ auctus triente circuli $f c$, & imminutus quatuor nouenis quadrati $g c$.

Rursus solidum cuius sectio sit quadratum lateris $y z$ parallelum plano $m g b$ est æquale solidis quorum sectiones sint quadrata laterum $y o$, $o z$ vel $y A$, & bis rectangulum $y o z$ vel $y A$ vt in superioris pari casu diximus: Atqui solidum quadrati $y o$ æquale est vt patet ex corollario secundo secundæ tertij, cylindraceo altitudinis $g m$, cuius basis sit circulus

genitor dempto bis quadrato $g c$: solidum bis rectanguli $o z$ y est per septimam & corollarium eius æquale cylindræo paris altitudinis cuius basis sit bis quadrans quadrati $g c$ auctus bis quadrante quadrati $g h$: solidum quadrati $o z$ æquale est cylindræo altitudinis eiusdem, cuius basis sit bes quadrati $g c$. Igitur summa basium est circulus genitor $f c$ auctus dimidio quadrati $g h$, deductis quinque sextantibus quadrati $c g$. Tale verò est bis æquiponderans figuræ $g b z c$ quæsitum.

Æquiponderans parallelogrammo $H f D M$ conflatur ex æquiponderante parallelogrammis $H f Q L$ vel $f g h Q$, & $Q D M L$, vel $h b D Q$. Parallelogrammo $H f Q L$ æquiponderans est dimidium quadrati $g h$, ut ex corollario primo decimæ libri tertij constat. Parallelogrammo siue quadrato $Q D M L$ librâ $f D$ suspensâ ex Q , perpendicularo $Q L$ brachio æquante rectam $f E$ & ad partes f conuerso, est ut patet dimidium ipsius quadrati æquantis quadratum $g c$; ergo si suspensio ex Q mutetur in suspensionem ex f , eidem parallelogrammo respondebit æquiponderans prius auctum spatio quod ad ipsum suspensum vel quadratum $g c$ sit ut recta $f Q$ ad $f E$ vel ut semicirculus ad quadratum $g c$: igitur quadrato $Q D M L$ ut iacet manenti, brachio $f E$, perpendicularo $f H$ æquiponderat dimidium quadrati $g c$ auctum dimidio circuli genitoris $f c$. Igitur toti parallelogrammo $H f D M$ æquiponderat dimidium quadrati $g h$, auctum dimidio circuli genitoris, & dimidio quadrati $g c$. Igitur summa conflata ex istis tribus æquiponderantibus est quinque quadrantes quadrati $g h$ aucti vndecim sextantibus circuli genitoris $f c$, & imminuti septem nouenis quadrati $g c$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si $g b z c$ ponatur semicycloides parua, & $b z c o h$ circuli quadrans translatus, sicuti in calculo secundo æquiponderantis processimus, ita procedemus in hoc casu: nam solidum cuius sectio parallela plano $m g h$ sit quadratum lateris $y o$ erit solidum quadrati $y z$ auctum solidum quadrati $o z$ & imminutum bis solidum rectanguli $A y z$: erit igitur æquale cylindræo altitudinis $g m$ baseos æquantis circulum genitorem imminutum dimidio quadrati $g h$, & insuper imminutum vndecim sextantibus quadrati $c g$. Dimidium verò huius baseos est æquiponderans figuræ $g c o h$, libra $B h$ suspensa ex g , perpendicularo $g c$, brachio $g B$.

PROPOSITIO XVIII.

Reuocato schemate propositionis decimæ quartæ (*Fig. 40.*) ex recta $g T$ producta abscindatur $T e$ æqualis rectæ $g c$ vel $g B$, & compleatur parallelogrammum $a T e m$. Intelligatur circa rectam $a D$ volui figura $a z b D$ & gigni solidum periphericum. Ad planum $T b D$ excitetur perpendicularis $A T$ æqualis rectæ $T e$, sitque $T u$ ad $T A$ ut circulus ad suæ diametri quadratum.

Ostendendum est quadranti huius solidi totius librâ $e b$ suspensâ

ex T perpendicularo plano A T a, brachio T e, æquiponderans esse æquale cylindræo altitudinis T u, baseos æquantis quinque quadrantes quadrati g h auctos viginti quinque nouenis quadrati g c, & imminutos vndecim sextantibus circuli genitoris

Parallelogrammo a T h Q, libra h T suspensa ex h perpendicularo h Q, brachio h C æquante rectam b h vel g c, æquiponderat ex supra demonstratis dimidium quadrati h T vel h g. Quadrato h b D Q æquiponderat dimidium ipsius quadrati: ergo rectangulo a D b T æquiponderat dimidium quadrati g h imminutum dimidio quadrati g c. Igitur si brachium h C mutetur in T e æquiponderans parallelogrammo a D b T est deducto priore æquiponderante spatium quod ad ipsum a D b T fit vt recta g h ad g f, hoc est vt semicirculus ad semidiametri quadratū, vel vt quadratum g h ad rectangulum h g c: sed a D b T æquat semicirculum imminutum quadrato D Q h b: est ergo quadratum g h imminutum semicirculo, & priore æquiponderante: est igitur dimidium quadrati g h auctum dimidio quadrati g c & imminutum semicirculo f c. Ergo solido cylindræo altitudinis T A, baseos a D b T æquiponderat cylindræum eiusdem altitudinis, baseos æquantis dimidium quadrati g h auctum dimidio quadrati g c, & imminutum semicirculo f c.

Solido cylindræo altitudinis T A vel d i, baseos a z b T æquiponderat cylindræum eiusdem altitudinis, baseos æquantis spatium quod figuræ a z b T, quæ est basis cylindræi suspensi, æquiponderat; atqui figuræ a z b T iisdem manentibus æquiponderat per corollarium superioris dimidium circuli f c genitoris, imminutum quadrante quadrati g h & insuper imminutum vndecim vnciis quadrati g c: ergo hæc est basis cylindræi æquiponderantis altitudine T A præditi.

Solido cuius sectio parallela plano A T a sit quadratum rectæ z i pertinentis ad figuram a z b T, æquiponderat per corollarium secundum decimæ sextæ quadrans quadrati quod potest recta g h, auctus quatuor nouenis quadrati g c, & imminutus triente circuli f c.

Ex methodo decimæ quartæ patet æquiponderans solido trium istorum computatorum primo esse æquale æquiponderantibus tribus quorum primum est solidum quadrati z i, secundum est solidum quadrati d z, tertium est solidum bis rectanguli d z i. Præterea patet æquiponderans solido ex iam computatis secundo esse æquale æquiponderantibus solidi quadrati z i & simul solidi rectanguli d z i: sed æquiponderans solido quadrati z i est tertium ex computatis; ergo si ex æquiponderante secundò computato auferatur æquiponderans tertio computatum, restabit æquiponderans solido rectanguli d z i, videlicet quinque sextantes circuli genitoris f c deducto dimidio quadrati g h & quadraginta nouem trigessimis sextis quadrati g c. Duplum huius baseos est quinque trientes circuli genitoris deducto quadrato g h & quadraginta

nouem decimis octauis quadrati $c g$. Huic duplo addatur basis æquiponderantis solido quadrati $z i$ supra reperta, conficietur quatuor trientes circuli genitoris deducto dodrante quadrati $g h$ & quadraginta & vna decimis octauis partibus quadrati $c g$. Atque hæc est basis cylindracei altitudinis $T u$ quod deduci debet de primo ex solidis computatis, vt restet spatium æquiponderans quadranti solidi ex circumductu figuræ $a z b D$ circa rectam $D a$ geniti, nempe cylindraceum altitudinis $T u$, baseos æquantis quinque quadrantes quadrati $g h$ auctos viginti quinque nouenis quadrati $g c$, & imminutos vndecim sextantibus circuli genitoris, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus, quadranti eiusdem solidi geniti ex circumductu figuræ $a z b D$ circa rectam $D a$ (*Fig. 40.*) si libra $B h$ suspendatur ex puncto g , perpendicularo plano $m g f$, brachio $g B$ æquiponderat solidum altitudinis $g \lambda$ vel $T u$, baseos æquantis quindecim decimas sextas partes quadrati $f a$; deductis vndecim sextantibus circuli genitoris, & quadrati $f c$ viginti quinque nouenis partibus.

Ex methodo vsurpata non semel iuxta libræ principia demonstrata in nona & decima secundi tetragonismicorum liquet si vt $T e$ vel $g c$ recta ad $a f$ æqualem semiperipheriæ circuli diametro $f c$ geniti, ita quadrans suspensus peripherici geniti reuolutione figuræ $a z b D$ circa rectam $a D$, fiat ad quartum spatium quod vocetur G , spatium istud G imminutum solido æquiponderante reperto in propositione proximè superiore esse æquale spatio quod eidem quadranti æquiponderat libræ $B h$ suspensæ ex g sicut præscripsimus.

Restat vt istud periphericum faciamus notum. Id verò ex decima nona primi ita præstamus. Sit $f t c g$ quadrans circuli genitoris: igitur figuræ $b r c t s$ libræ $f c$ suspensæ ex f perpendicularo $f a$, brachio $f x$ æquante rectam $f g$ æquiponderat per demonstrata in progressu decimæ octauæ primi, octaua pars circuli genitoris aucta quadroto $g c$. Quadranti circulari iisdem positis æquiponderat triens quadrati $g c$ auctus ipso quadrante circulari. Rectangulo $f g b D$ æquiponderat dimidium ipsius, hoc est dimidium rectanguli $f g h$ æquantis semicirculum $f c$; & rectanguli $D b h Q$ siue quadrati $g c$; ergo rectangulo $f g b D$ æquiponderat quadrans circuli $f c$ auctus dimidio quadrati $g c$. Igitur toti $D b r c f$ æquiponderat spatium æquans quinque octauas partes circuli $f c$ & vndecim sextantes quadrati $g c$.

Cum igitur toti $a b r c f$ per decimam octauam primi colligantur æquiponderare quinque quadrantes circuli $f c$, si isti æquiponderanti dematur æquiponderans figuræ $D b r c f$, relinquetur æquiponderans figuræ $a z b D$, nempe quinque semiquadrantes circuli $f c$, deductis vndecim sextantibus quadrati $g c$. Duplum istius est quinque quadrantes circuli $f c$,

tuli $f c$, deductis vndecim trientibus quadrati $c g$. Cylindraceum igitur cuius altitudo sit $g \lambda$, basis quinque quadrantes circuli $f c$, deductis vndecim trientibus quadrati $c g$, est æquale quadranti peripherici propositi.

Si vt $f g$ ad $a f$ ita fiant quinque quadrantes circuli $f c$ deductis vndecim trientibus quadrati $c g$, ad aliud H ; constat ex corollario primo decimæ istud H esse quinque quadrantes quadrati $f a$ deductis vndecim trientibus circuli $f c$. Sunt ergo spatia G & H vnum & idem: ergo æquiponderans quadranti peripherici circa rectam $D a$ manentem geniti motu figuræ $a z b D$ est cylindraceum altitudinis $g \lambda$ vel $T u$ baseos æquantis quindecim decimas sextas partes quadrati $f a$ deductis vndecim sextantibus circuli $f c$, & quadrati $g c$ viginti quinque nouenis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Si æquiponderans quadranti solidi circa axem $f D$ geniti motu figuræ $D b r c f$ inuenti in decimâ septimâ addatur æquiponderanti in præsentī propositione computato, fiet æquiponderans quæsitum quadranti peripherici circa $f a$ motu totius semicycloideos magnæ, cylindraceum videlicet altitudinis $g \lambda$, baseos continentis quinque quadrantes quadrati $f a$, deductis triginta duabus nouenis quadrati $g c$. Duplum verò illius æquiponderabit dimidio solidi eiusmodi peripherici plano per $f a$ recto ad planum $a f c$ diuisi; & quadruplum toti solido.

COROLLARIUM II.

Quoniam totum solidum suspensum, est per decimam nonam primi libri æquale cylindraceo altitudinis $g \lambda$ baseos æquantis denos circulos genitores, æquiponderans verò corollarij proximè superioris est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos continentis quinque quadrata $f a$ deductis centum viginti octo nouenis quadrati $g c$, patet solidum suspensum ad solidum æquiponderans ipsi, esse vt bases: igitur vt deni circuli genitores ad quinque quadrata $f a$ imminuta centum viginti octo nouenis quadrati $g c$, ita est brachium $g B$ ad interuallum quo distat à plano $m g c$ planum per centrum suspensi parallelum eidem plano $m g c$.

COROLLARIUM III.

Ex vigesima superioris libri apertè constat notum esse æquiponderans solido peripherico circa axem $f c$ genito libræ planæ perpendicularo $m g h$, vel ei parallelo alio quolibet: cum non discrepet ab isto reperto in propositione præsentī & in decima sexta superiore.

COROLLARIUM IV.

Porro ex methodo quam adhibuimus in tractando calculo duorum casuum propositorum, patet etiam via similis quam teneri oportet in aliis.

SIt cycloides magna a c d (*Fig. 41.*) cuius basis a d , circulus genitor a e f o centri g , axis c f : circa quamcunque z y L ordinatim utrinque applicatam ad axem c f circumuoluatur figura z c L , siue punctum y congruat alterutri punctorum g , f , siue ab iis differat. Huius solidi dimidium abscissum plano q y c ad planum c y z recto consideramus in praesenti.

Ostendendum est notam esse basim cylindracei altitudinis y q vel g c , æquiponderantis dimidio illius solidi librâ f c suspensa ex y perpendicularo plano q y z , brachio æquante rectam c g .

Quoniam ex decima octaua libri superioris figuræ z c p vel c s L secunda quadratrix nota est iisdem positis ; secunda verò quadratrix figuræ c p y vel c f y est nota ex methodo corollarij quarti decimæ quartæ propositionis tertij libri : ergo totius figuræ c z y vel c L y nota est secunda quadratrix : igitur ex methodo decimæ nonæ duplum huius erit basis cylindracei altitudinis q y æquiponderantis solidi peripherici dimidio proposito , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

In primo casu , quando videlicet punctum y congruit centro g , per decimam septimam superioris libri quadratrix secunda figuræ c z p est duæ nouenæ quadrati g c : sed figuræ p c y ex corollario quarto decimæ quartæ superioris libri respondet quadratrix æquans quadrantem figuræ c e g , hoc est decimam sextam partem circuli genitoris ; ergo decima sexta pars circuli genitoris aucta duobus nouenis quadrati g c est secunda quadratrix figuræ c z y : ergo per methodum decimæ nonæ tertij libri cylindraceum altitudinis c g baseos æquantis duplum illius spatij , videlicet octauam partem circuli genitoris auctam quatuor nouenis quadrati g c æquiponderat dimidio solidi quod ad rectæ c y partes z iacet.

COROLLARIUM II.

In secundo casu , quando videlicet punctum y congruit puncto f , per corollarium primum decimæ octauæ superioris libri figuræ c z p quadratrix secunda est quinque sextantes circuli genitoris ; sed semicirculi f e c quadratrix secunda æquat quinque octauas circuli genitoris ex methodo corollarij quarti iam laudati in superiore corollario : ergo secunda quadratrix toti a z c f respondens brachio f T æquante rectam f g , perpendicularo f a , est triginta quinque semunciarum circuli genitoris. Igitur ex methodo superioris corollarij duplum huius nempe triginta quinque vnciarum circuli genitoris erit basis æquiponderantis cylindracei altitudinis y q vel g c quod dimidio solidi æquiponderat.

COROLLARIUM III.

Vt quadratum circulo circumscriptum se habet ad circulum , hoc est

vt quadruplū primi termini progressionis perspectę definitę in corollario primo decimę propositionis libri superioris ad secundum, vel vt primus ad quadrantem secundi, ita recta yq æqualis rectę gc , fiat ad rectam yh . Quoniam cylindraceum A altitudinis y h baseos æquantis dimidium circuli genitoris auctum quatuor trientibus quadrati gc est æquale dimidio solidi descripti in primo casu, nempe quando punctum y congruit centro g ; si cylindraceum A conuertatur in cylindraceum B æquale ipsi, altitudinis yq , patet vt yq ad yh ita reciprocè esse basim solidi A ad basim solidi B : ergo basis solidi B est octaua pars quadrati fa aucta triente circuli genitoris, vel est octaua pars tertij termini aucta triente secundi: nam basis solidi A est dimidium circuli genitoris auctum quatuor trientibus quadrati gc , vel est dimidium secundi termini auctum quatuor trientibus primi. Suspendum igitur B primi casus & ipsi æquiponderans repertum in corollario primo se habent vt bases, cū eadem altitudine yq vel gc sint prædita: ac proinde in primo casu vt octaua pars quadrati fa aucta triente circuli se habet ad octauam partem circuli genitoris auctam quatuor nouenis quadrati gc , ita est suspendum ad æquiponderans. Vel vt octaua pars tertij termini perspectę progressionis aucta triente secundi se habet ad octauam secundi auctam quatuor nouenis primi, ita est suspendum ad æquiponderans.

COROLLARIUM IV.

Similiter cū in secundo casu suspendum sit cylindraceum A altitudinis y h, baseos æquantis decem circulos genitores, si mutetur in cylindraceum B altitudinis yq vel gc , istius basis erit quinque quadrantes quadrati fa vel tertij termini. Vt igitur basis solidi B ad basim solidi A repertam in corollario secundo, ita est in isto casu suspendum ad æquiponderans; est ergo suspendum ad æquiponderans vt quinque quadrantes quadrati fa ad triginta quinque vncias circuli genitoris: vel vt quinque quadrantes tertij termini ad triginta quinque vncias secundi; vel vt tertius ad septem trientes secundi.

PROPOSITIO XXI.

Paruę semicycloideos pars superior (Fig. 42.) sit $bzcg$, eius axis gc , basis gb , ex cf producta abscindatur gl æqualis rectę bg & iungatur recta bl : ad planum bgc excitetur perpendicularis gd æqualis rectę gc , & centro g intelligatur describi quadrans circularis $gdec$: per limbum dec moueatur recta parallela basi gb describens superficiem cylindraceam; per limbum bzc agatur parallela rectę gd describens aliam superficiem cylindraceam, vt istis superficiebus cylindraceis & plano $bgctz$ comprehendatur dicylindraceum ad positionem plani dgb genitum ex quadrante circulari $gced$, & ex figura $bzcg$. Recta bg bifariam secetur in o , & per

o ducatur op parallela rectæ g c & æqualis dimidio rectæ g c, intelligatur b q p g esse tota superior cycloides parua genita circulo semidiametri op, centri o. Intelligatur cylindraceum altitudinis g d baseos æquantis duas simul figuras nempe triangulum b l g, & figuram b q p g.

Ostendendum est ad positionem plani d g c dicylindraceum genitum ex quadrante circulari d g c & ex figura b z c g esse condita ratione æquale dimidio cylindracei duarum simul basium b l g, b q p g, altitudinis g d: & in eodem ad planum d g c, plano parallelo esse gravitatis centrum singulorum istorum solidorum inter se æqualium.

Per b ducatur b m parallela & æqualis rectæ g c, & figura m n g b subcontrariè describatur figura b z c g. In recta b g sumptum sit quodcunque punctum h & per illud ducta sit h s complens parallelogrammum d g h s; completo parallelogrammo c g b r quod erit sectio cylindri baseos g d e c, & parallelogrammo c g h u, si in plano s h u describatur quadrans circularis s h u t, erit is sectio cylindri & plani s h u: recta h u occurrat limbo b z c in z, & per z ducatur ordinatim applicata z t parallela semidiametro h s; recta u h producta occurrat in q, i, n lineis b q p g, b l, m n g; iungaturque recta h t. Igitur dicylindracei geniti ex quadrante circulari g d e c & ex figura b z c g ad positionem plani d g b, sectio communis cum plano s h u est figura s h z t comprehensa sub arcu s t & sub rectis s h, h z, z t; siue est sector s h t, vnà cum triangulo h z t, quod est dimidium rectanguli h z t V. Præterea rectangulum h z t V continetur sub z t sinu arcus t u, & sub t V sinu arcus complementi t s: sed recta h n est per tertiam secundi libri æqualis sinui complementi arcus s t: ergo rectæ n h, z t sunt æquales: ergo rectangulum n h z est æquale rectangulo h z t: ergo dimidium rectanguli n h z est æquale triangulo h z t. Cum igitur per septimam libri eiuldem secundi rectangulo n h z æquale sit rectangulum altitudinis g d baseos q h, patet dimidium rectanguli altitudinis g d, baseos q h esse æquale triangulo h z t.

Rursus ducta e a ordinatim applicata & parallela semidiametro g d, quoniam ex generatione cycloideos parux b z c g, arcui c e vel u t est æqualis recta z a vel g h, tota autem g b est æqualis arcui c e d vel u t s, residua h b erit æqualis residuo arcui s t: ergo per demonstrata in progressu tertiæ primi libri rectangulum contentum sub g d & sub recta b h vel h i est duplum sectoris g e d vel h t s: igitur cum dimidium rectanguli g d, h i & dimidium rectanguli g d, h q sint æqualia sectori h s t & triangulo h z t singula singulis, patet dimidium rectanguli altitudinis g d, baseos compositæ ex duabus q h, i h esse æquale figuræ h s t z quæ est sectio plani s h u ad libitum sumpti cum dicylindraceo genito ex quadrante circulari & ex figura b z c g: ergo per vndecimā quarti tetragonismicorū istud

dicylindraceum est ad positionem plani $d g c$ condita ratione æquale dimidio cylindracei altitudinis $g d$, baseos compositæ ex triangulo $b l g$, & ex parvæ cycloidis superiore parte $b q g$: atque adeo planum parallelum plano $d g c$ incedens per gravitatis centrum dicylindracei, incedit quoque per centrum gravitatis cylindracei, & duplum eius quod illi æquiponderat, æquiponderat pariter & isti, libræ perpendiculo plano posito $d g c$ vel quouis parallelo ad illud, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Iisdem manentibus (Fig. 42.) ostendendum est si ex $b g$ abscindatur $g y$ æqualis rectæ $g c$, libræ grammicæ $y b$ suspensæ ex g perpendiculo $d g c$ notum esse data circuli quadratura, æquiponderans cuilibet dicylindracei geniti ut supra ex figuris $b z c g$, $d g c$ e portioni sumptæ ad positionem plani $d g c$. Quando autem sumitur totum dicylindraceum, æquiponderantis duplum esse cylindraceum altitudinis $g d$ vel $g c$, baseos æquantis octavam partem circuli genitoris diametri $f c$, auctam spatio quod ad sextantem quadrati $b g$ sit ut dimidium quadrati circulo circumscripti ad ipsum circulum.

Istud patet ex eo quod cylindraceum altitudinis $g d$ baseos æquantis dimidium æquiponderantis duabus simul figuris planis $b l g$, $b q g$ ad positionem rectæ $g c$ sumptis, est per superiorem, istud æquiponderans quæsitum: atqui portioni trianguli $l g b$ notum est æquiponderans, cum notum sit eiusmodi portiones centrum gravitatis, ipsaque portio sit nota dato tetragonismo circuli; figuræ $b q g$ æquiponderans quoque notum est ex tertia tertij: ergo notum est æquiponderans portioni dicylindracei propositæ quod erat generaliter ostendendum.

In casu verò totius dicylindracei propositi res ita ad numeros exigitur. Ex $b g$ recta abscindatur $g A$ æqualis ipsi $b g$: ergo brachio $g A$ perpendiculo $g l$ æquiponderans triangulo $l b g$ est triens ipsius trianguli; ut ex sexta quadraturæ parabolæ Archimedæ liquet: ergo cum triangulum $b g l$ sit dimidium quadrati $b g$ istud æquiponderans est sextans quadrati $b g$. Rursus quoniam per octavam secundi tetragonismicorum si brachium $g A$ mutetur in $g y$, ut est $g A$ ad $g y$ ita vicissim est æquiponderans brachij $g y$ ad aliud brachij $g A$; ut autem $g y$ ad $g A$ ita est (ut patet ex methodo corollarij duodecimæ libri tertij) quadrans quadrati circumscripti circulo ad semicirculum ipsum, vel ita est dimidium quadrati circumscripti ad circulum; ergo brachio $g y$, æquiponderans triangulo $b l g$ est spatium quod ad sextantem quadrati $b g$ sit ut circulus ad dimidium circumscripti quadrati.

Rursus quoniam figuræ totius $b p g$ centrum gravitatis est in axe $o p$ æquiponderans illi, brachio $g A$ erit dimidium totius figuræ $b q g$, hoc est spatium æquale quadrato $p o$ ut ex duodecima primi & ex nona secundi

constat: sed quadratum $p o$ est quarta pars quadrati $g c$; ergo æquiponderans istud est quarta pars quadrati $g c$. Igitur si brachium $g A$ mutetur in $g y$ æquiponderans respondens brachio $g y$ erit octava pars circuli semidiametro $g c$ descripti, ac proinde duplum æquiponderantis quæsitum erit octava pars circuli genitoris diametri $f c$, aucta spatio quod ad sextantem quadrati $b g$ sit ut dimidium quadrati circumscripti ad ipsum circum. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam progressionis primæ perspectæ primus terminus ponitur quadratum $g c$, secundus verò circulus $f c$ duplus rectanguli $c g b$, recta $c g$ ad $g b$ erit ut primus terminus ad dimidium secundi, vel ut tertius ad dimidium quarti: sed ut tertius ad dimidium quarti ita est semuncia tertij ad quadragesimā octavā partem quarti termini; ergo cum sextans quadrati $b g$ sit semuncia tertij termini, spatium quod ad sextantem quadrati $b g$ sit ut dimidium quadrati circulo circumscripti ad ipsum circum, erit quadragesima octava pars quarti termini progressionis cuius primus terminus est quadratum semidiametri circuli, secundus est ipse circulus.

PROPOSITIO XXIII.

SIt (*Fig. 43.*) tota semicycloides parva $a b c f$, cuius axis $f c$, basis $f a$; maneat ut in superiore quadrans circularis $d g c$, completusque sit semicirculus $f d c$.

Ostendendum est libra grāmica $y b$ suspensa ut supra, æquiponderans dicylindraceo genito ad positionem plani $d g b$ ex quadrante circulari $f e d g$ & ex figura $b z a f g$, esse condita ratione æquale cylindraceum altitudinis $g d$, baseos notæ posito tetragonismo circuli. Quando verò totum dicylindraceum sumitur, æquiponderans illi esse æquale cylindraceo altitudinis eiusdem, baseos æquantis dimidium quarti termini progressionis primæ perspectæ iam explicatæ deducta decima sexta parte quadrati $f a$, & simul septem quadragesimis octavis partibus circuli genitoris diametro $f c$ descripti.

Compleatur parallelogrammum $f a q g$, & ex recta $b q$ abscindatur $q r$ æqualis rectæ $a q$ vel $g f$; compleatur quoque parallelogrammum $d g q o$. Igitur libra $r b$ suspensa ex q perpendiculari $o q a$ (cū $a z b q$ sit eadem atque $b f c g$ sed subcontrariè posita, ut ex octava secundi libri constat) notum erit ex superiore æquiponderans dicylindraceo genito ex quadrante circulari $f e d g$ & ex figura $a z b q$: sed notum est etiam æquiponderans dicylindraceo genito ex toto parallelogrammo $a q g f$ & ex quadrante circulari $f e d g$, ergo per subtractionem notum est æquiponderans dicylindraceo genito ex quadrante circulari $f e d g$, & ex figura $a z b g f$ ad positionem plani $d g b$. Rursus cū per octavam nota sit dicylindracci totius pars quæ insitit basi $a z b q$ ad positionem rectæ $g q$ sum-

ptæ si ex dicylindraceo noto cuius basis sit parallelogrammum $f a q g$ vel quælibet eius pars sub parallela rectæ $g b$, auferatur pars illa, relinquetur nota altera pars baseos $a z b g$: ergo cum pars ista sit nota, & illius æquiponderans brachio $q r$, notum quoque erit illius æquiponderans brachio $g y$, vt ex nona & decima secundi tetragonismicorum liquet: ergo generaliter ostendimus quod erat demonstrandum.

In casu verò proposito æquiponderans parti baseos $a z b q$ totius, est per superiorem cylindraceum altitudinis $q o$ vel $g d$ baseos æquantis decimam sextam partem circuli genitoris $f c$ auctam nonagesima sexta parte quarti termini perspecti. Ipsa verò portio baseos $a z b q$ est per septimam æqualis cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos æquantis quadrantem quadrati $g c$, & decimam sextam partem quadrati $f a$ vel tertij termini perspecti. Igitur propter mutationem perpendiculari $a q$ in perpendicularum $f g$, & brachij $q r$ in $g y$, prima pars baseos suspensi mutabitur in quadrantem circuli genitoris; altera verò pars mutabitur in decimam sextam partem quarti termini progressionis perspectæ. Ergo æquiponderans portioni baseos $a z b q$ brachio $g y$ est cylindraceum altitudinis $g d$ baseos æquantis quadrantem circuli genitoris & simul decimam sextam partem quarti termini perspectæ progressionis, deductâ decima sexta parte circuli genitoris, & deductâ nonagesima sexta parte quarti termini perspecti. Igitur ratione omnium subductâ, basis cylindracei brachio $g y$ æquiponderantis portioni insistenti super $a z b q$ est quinque nonagesimæ sextæ quarti termini auctæ tribus decimis sextis circuli genitoris.

Rursus cylindraceo altitudinis $f a$, baseos $f e d g$, ex methodo tradita in vigesima prima propositione æquiponderat cylindraceum altitudinis $d g$ baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti. Nam si brachium æquet rectam $f a$ æquiponderans erit dimidium ipsius cylindracei, hoc est, erit cylindraceum cuius altitudo $f m$ dimidium rectæ $f a$, basis quadrans circulaais $f e d g$, hoc est, quadrans secundi termini; si ergo brachium longitudinis $f a$ mutetur in brachium longitudinis $g y$, æquiponderantis illius basis quadrans secundi termini mutabitur in quadrantem tertij; ergo brachio $g y$ posito, æquiponderans est cylindraceum A altitudinis $f m$ vel $m a$, baseos quadrantis tertij termini. Quoniam verò vt dimidium rectæ $f g$ vel $g y$ ad dimidium rectæ $f a$, ita est quadrans tertij termini ad quadrantem quarti, cylindraceum B cuius altitudo sit dimidium rectæ $f g$, basis quadrans quarti termini perspecti erit æquale cylindraceo A propter leges reciprocationis: sed propter easdem leges cylindraceo B est æquale cylindraceum D altitudinis $g f$ baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti: ergo cylindraceo baseos $f e d g$ altitudinis $f a$, posito brachio $g y$, perpendicularo plano $d g f$, æquiponderat cylindraceum D altitudinis $g d$ vel $f g$, baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti prout fuit propositum.

Quoniam verò si ex æquiponderante totius cylindracei baseos $f e d g$

dematur æquiponderans partis insistentis super $q a z b$ restat æquiponderans alteri parti, patet æquiponderans parti quæ situm esse septem nonagesimas sextas quarti termini progressionis perspectæ deductis tribus decimis sextis circuli genitoris, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam æquiponderans in superiore propositione computatum, est cylindraceum altitudinis $g d$, baseos æquantis decimam sextam partem circuli genitoris auctam nonagesima sexta parte quarti termini perspecti: toti dicylindraceo baseos $a b c f$ confusus in vnum æquiponderantibus demonstratis in ista & in superiore, æquiponderat cylindraceum altitudinis $g d$ baseos æquantis vnciam quarti termini perspecti imminutam octaua parte circuli genitoris

PROPOSITIO XXIV.

Iisdem manentibus (*Fig. 43.*) intelligatur figura $f h u l c$ quæ sit tertia ad positionem rectæ $g b$ post secundam $a z c f$ & primam parallelogrammum cuius latus æquat rectam $g y$; earum verò hæc sit proprietas vt quæcunque $n u$ parallela rectæ $f a$ ducatur occurrens lineis $a z b c$, $h u l c$ in z , u , tres rectæ, $g y$, $n z$, $n u$ sint proportionales. Sit præterea figura $f p c$ illa quam in superiore inuenimus esse basim cylindræci altitudinis $g y$, æquiponderantis condicta ratione ad positionem plani $d g b$ dicylindræco genito ex semicirculo $f d c$ & ex figura $a b c f$.

Ostendendum est dicylindræceum genitum ex semicirculo $f d c$ & ex figura $h u l c f$ ad positionem plani $d g b$ esse condicta ratione æquale cylindræco altitudinis $g d$ baseos figuræ $f p c$ bis sumptæ.

Quoniam enim completo parallelogrammo $f x y g$ & $c g y B$ si intelligatur libræ planæ axis $f c$ sustentaculum $x B$, & ad positionem rectæ $g b$ aptetur sustentaculo $x B$ dimidium tertij gradus $h u c f$, istud dimidium ita aptatum æquiponderat condicta ratione figuræ $a z c f$ vt iacet manenti, ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum; (nam vt brachium $n D$ ad dimidium rectæ $n z$, ita ipsa $n z$ ad dimidium rectæ $n u$ aptatum puncto D) igitur posita eadem altitudine $n e$ parallelogrammo $z n e$ æquiponderat parallelogrammum altitudinis $n e$ baseos æquantis dimidium rectæ $n u$; ac proinde dicylindræco genito ex semicirculo $f e c$ & ex cycloide parua $a z c f$ æquiponderat axe $f c$ perpendicularo plano $d g c$ dicylindræceum genitum ex dimidio figuræ $h u c f$ aptato ad sustentaculum $x B$, & ex eodem semicirculo $f e c$. Quoniam verò eidem iisdem positis æquiponderat cylindræceum altitudinis $g d$, baseos $f p c$ pariter aptatæ sustentaculo $x B$, patet dicylindræceum aptatum, esse æquale cylindræco aptato: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLL.

Calculus pro casu duplici computato in superiori propositione patet pro præfenti, cui duplum prioris competit.

PROPOSITIO XXV.

SIt (Fig. 44.) quævis figura $b f c a$ ad positionem rectæ $c a$ insistens super recta $b a$ constituenta cum $a c$ angulum rectum $b a c$: super $b a$ constructum sit quodcunque rectangulum $b a u h$. Intelligatur figura $a b f c$ per lineam $b e d$ diuisa in duas $b e d a$, $b f c d e$, quarum $b e d a$ dicatur prima pars, & secunda $b f c d e$. Ad positionem rectæ $a u$ ponatur primus gradus parallelogrammum $b a u h$, secundus figura $b e d a$, tertius figura $b l m a$, ita vt tres eorum quælibet dimetientes $g o$, $g e$, $g l$ parallelæ ad rectam $a u$, sint proportionales: ponatur rursus idem primus gradus, secundus figura $b c d e$, tertius figura $b i r a$, ita vt tres eorum dimetientes $g o$, $e f$, $g i$ sint proportionales: intelligatur denique figura $h u r p q$ ita se habens ad primam & secundam partem, vt sicuti est $o g$ dimetiens primi gradus ad $g e$ dimetientem partis primæ, ita sit $f e$ dimetiens secundæ ad $o s$ dimidium rectæ $o p$ dimetientis figuræ $h u r q$. Figuram cuius dimetiens $f g$ voco mixtam videlicet ex prima parte & ex secunda: figuram cuius dimetiens $g l$ vocabo tertium gradum primæ partis; figuram dimetientis $g i$, tertium secundæ: figuram dimetientis $o s$ vocabo *ignotam*, eo quod ad præsentem demonstrationem non sit necessarium vt cognita sit. Tertium gradum mixtæ, illum dicam qui posito primo $b a u h$, respondet secundo $b f c a$.

Ostendendum est tertium gradum mixtum componi ex tertio gradu primæ & secundæ partium, & ex ignota.

Quoniam enim quadratum $f g$ æquale est duobus quadratis $f e$, $e g$ & bis rectangulo $f e g$, quadrato autem $f e$ est æquale rectangulum $o g i$, quadrato $e g$ rectangulum $o g l$, bis rectangulo $f e g$ rectangulum $g o p$, patet rectangulum altitudinis $g o$ baseos compositæ ex rectis $g i$, $g l$, $o p$ esse æquale quadrato $g f$; ergo tres rectæ $g o$, $g f$ & composita ex tribus $g i$, $g l$, $o p$ sunt proportionales, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXVI.

Iisdem manentibus (Fig. 44.) ad positionem rectæ $d a$ dicylindraceum genitum ex ignota & ex prima parte est æquale dicylindraceo ex secunda parte & ex tertio gradu primæ: dicylindraceum verò genitum ex ignota & ex secunda est æquale dicylindraceo genito ex prima parte & ex tertio secundæ.

P

Quoniam ut parallelogrammi $b a u h$ dimetiens $g o$ ad $g e$ dimetientem primæ partis, ita est $f e$ dimetiens secundæ ad $o s$ dimetientem ignotæ; si ut $o g$ ad $g e$, ita fiat $o s$ ad quartam notatam elemento F ; dimetiens $e f$ secundæ partis erit ad quartam F in duplicata ratione rectorum $g o, g e$: sed recta $g o$ ad $g l$ est in eadem duplicata ratione rectorum $g o, g e$, cum tres rectæ $g o, g e, g l$ sint proportionales: ergo ut $g o$ dimetiens parallelogrammi ad $g l$ dimetientem tertij gradus primæ partis, ita $e f$ dimetiens secundæ partis ad F : ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub tertio primæ partis & sub secunda parte est æquale cylindræco sub extremis contento, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis F . Præterea cum tres $g o, g e, g l$ sint proportionales tribus $e f, o s, F$ & ternarij utriusque ratio sit continua, erit ut $g o$ dimetiens parallelogrammi ad $g e$ dimetientem primæ partis, ita $o s$ dimetiens ignotæ ad F : ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub prima parte & sub ignota est æquale cylindræco contento sub extremis, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis F . Atqui eidem cylindræco ostendimus supra æquale esse dicylindraceum contentum sub tertio gradu primæ partis & sub secunda parte: ergo istud dicylindraceum sub tertio gradu primæ partis & sub secunda parte contentum est æquale dicylindræco contento sub prima parte & sub ignota, quod erat primò propositum.

Rursus quoniam ut parallelogrammi $b a u h$ dimetiens $g o$ ad $f o$ dimetientem secundæ partis, ita est $g e$ dimetiens primæ ad $o s$ dimetientem ignotæ, si ut $g o$ ad $f e$ dimetientem secundæ partis ita fiat $o s$ ad quartam notatam elemento G , dimetiens $g e$ secundæ partis erit ad quartam G in duplicata ratione rectorum $g o, f e$: sed recta $g o$ ad $g i$ est in eadem duplicata ratione, cum tres rectæ $g o, f e, g i$ sint proportionales: ergo ut $g o$ dimetiens parallelogrammi ad $g i$ dimetientem tertij gradus secundæ partis, ita $g e$ dimetiens primæ partis ad G . Præterea cum $g o, f e, g i$ sint proportionales & in eadem ratione sint quoque tres $g e, o s, G$; erit ut $g o$ dimetiens parallelogrammi ad $f e$ dimetientem secundæ partis, ita $o s$ dimetiens ignotæ ad G : ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub secunda parte & sub ignota est æquale cylindræco sub extremis, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis G . Atqui eidem cylindræco ostendimus paulò antè æquale esse dicylindraceum contentum sub tertio gradu secundæ partis & sub prima parte: ergo istud dicylindraceum sub tertio gradu secundæ partis & sub prima comprehensum est æquale dicylindræco contento sub secunda parte & sub ignota, quod erat secundo loco propositum.

COROLLARIUM.

Quoniam tertius gradus mixtus componitur ex tertio gradu primæ & secundæ partis & bis ex ignota, patet dicylindraceum sub tertio mixto gradu & sub secundo mixto $b f c e$ esse æquale octo dicylindræcis geni-

tis ex tertio gradu primæ ducto in primam; ex eodem tertio ducto in secundam: item ex tertio gradu secundæ ducto in primam, & ex eodem tertio ducto in secundam; item ex ignota ducta bis in primam, & ex eadem ignota ducta bis in secundam. Cum igitur per præsentem dicylindraceutum ex ignota ducta bis in primam sit dicylindraceutum bis ex tertio gradu primæ & ex secunda genitum; dicylindraceutum verò ex ignota ducta bis in secundam sit dicylindraceutum bis ex tertio gradu secundæ & ex prima genitum, patet octo illa dicylindraceuta esse dicylindraceutum sub prima & sub tertio primæ gradu, dicylindraceutum item sub prima & ter sub tertio secundæ; præterea dicylindraceutum sub secunda & sub tertio ipsius gradu, & dicylindraceutum sub secunda & ter sub tertio gradu primæ. Igitur dicylindraceutum sub tertio mixto gradu & sub secundo contentum, est æquale dicylindraceuto sub prima & sub eius tertio gradu, dicylindraceuto quoque sub prima & ter sub tertio gradu secundæ; dicylindraceuto præterea sub secunda & sub tertio ipsius secundæ gradu, dicylindraceuto denique sub secunda & ter sub tertio primæ gradu. Vnde patet. ignotam euanuisse, nec eam hîc requiri.

PROPOSITIO XXVII.

Reuocetur schema decimæ quartæ (Fig. 40.) & in eo figura a b r c f consideretur ad positionem rectæ f a tanquam composita ex duabus partibus quarum prima sit semicirculus f B c vel figura a b r c h, secunda pars sit semicycloides parua a h c f. Intelligatur primus gradus ad positionem rectæ g b esse parallelogrammum E f c lateris f E æquantis rectam g B vel g c: intelligatur parabolicum segmentum f b c cuius basis f c: intelligatur figura p q c f quæ sit tertius gradus secundæ partis a z c f. Intelligatur tertius gradus mixtæ a b c f genitus vt in vigesima quinta præscriptum fuit; concipiatur quoque gigni ignota figura ibidem definita.

Ostendendum est tertium gradum mixtæ ad positionem rectæ g b componi ex parabolico segmento f B c, ex figura p q c f, & ex bis ignota.

Quoniam enim f B c est segmentum parabolicum cuius basis f c æquat diametrum semicirculi f B c, ex tertia tetragonismicorum liquet tertium gradum semicirculi esse parabolicum illud segmentum: igitur ex vigesima quinta patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex corollario superioris sequitur dicylindraceutum genitum ex mixta & ex tertio ipsius gradu ad positionem plani m g b esse æquale octo spatiis expositis in illo eodem corollario.

DE CYCLOIDE

PROPOSITIO XXVIII.

Quadrata $gadc$, $agfb$ (*Fig. 45.*) constituent rectangulum $bfc d$, in quo descriptum sit parabolicum segmentum $b g d$ cuius basis $b d$, axis ag , tangens fc : ad planum $b f c d$ excitata sit perpendicularis $c n$ æqualis lateri $c d$: super recta fc ad positionem rectæ ga insitit quævis figura $f m l c$. Intelligatur ad positionem plani $n c d$ ex parabola $b g h d$ & ex figura $f m c$ gigni dicylindræceum; librâ grammica fc ex g suspensa perpendiculo gm , brachio fg gignatur quadratrix prima $g r c$ & secunda $g q c$ respondentes primariæ figuræ $g m l c$, ita ut sicut fg brachium ad gi quamcunque portionem rectæ gc , sic sit il dimetiens figuræ suspensæ parallela perpendiculo gm , ad ir dimetientem primæ quadratricis, ipsæque ir ad $i q$ dimetientem secundæ: brachio verò gc gignantur duæ similiter quadratrices $gu f$, $gt f$ ita ut sicut brachium gc ad gs , sic sit fx ad fu , & fu ad ft .

Ostendendum est ad positionem plani $n c d$ dicylindræceum genitum ex parabola $b p g h d$ & ex figura $f m l c$ esse conditâ ratione æquale cylindræceo altitudinis $c n$ baseos $ft g q c l m x$.

Iunctis rectis gd , gb , constat ex methodo vigesimæ quintæ & sextæ propositionis quarti libri tetragonismicorum dicylindræceum genitum ex figura $g m l c$ & ex ceratoide parabolica $ghd c$, itemque aliud genitum ex figura $g m x f$ & ex ceratoide parabolica $g p b f$ esse conditâ ratione æquale cylindræceo altitudinis $c n$, baseos $g q c$, $gt f$. Patet quoque cylindræceum altitudinis $c n$, genitum ex parallelogrammo $b f c d$ & ex figura $f x m l c$ diuidi in duo genita & partibus parallelogrammi nempe ex parabola $b p g h d$, & ex complemento ad parallelogrammum: ergo dicylindræceum genitum ex parabola & ex figura $f m c$ ad positionem plani $n c d$ est conditâ ratione æquale cylindræceo altitudinis $c n$, baseos $ft g q c l m x$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si $f m c$ ponatur circulus, ex quarto corollario decimæ quartæ tertij libri patet notum esse rectilineum æquale figuræ $g q c$, datâ circuli quadraturâ; ipsamque totam $g q c$ esse quadrantem figuræ $g m c$, duasque simul $g q c$, $gt f$ esse octauam partem circuli geniti diametro fc : ergo in hoc casu tota sit $g q c l m x$, est semicirculus $f m c$ imminutus quarta parte ipsius; est ergo tres quadrantes semicirculi, vel tres octauæ totius circuli. Dimidium verò illius figuræ est tres decimæ sextæ partes eiusdem circuli.

PROPOSITIO XXIX.

Iisdem manentibus (*Fig. 46.*) figura $g m l c$ sit parua cycloideos pars superior, & $f g m x z$ sit-eiusdem pars inferior.

Ostendendum est tam figuram $g q c l m$, quam $z t g m x$ esse rectilineo noto æqualem posita quadraturâ circuli: & totam $g q c l m$ esse æqualem septem nouenis quadrati $g c$: totam verò $z t g m x$ esse æqualē beffi circuli genitoris $f c$ deductis septem nouenis quadrati $g c$.

Quoniam $g m l c$ est superior pars semicycloideos parua, secunda illius quadratrix $g q c$ brachio $f g$ perpendicularo $g m$ erit nota per decimam septimam superioris libri, posita quadraturâ circuli. Totâ verò $g q c$ per eandem propositionem erit duæ nouenæ quadrati $g c$: sed tota $g c l m$ ex duodecima primi est æqualis quadrato $g c$: igitur tota $g q c l m$ est septem nouenæ quadrati $g c$.

Rursus completo parallelogrammo $f g n z$, quoniam figura $m x z n$ est subcontrariè posita figuræ $g c l m$ ex octauæ secundi corollario, librâ $f g$ suspensâ ex g perpendicularo $g m$, brachio $g c$ posito etiam ad partes oppositas brachij prioris $f g$, figuræ $m x z n$ secunda quadratrix erit nota per decimam septimam tertij: sed parallelogrammi $g f B n$ secunda quadratrix est etiam nota per duodecimam tertij tetragonismicorum; ergo per subtractionem nota erit quadratrix secunda $f g t$ ad positionem rectæ $g m$ sumpta. Ergo si de quadratrice secunda parallelogrammi $g f B n$, siue B congruat puncto z siue non, dematur illa secunda, residua fiet secunda quadratrix $f t g$ figuræ $f x m g$: parallelogrammum verò $f g n B$ est ad $f g n z$ siue ad circulum genitorem, ut recta $f g$ ad $g f$.

Igitur quando tota $z t g m$ quæritur, secunda quadratrix totius parallelogrammi $g f z n$ est triens circuli genitoris, secunda verò figuræ $m x z n$ est duæ nouenæ partes quadrati $g c$: ergo secunda $f g t z$ est triens circuli genitoris deductis duabus nouenis quadrati $g c$. Cum igitur figura $f z x m g$ sit circulus genitor deducto quadrato $g c$, erit $g t z m$ duo trientes circuli genitoris deductis septem nouenis quadrati $g c$: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc patet per additionem duas simul $z t g m$, $g q c l m$ esse æquales beffi circuli genitoris, ideoque dicylindraceum ex parabola tota $b g d$ & ex tota semicycloide parua $f c m z$ esse æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam $g c$, baseos complectentis beffem circuli genitoris. Dicylindraceum verò ex $a g d$ & ex $g m l c$ cylindraceo altitudinis eiusdem baseos æquantis septem nouenas quadrati $g c$.

PROPOSITIO XXX.

Reducta figura propositionis vigesimæ tertiæ (*Fig. 43.*) ostendendum est dicylindraceum sub secunda parte figuræ mixtæ,

hoc est sub figura $f a b c$, & sub eius tertio gradu $h l c f$ ad positionem plani $d g b$ genitum esse ad eandem positionem æquale cylindraceo altitudinis $g d$ vel $g c$, baseos notæ; dato circuli tetragonismo.

Intelligatur solidi geniti circumuolutione figura $f a z c f$ circa rectam $f c$ quadrans qui insistit figura $a z c f$: isti quadrantis libræ planæ axe $f c$ sustentaculo $x B$ perpendicularo plano $d g c$ æquiponderans est notum per septimam & per decimam tertij libri: ergo per sextam eiusdem libri spatium sesquialterum istius æquiponderantis æquiponderat solido cuius sectiones parallelæ plano $d g b$ sint quadrata lateris $n z$, $g b$ & c . Igitur per corollarium quartum octauæ propositionis libri eiusdem si spatium eiusmodi sesquialterum conuertatur in cylindraceum cuius altitudo sit recta $g d$, duplum baseos illius erit quartus gradus, posito ad positionem rectæ $g b$ primo $f x B c$, secundo $f a b c$, tertio $f h l c$. Igitur cum cylindraceum sub primo gradu & sub quarto sit per vndecimam quarti tetragonismicorum æquale dicylindraceo sub secundo & tertio, patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex corollario primo septimæ propositionis libri superioris habemus æquiponderans parti illi quadrantis propositi quæ insistit super superiore parte $b f c$ esse cylindraceum altitudinis $g d$ vel $g c$, baseos æquantis quadratum $g b$ vel quadrantem quadrati $f a$ imminutum duplo quadrati $g c$: cylindraceum istius sesquialterum retenta eadem altitudine habet pro basi tres octauas quadrati $f a$ imminutas triplo quadrati $g c$: quartus igitur gradus est tres quadrantes quadrati $f a$ deductis tribus quadratis $g c$. In isto igitur casu dicylindraceum genitum ex secundo & tertio gradu est æquale cylindraceo altitudinis $g d$, baseos continentis tres quadrantes quadrati $f a$ imminutos tribus quadratis $g c$.

COROLLARIUM II.

Ex corollario primo decimæ propositionis libri eiusdem habemus æquiponderans quadrantis propositi insistens super tota basi $a z c$ esse cylindraceum altitudinis $g d$ vel $g c$, baseos æquantis trientem quarti termini progressionis perspectæ imminutum duobus circulis genitoribus. Cylindraceum istius sesquialterum retenta eadem altitudine habet pro basi dimidium quarti termini progressionis perspectæ imminutum tribus circulis genitoribus. In isto igitur casu dicylindraceum genitum ex secundo & tertio gradu est æquale cylindraceo altitudinis $g d$, baseos complectentis quartum terminum progressionis perspectæ imminutum sex circulis genitoribus.

PROPOSITIO XXXI.

Reuocato schemate (Fig. 40.) propositionis vigesimæ septimæ, ostendendum est dicylindraceum genitum ex figura $a b c f$, quæ

est magna semicycloides, & ex tertio ipsius gradu $p q c f$ ad positionem plani $m g b$ esse conducta ratione æquale cylindræo altitudinis $m g$, baseos æquantis rectilineum notum, datâ quadraturâ circuli.

Ex corollario vigesimæ quintæ liquet eiusmodi dicylindræum esse æquale octo spatiis nempe dicylindræo E genito ex prima parte $a b c h$ & ex tertio ipsius gradu: dicylindræo insuper F genito ex secunda parte $a o h c f$ & ex eius tertio gradu: præterea ter dicylindræo G genito ex prima & ex tertio gradu secundæ: denique ter dicylindræo H genito ex secunda & ex tertio gradu primæ. Atqui E est cylindræum altitudinis $g m$ vel $g c$, baseos æquantis rectilineum notum per corollarium vigesimæ octauæ huius libri: F quoque est æquale cylindræo eiusdem altitudinis, baseos notæ per trigessimam huius: G pariter est æquale cylindræo eiusdem illius altitudinis, baseos notæ per vigesimam quartam: H denique est æquale cylindræo eiusdem altitudinis, baseos notæ per vigesimam nonam præsentis libri: ergo totum dicylindræum ex illis collectum est æquale cylindræo altitudinis $g m$, baseos æquantis illorum cylindræorum iam demonstratorum bases: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex corollariis vigesimæ quartæ, vigesimæ octauæ, trigesimæ, & vigesimæ nonæ constat pro casu superioris partis $b r c g$ istud dicylindræum esse æquale cylindræo altitudinis $g m$, baseos æquantis decimam sextam partem quarti termini progressionis perspectæ auctam tribus quadrantibus tertij siue quadrati $f a$, nouem decimis sextis secundi siue circuli genitoris $f c$, & imminutam besse primi siue quadrati $g c$. Nam basis cylindræi æqualis spatio E dat tres decimas sextas circuli genitoris: basis cylindræi F dat tres quadrantes quadrati $f a$ imminutos tribus quadratis $g c$: basis cylindræi G ter sumpta dat decimam sextam partem quarti termini auctam tribus octauis circuli genitoris: basis cylindræi H ter sumpta exhibet septem trientes quadrati $g c$. Summa ex illis basibus conflata est illa quam protulimus initio corollarij.

COROLLARIUM II.

Ex iisdem illis constat pro casu totius semicycloideos magnæ $a b c f$ istud dicylindræum esse æquale cylindræo altitudinis $g m$, baseos æquantis tres semisses quarti termini imminutos triginta quinque octauis circuli genitoris siue secundi termini. Nam basis cylindræi E dat tres octauas circuli genitoris: basis cylindræi F dat quartum terminum imminutum sex circulis genitoribus: basis cylindræi G ter sumpta dat dimidium quarti termini imminutum tribus quadrantibus circuli genitoris: basis cylindræi H ter sumpta dat duos circulos genitores, quarum basium summa consonat proposito calculo.

Quoniam primus gradus ad positionem rectæ gh est parallelogrammum Efc , secundus semicycloides magna $abcf$, tertius $pqcf$, patet quartum esse æqualem basi collectæ ex basibus illorum octo cylindraceorum altitudinis gm : nam ut Ef dimetiens primi gradus ad yz dimetientem secundi, ita est yz ad yq dimetientem tertij, & ita erit yq ad dimetientem quarti, sed ita etiam est eadem yq ad basim rectanguli altitudinis Ef vel gm quod æquale sit rectangulo qyz : ergo cum cylindracei iam inuenti sectio parallela plano mg sit rectangulum æquale rectangulo qyz , patet basim illius esse quartum gradum.

PROPOSITIO XXXII.

Iisdem manentibus ut in decima quarta (*Fig. 47.*) circa rectam fc intelligatur circumuolui semicycloides magna $abcf$, & consideretur dimidium illius solidi quod ad partes b abscinditur plano mgc .

Ostendendum est libra Bb suspensa ex g perpendicularo plano mgc , brachio Bg æquante rectam gc , eiusmodi dimidio vel integro, vel cuilibet eius parti ad positionem plani mg designatæ æquiponderare cylindraceum altitudinis gm , baseos notæ, datâ circuli quadraturâ, nempe æquantis bessem quarti gradûs in superioris propositionis corollario ultimo collecti.

Quoniam ex corollario superiore habemus quartum gradum, dimidium illius est basis illius cylindracei altitudinis eiusdem gm , quod æquiponderat solido cuius sectio parallela plano mg est quadratum lateris yz , gb &c. per corollarium quartum octauæ superioris libri: sed cylindraceum altitudinis eiusdem cuius basis sit bes baseos illius est per sextam eiusdem libri æquiponderans quadranti solidi descripti circa rectam fc : ergo cylindraceum altitudinis eiusdem, baseos æquantis trientem quarti gradûs æquiponderat quadranti solidi illius peripherici: ergo dimidio proposito illius solidi peripherici æquiponderat cylindraceum altitudinis gm , baseos æquantis bessem quarti gradûs suprâ inuenti, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Æquiponderans igitur portioni ad partes C abscissæ per planum mg in quo iacet centrum g , est cylindraceum altitudinis mg , baseos æquantis semunciam quarti termini, dimidium tertij, tres octauas secundi deductis quatuor nouenis primi.

Æquiponderans verò toti est cylindraceum altitudinis mg , baseos æquantis quartum terminum perspectæ progressionis imminutum triginta quinque vnciis circuli genitoris, vel secundi termini. Istud patet ex corollariis duobus primo & secundo superioris propositionis.

PROP.

PROPOSITIO XXXIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 47.*) portio solidi peripherici circa rectam $f c$ descripti abscindatur per planum $m g c$ & per $n y z$ quoduis ipsi $m g b$ parallelum, nisi cum ipso congruat.

Ostendendum est centrum grauitatis eiusmodi portionis esse notum data quadratura circuli.

Portionis designatæ sectio cum plano $c f a$ sit figura $z c y$. Per superiorem inueniatur solidum C æquiponderans portioni designatæ, brachio $B g$ perpendicularo plano $n y c$; Ex corollario tertio decimæ nonæ præsentis libri inueniatur solidum D æquiponderans portioni designatæ librâ $c f$ suspensâ ex g perpendicularo plano $n y z$, brachio æquante rectam $g B$. Per decimam propositionem inueniatur solidum E æquale portioni suspensæ. Vt est E ad C ita fiat brachium $g B$ ad rectam $y r$ abscissam ex $y c$: vt est E ad D ita fiat idem $g B$ ad $y q$ abscissam ex $y z$, compleatur parallelogrammum $q y r p$. Dico punctum p esse centrum grauitatis portionis propositæ.

Istud demonstratur vt in vigesima secundâ & vigesima tertia superioris libri; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hoc ipso quod notum est punctum r , patet notum esse centrum grauitatis totius portionis abscissæ per planum $n y z$ vtrique productum, sicuti in vigesimæ secundæ & vigesimæ tertiæ pari casu monuimus.

PROPOSITIO XXXIV.

Iisdem manentibus (*Fig. 47.*) circa rectam $z y$ parallelam basi $f a$ vel ipsi congruentem descriptum sit solidum motu figuræ $c z y$; eius dimidium plano $n y z$ abscindatur ad partes c .

Ostendendum est centrum grauitatis eiusmodi solidi esse cognitum.

Per decimam quartam huius libri inueniatur solidum D æquiponderans solido descripto brachio æquante rectam $g c$, perpendicularo plano $n y z$. Ex decima nona inueniatur solidum C quod libræ brachio $g B$ perpendicularo $n y c$ æquiponderet solido descripto. Per decimam nonam primi inueniatur solidum E æquale suspensio. Vt est E ad C ita fiat recta $g B$ ad $y r$ abscissam ex rectâ $y c$; & vt idem E ad D , ita fiat eadem $g B$ ad $y q$ abscissam ex rectâ $y z$. Completo parallelogrammo $q y r p$, dico punctum p esse centrum grauitatis quæsitum.

Istud demonstratur vt superior propositio: ergo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Patet punctum o esse centrum grauitatis totius solidi peripherici, prout in pari casu propositionis superioris.

Q

Octo problematis ab Anonymo propositis solutionem esse hactenus à nobis datam demonstrare.

Primò (Fig. 47.) quæritur dimensio spatij zcy . Demonstratur in duodecima primi & in eius corollariis.

Secundò quæritur centrum grauitatis spatij zcy . Inuenitur in corollario tertio nonæ libri præsentis.

Tertiò quæritur solidum circa basim zy . Inuenitur in decima nona primi.

Quartò quæritur solidum circa axem cy . Inuenitur in decima præsentis libri.

Quintò quæritur solidi totius circa basim zy centrum grauitatis. Demonstratur in corollario superioris.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi totius circa axem cy geniti. Demonstratur in corollario trigessimæ tertiæ.

Septimò dimidij solidi circa basim zy diuisi à plano per rectam zy ducto & recto ad cyz planum, quæritur centrum grauitatis. Datur in superiore.

Octauò quæritur centrum grauitatis dimidij solidi circa cy geniti & diuisi plano ayc . Reperitur in trigesima tertia. Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXVI.

Proponitur calculus octo problematum pro duplici casu quem Anonymus in primis ad Europæ Geometras literis designauit.

Sit (Fig. 48.) acd cycloides magna respondens circulo genitori diametri cf , cuiusque pars superior sit bco , inferior $boda$, reliqua hic construantur & ponantur sicuti in vigesima quinta tertij pro simili causâ factum fuit.

Primò quæritur segmentum acd , itémque segmentum bco . *Istud constat ex duodecima propositione primi libri.*

Segmentum acd est triplum secundi termini progressionis perspectæ quam determinauimus initio vltimæ propositionis libri tertij. Segmentum bco est æquale duplo primi termini & simul dimidio secundi.

Secundò quæritur grauitatis centrum pro figura $czbg$, itémque pro figura $cba f$. *Istud perficitur per corollarium tertium nonæ propositionis.*

Vt primus terminus auctus quadrante secundi se habet ad decimam sextam partem tertij auctam bis quadrante secundi & imminutam quinque vncijs primi, ita fiat recta ge ad gq abscissam ex gb : vt autem idem primus terminus auctus quadrante secundi ad octauam partem secundi auctam triente primi, ita fiat recta gf ad gy abscissam ex gc . Comple-

to parallelogrammo $y g q p$ dico punctum p esse centrum grauitatis in figura $c z b g$.

Præterea vt sunt tres semisses secundi termini ad tres quadrantes tertij imminutos quatuor trientibus primi, ita fiat recta $f i$ ad $f r$: punctum verò r ita secet rectam $c f$ vt tota $c f$ ad $f r$ sit sicut duodenarius ad quinarium. Completo parallelogrammo $t f r s$, dico punctum s esse centrum grauitatis in figura $c b a f$.

In figuris autem $b c o$, $a c d$ centra grauitatis sunt y & t .

Tertiò quæritur solidum genitum circa basim $b o$ circumductu figuræ $b c o$, itémque aliud circa basim $a d$ circumacta figura $a c d$. *Istud obtinebitur per decimam nonam primi libri.*

Solidum genitum circa rectam $b o$ est æquale cylindræo altitudinis $f u$, baseos æquantis duplum secundi termini auctum sexdecim trientibus primi; vel reciproce altitudinis $f n$, baseos æquantis dimidium tertij termini auctum quatuor trientibus secundi. Solidum verò aliud est æquale cylindræo altitudinis $f u$, baseos æquantis viginti terminos secundos; vel vicissim altitudinis $f n$, baseos æquantis quinque terminos tertios.

Quartò quæritur solidum genitum circumductu figuræ $c z b g$ circa rectam $c g$ manentem, & aliud præterea quod generetur ex circumacta figura $c b a f$ circa rectam $c f$ manentem. *Istud habetur ex corollario decimæ.*

Basis cylindræi altitudinis $f u$ æquat in primo casu dimidium tertij termini auctum quadruplo secundi, & imminutum decem trientibus primi; vel reciproce altitudinis $f n$ cylindræum habet pro basi octauam partem quarti termini auctam tertio & minutam decem vncis secundi. In secundo casu basis cylindræi altitudinis $f u$ est sextuplum tertij termini imminutum triginta duobus trientibus primi; vel basis cylindræi altitudinis $f n$ est tres semisses quarti deductis octo trientibus secundi.

Quintò quæritur centrum grauitatis solidi circa $b g$ geniti motu figuræ $c z b g$, itémque alterius geniti motu figuræ $c b a f$ circa manentem $a f$. *Istud obtinetur ex corollario primo decimæ sextæ, & ex corollario secundo decimæ nonæ.*

Vt secundus terminus auctus octo trientibus primi ad quadrantem tertij auctum quatuor trientibus secundi & imminutum sexdecim nouenis primi, ita fiat recta $g e$ ad $g q$ abscissam ex $g b$. Dico punctum q esse centrum grauitatis pro primo casu. Vt autem eiusdem secundi termini decuplum ad quintuplum tertij imminutum centum viginti & octo nouenis primi, ita fiat recta $f i$ ad $f r$ abscissam ex recta $f a$. Dico punctum r esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi circa $c g$ geniti motu figu-

Q 2

ræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem c f. *Istud habetur ex corollario tertio decimæ nonæ.*

Vt dimidium tertij termini auctum quadruplo secundi & imminutum decem trientibus primi se habet ad quadrantem tertij auctum quatuor trientibus secundi & imminutum sexdecim nouenis primi, ita fiat recta f g ad g y abscissam ex g c. Dico y esse centrum quæsitum pro primo casu. Vt autem sextuplum tertij imminutum triginta duobus trientibus primi se habet ad quintuplum tertij imminutum centum viginti octo nouenis primi, ita fiat recta f x ad f t abscissam ex f g rectâ. Dico punctum t esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Septimò solidum genitum circa rectam b g circumacta figura c z b g intelligatur bifariam secari plano m g b, nec non solidum genitum circa rectam f a circumductu figuræ c b a f, plano n f a. Quæritur centrum grauitatis dimidij solidi in vtroque casu. *Istud patet ex corollariis tertio & quarto vigesimæ.*

Vt octaua pars tertij termini aucta triente secundi se habet ad octauam partem eiusdem secundi, auctam quatuor nouenis primi, ita fiat recta g f ad g y abscissam ex g c. Manente puncto q reperto in solutione quinti compleatur parallelogrammum y g q p; dico punctum p esse centrum grauitatis pro primo casu.

Vt autem quinque quadrantes tertij ad triginta quinque vncias secundi ita fiat recta f x ad f t abscissam ex f g. Manente puncto r reperto in solutione quinti compleatur parallelogrammum t f r s; dico punctum s esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Octauò solidum genitum circa rectam c g circumducta figura c z b g intelligatur bifariam secari plano m g c, item solidum genitum circumducta figura c b a f circa manentem c f, secetur bifariam plano n f c. Quæritur centrum grauitatis dimidij solidi in vtroque casu. *Istud habetur ex corollario trigesimæ secundæ.*

Vt decima sexta pars quarti termini aucta dimidio tertij & imminuta quinque vncijs secundi se habet ad semunciam quarti termini auctam dimidio tertij tribusque octauis secundi, & imminutam quatuor nouenis primi, ita fiat g e ad g q abscissam ex g b. Manente puncto y quod in solutione sexti repertum fuit compleatur parallelogrammum y g q p; dico p esse centrum grauitatis quæsitum in primo casu.

Vt autem dodrans quarti termini imminutus quatuor trientibus secundi se habet ad quartum eundem terminum diminutum triginta quinque vncijs secundi, ita fiat f i recta ad f r abscissam ex f a. Manente puncto t quod in solutione sexti suprâ reperimus, compleatur parallelogrammum t f r s; dico punctum s esse centrum grauitatis pro secundo casu. Ergo &c. quod erat propositum.

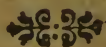
LIBER QVARTVS. COROLLARIVM.

125

In calculo septimi & octavi problematis tam pro parua quàm pro magna cycloide, liquet basim cylindracei æquantis suspensum solidum eam esse assumptam quæ respondet altitudini fn , eò quòd cylindracea æquiperponderantia prodierint eiusdem altitudinis. Patet etiam calculum horum duorum postremorum complecti reliquorum calculos, ac proinde nihil remouisse laboris qui calculatoris tædio in speciem parsurus hos duos tantum exegerit. Patet denique fructum totius operis suauissimum esse istum calculum, quem ita rotundè per progressionis perspectæ terminos, nostræ ex libra petitiæ demonstrationes exhibent, vt haud sciam an rotundiùs id alia via præstetur. Cæterum sub finem tot calculorum admonendus es, Erudite Lector, quod in præfatione quarti tetragonismicorum, & in scholio primo tertię propositionis libri quinti iam pridem scripsimus, lapsum in epilogismis tractandis esse perfacilem & vehementer timendum calculatori etiam exercitatissimò. Hoc verò diligenter attendendum tibi esse si quis fortasse error in nostris numeris detegeretur, vtrum vitium in eorum tractatione subsistat, an etiam ad ipsam grammicam demonstrationem perueniat; si enim ista rectè procedat, stant cætera, inde quippe emendari poterunt numeri, quorum vitium tantum excusationis habere censuerunt Legum Conditores, vt nunquam in rem iudicatam transire voluerint, si quid perperam computatum probari possit.

SCHOLIUM I.

Præsentem omnium casuum calculum edidimus nona die Ianuarij anni labentis 1659. statim atque prodiit Dettonuillanus sed qui vni tantum eorum responderet his verbis ex sermone Gallico in Latinum Versis. Mihi igitur satis non erit dare tibi problematum calculos, quorum vnus est iste attinens ad casum à me propositum [Centrum grauitatis semisolidi geniti circumductu semicycloideos circa basim, ab ipsa basi distat interuallo rectæ quæ ad diametrum circuli genitoris se habet vt septuplum diametri ad sextuplum circumferentiæ. Ab axe verò distat interuallo rectæ æquantis quadrantem circumferentiæ eiusdem, deductis sexdecim quintis partibus rectæ quæ inter centrum circuli genitoris, & grauitatis centrum semicirculi eiusdem interiacet.] Sed insuper tibi detegam meam pro centris grauitatis methodum generalem, quæ quòd vniuersalior est, tantò tibi gratior accidet. sub finem nostri calculi tunc editi adiecimus quæ sequuntur.



Q 3

Calculus centri grauitatis semifolidi circa dimidium baseos geniti
reducitur ad terminos Dettonuillanos, quos Veredarius
Publicus hac ipsa hebdomada v. Eid. Ian. ineuntis
anni 1659. primum detulit in hanc urbem.

DISTANTIA CENTRI A BASI.

EX definitione tradita initio libri tertij primus terminus *perspectæ* progressionis ad secundum est sicut diameter circuli ad ipsius peripheriam. Per secundam partem calculi respondentis septimo problemati proposito, semidiameter circuli genitoris ad distantiam quæ est inter basim & centrum illud grauitatis est vt quinque quadrantes tertij termini ad triginta quinque vncias secundi; vel vt quinque quadrantes secundi ad triginta quinque vncias primi: ergo tota diameter circuli genitoris ad illud interuallum est vt quinque semisses secundi termini ad triginta quinque vncias primi; vel vt triginta vnciæ secundi ad triginta quinque vncias primi: vel vt secundus terminus progressionis tricies sumptus ad primum sumptum tricies & quinquies. Cum igitur si secundus terminus ponatur peripheria circuli, primus sit eiusdem circuli diameter: distantia centri grauitatis à basi erit ad diametrum circuli genitoris vt diameter circuli tricies & quinquies sumpta ad peripheriam circuli eiusdem tricies sumptam, vel in minimis numeris, vt septuplum diametri circuli ad sextuplum peripheriæ circuli eiusdem: quod ad amussim quadrat calculo Dettonuillano.

DISTANTIA CENTRI EIVSDEM AB AXE.

Per secundam partem calculi respondentis quinto problemati proposito, vt est secundi termini decuplum ad tertij quintuplum imminutum centum viginti octo nouenis primi, ita est semidiameter circuli genitoris ad distantiam centri illius ab axe. Si tertius terminus ponatur semiperipheria circuli genitoris, secundus erit semidiameter, primus verò designetur elemento A: interuallum autem inter centrum circuli genitoris, & grauitatis centrum semicirculi eiusdem notetur elemēto B. Cum ex 18. tertij tetragonismicorum vt circulus ad 4. trientes quadrati quod potest eius semidiameter, ita sit ipsa semidiameter ad B: circulus autem ad quadratum semidiametri suæ sit vt semiperipheria circuli ad eiusdem semidiametrum: erit igitur vt semiperipheria genitoris circuli ad quatuor trientes semidiametri, ita semidiameter ipsa ad quatuor trientes termini A; sed ita etiam est ad B: ergo B est quatuor trientes termini primi A: ergo centum viginti octo nouenæ primi termini A sunt trecentæ octoginta quatuor trigessimæ sextæ, vel triginta duo trientes interualli B. Vt igitur decem semidiametri circuli genitoris ad quinque semiperipherias,

vel ad decem quadrantes peripheriæ imminutos centum viginti octo nouenis primi termini A, vel triginta duobus trientibus interualli B, ita una femidiameter circuli genitoris ad vnum peripheriæ circularis quadrantem imminutum triginta duabus trigefimis, vel sexdecim decimis quintis interualli B, qui est ipfissimus calculus Dettonuillanus.

Ista porrò tam mirabilis consonantia fecit vt minùs iam metuentes vitium calculi, illum à sua demonstratione diuulsum tandem demus in lucem, contra quàm apud nos constitutum habuimus. Quoties enim calculus adhæret suæ demonstrationis methodo, lubrica illius ratio, si fortè ab ipsa aberrare deprehenditur, non magis imputatur Autori demonstrationis, quàm ipsa Typographi errata.

AD LECTOREM.

CVM exemplar librorum de Cycloide quatuor iam ab initio Octobris miserim ad R. P. Moret in Collegio Societatis nostræ Claramontano degentem, poteris, Lector benigne, apud illum inspicere vtrum ego vlli fucum faciam aut fecerim hætenus, dum palam profiteor solutionem integram problematum sub initium Iulij ad Europæ Geometras missorum esse à me inuentam, veràmque credi saluo tamen examine maturiore aliorum, vel etiam meo. Ausim verò iterum affirmare, quod in præfatione eorum librorum iam semel dixi, me demonstrationum veritatis longè securiorem esse quàm calculi, cuius lapsus venia dignus existimatur, quando per incogitantiam accidit, vt in præfatione quarti libri Tetragonismicorum iam olim monui. Cæterum ex istis omnibus liquet euanescere omnia quæ contra me à nonnullis paulò feruidius iactantur in circulis doctiorum Geometrarum, & per Galliam editis vernaculè libellis sparguntur. Quod dicunt me in priuatis literis mihi gloriabundè arrogasse circuli quadraturam ex nullo dato pendentem, falluntur ipsi & alios incauti fallunt: relegant literas; inuenient enim stylo admodum titubante id à me scriptum esse; sicuti & nunc quoque scribitur, quamuis non aliam eius timoris causam norim præter generalissimam omnium superiorum sæculorum hallucinationem, quæ apud me maximi ponderis est. Vale, mi Lector, & si demonstrationes ex Archimedeâ libra petita, pertinentes non ad istos solum casus sexdecim, sed ad quoscunque alios, te quicquam iuuant, benè spera de nostrorum horum librorum editione, simulque de altero Opusculo circa motum acceleratum scripto, vbi exoluo, quæ nuper pollicitus fui. Tolosæ 9. Ianu. 1659.

SCHO L I V M I I.

Monendus es nunc, Lector benigne, Veredarium tunc post ossidui iter non detulisse nisi quatuor primas pagellas libri Dettonuillani qui Parisiis cud-batur: ad nos enim transmissæ statim sunt atque è prælo prodierunt, vt in nobis expectatio reliquarum mox cudendarum concitaretur. Ipse Dettonuillanus initio Appendicis adiecta die Ianuarij Vigesima ad continuationem Historiæ suæ istud confirmat, dum narrat, Calendia

Ianuariis se ad nos misisse initiū suæ solutionis, ut ibi inspiceremus calculum casus à se propositi, & inde agnosceremus nostrum circa eundem casum calculi errorem. *Accepimus quidem perlubenter illud initium octo post diebus, nempe nono eiusdem mensis, eodēque die calculum in eo expressum contulimus cum nostro illo quem iam ante quintum Nouembris diem anni superioris 1658. per nos ipsi castigaueramus, reperimusque non sine gaudio mirificam Viriusque concordiam, sicuti illam confestim euulgauimus, euulgatamque agnoscit Dettonuillaus in sua illa Appendice. Quis Verò non miretur quod subicit, quauis sexdecim casuū calculus ille à nobis tunc editus, verus deprehenderetur, illius tamen inuentionem referendam fore ad lucem quam [eodem videlicet temporis momento] deriuassemus ex transmissis quatuor illis pagellis, quarum duas priores implet epistola D. de Carcaui quæ tota est in extollendo etiam supra antiquos Geometras primarios Dettonuillæ; tertiam occupat exordium responsionis Dettonuillanæ, & nudus, ut illum proposui in superiore scholio, propositi casus calculus; quarta denique rem à principiis libra aliè repetens suspensum tenet Lectorem, iubetque reliqua quæ ad sequentes paginas pertinent expectari. Edidimus nos statim quindecim insuper aliorum casuum calculum, quorum duo qui centra grauitatis semisolidi circa axem dant, sunt omnium difficilimi; ille Verò qui tradit centrum grauitatis semisolidi circa parallelam basi ductam per medium axem, non minus difficilis est atque primus ille & vnicus ad hunc vsque diem à Dettonuillæ datus, quamuis ad reliquos dando fidem suam ibidem obligarit. Ista tamen omnia nos vno oculi ictu vidimus scilicet in primo illo Dettonuillæ calculo, non secus (si Geometriæ peritis placet) atque inspectis olim primis quatuor Conicorum Appollonij libris, residuos quatuor qui iniuriâ temporis desunt, omnes perspeximus. Quod igitur venienti vnico calculo Parisino ætutum obuiam inierit calculorum Tolosanorum vniuersa turma, id (quamuis aliud probationis genus non suppetere) manifestè ostendit iam antè stetisse illos in procinctu, & expeditos fuisse ut turmatim prodirent, cum primùm iuberentur. sed numquid pari saltem iure potuisset aliquis ex eius amicis monere tunc Anonymum ne de danda solutione reliquorum casuum sollicitus post hac foret, cum nostra omnium solutio iam postaret vulgata, & ab ea manasse dici posset, si quid postea eodem de argumento ederetur? Haud Verò scio an ista de causa reliquorum casuum parem illi primo calculum, quem luculenter pollicitus fuerat, dare ex tunc noluerit. Hæc quamuis adeo perspicue probent nostræ causæ æquitatem, voluerunt tamen nostri Amici, ne quid dubij etiam peruicacissimo cuique superesset, ut vniuersum istud de Cycloide opus legitima Iudicis auctoritate, chirographicaque eiusdem tessera tunc obsignari de more curaremus, quod & obtinuerunt decima quinta die Ianuarij præsentis anni 1659. Vnde monendus fuit Typographus ut tot circumductas manuscripto nostro lineas, & D. DE VIGVERIE, Secundarij Prætoris in Senescalliana huius Urbis Curia toties repetitum chirographarium symbolum mirari desineret, nec illa typis representare curaret. Monendus quoque fuit cum ad calculum istum venit (venit autem decima quinta Septembris anni 1659. qua hos versus manuscripto inseruimus) ne in typos referret suos periodum vnam manu amplissimi & doctissimi suprema huius Curia Tolosana Senatoris adiectam quinto Nouembris 1658. & eiusdem chirographo obsignatam, qua testatur se hunc calculum à me sibi oblatum,*

oblatum, munisse sui chirographi notâ tesseriâ. Tanta scilicet molis fuit literary fur-
ti accusationem propellere: Amicis tamen obtemperandum tunc fuit.

S C H O L I V M I I I.

omitti hoc loco non debent duæ Anonymi epistolæ ad Geometras Europæ Latinè scri-
ptæ; ex illis enim nonnulla clarè intelligentur, quæ historiæ istius interest ut non igno-
rentur; eâ verò quæ sint, monebimus post exscriptas literas.

P R I M Æ L I T E R Æ A N O N Y M I.

Cum ab aliquot mensibus quædam circa Cycloidē eiusque centra gra-
uitatis meditaremur, in propositiones satis arduas ac difficiles, ut no-
bis visum est, incidimus, quarum solutionem à præstantissimis toto orbe
Geometris supplices postulamus, proposito ipsis præmio, non mercedis
gratiâ, quod absit, sed in obsequij nostri, aut potius meriti eorum qui
hæc inuenerint, publicum argumentum.

Dato puncto quolibet z (Fig. 1.) in quacunque Cycloide $abcd$, ex
quo ducta sit zy basi ad parallela, quæ axem cf secet in puncto y . Quæ-
rimus dimensionem spatij czy , eiusdemque centrum grauitatis: Solida
genita ex circumuolutione dicti spatij czy , tam circa zy , quam circa c
 y : & horum solidorum centra grauitatis. Quod si eadem solida plano
per axem ducto secentur, & sic fiant utrinque duo solida, duo scilicet ex
solido circa basim zy , & duo ex solido circa axem c y genito: cuiusque
horum solidorum quærimus etiam centra grauitatis.

Quia verò quæstorum demonstratio forsan adeo proluxa euadet, ut vix
intra præstitutum tempus exequi satis commodè possit, genio & otio do-
ctissimorum Geometrarum consulentes, ab his tantum postulamus, ut
demonstrent vel more Antiquorum, vel certè per doctrinam Indivisibi-
lium (hanc enim demonstrandi viam amplectimur) omnia quæ quæsitæ
sunt, data esse. Ita ut facilè ex demonstratis, quælibet puncta quæsitæ ex
datis hypothesibus, inueniri possint.

Et ut apertiùs mentem meam explicem, nec subsit aliquid ambiguum,
exemplo rem illustro. Proponatur (Fig. 39.) verbi gratiâ parabola gf
 B cuius axis gf , basis gB , tangens fE ; parallela axi, BE , inuenien-
dum centrum grauitatis trilinei $EBuf$. Satisfactum esse problemati cen-
serem, si demonstretur, datum esse centrum grauitatis parabolæ gfB ,
nec non & centrum grauitatis rectanguli $BEfg$, & proportionem huius
rectanguli cum parabolâ $Bufg$, ideoque & datum esse centrum graui-
tatis quæsitum trilinei $BEfu$. Nam etsi præcisè punctum in quo reperi-
tur centrum grauitatis non exhibeatur, demonstratum tamen est datum
esse, cum ea ex quibus inuenitur data sint; résque eò deducta erit, ut ni-
hil aliud supersit præter calculum, in quo nec vis ingenij, nec peritia ar-
tificis requiruntur; ideoque non is à nobis calculus exigitur, cur enim
in iis immoraremur? Sed tantummodo petimus demonstrari, res quæ
proponuntur datas esse.

R

Verum doctissimi Geometrae prorsus necessarium iudicabunt, & ab his postulamus duarum propositionum vel duorum casuum integram constructionem, seu integrum calculum. Primus casus est cum punctum z constituitur in a ; secundus cum idem punctum z datur in b , in quod transit parallela $g b$ ducta à puncto g centro circuli genitoris Cycloidis.

Quod si aliquis error calculi in his duobus casibus subrepperit, eum libenter condonamus, & veniam quam ipsi peteremus facile promerebuntur.

Quisquis superius proposita, intra primam diem mensis Octobris anni 1658. soluerit & demonstraerit magnus erit nobis Apollo. Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum hispanicorum, quos ipsi Hispani *doblones* & Galli *pistolles* vocant: vel certe si mauult ipsos duplos aureos. Secundus verò viginti eiusmodi duplos aureos. Si vnus tantum soluerit, sexaginta solus habebit. Et quia seridè rem agimus dictos sexaginta duplos aureos Illustrissimo D. de Carcaui Regio Consiliario Parisiis commoranti apud celsissimum dominum Ducem de Liencourt deponi curauimus, qui eos exsoluet statim ac demonstrationes quæ ad ipsum mittentur, veræ ac Geometricæ, à viris ab ipso ad id deputatis iudicabuntur. Et cum Illustrissimum Consiliarum, iam à multis annis virum probum & Matheseos amantissimum agnouerimus, audacter pollicemur, rem sincerè & absque fallaciâ exequendam.

Quod si his circiter tribus elapsis mensibus nullus inueniatur qui quaesita nostra soluerit, non denegabimus quæ ipsi inuenimus; nec aliis inuidebimus vnde maiora iam inuentis nanciscantur; ex quibus forsan apud Posteris gratiam inibimus. *sequitur descriptio Torricelliana cycloidis, ut à nobis descripta fuit initio primi libri, saltem quantum ad rem attinet.*

ALTERÆ EIVSDEM ANONYMI LITERÆ.

Cum circa ea quæ de Cycloide proposuimus duo orta esse dubia nobis Illustrissimus D. D. de Carcaui significauerit, his statim occurrendum esse duximus, & ita occurrimus.

Prius inde oritur, quod in proponendis nostris de Cycloide problematis hac voce vsi fuerimus, in *quacunque Cycloide*, cum tamen vnus tantum speciei Cycloidis definitionem attulerimus. Verum nihil aliud intelleximus præter solam illam simplicem naturalem ac primariam Cycloidem, cuius ex Torricellio descriptionem dedimus; cum enim quæ de illa resoluuntur facile sit ad omnes alias species protrahere, qui nostra problemata de hac sola soluerit, nobis omninò satisfecerit.

Posterius in eo consistit quod à nobis non sit præcisè positum an supponamus datam esse rationem basis Cycloidis $a f$, cum sua altitudine, seu cum diametro circuli genitoris $f c$. Sed ipsam datam esse rationem pro concessio vsurpandum arbitrabamur, & ut omnino æquum est, datam esse supponimus.

Nihil ergo iam superest obscuritatis. Vnum tamen restare videtur vt doctissimos Geometras ad propositiones nostras commodius & libentius inuestigandas inuitemus : scilicet ea omnia remouere quæ à perspicacitate ingenij, quam solam magni facimus, & explorare ac coronare instituiamus, sunt aliena, qualia sunt tam calculus integer multorum casuum quem postulabamus, quàm absoluta solutionum conscriptio, cum ea non à viribus ingenij, sed ab aliis circumstantiis pendeant. Hoc itaque tantummodo iam instituiamus, vt sola problematum difficultas remaneat superanda. Nempe.

Qui publico instrumento intra præstitutum tempus, Illustrissimo domino de Carcauy significauerit, eorum quæ quæsitæ sunt demonstrationem penes se habere : & aut ipsammet demonstrationem quantumuis compendiosam ad ipsum miserit ; aut si chartæ mandare nondum per otium licuerit, saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem, casus quem mox designabimus calculum dederit, seque paratum esse professus fuerit omnia omnino demonstrare ad ipsius D. de Carcaui nutum, hunc nobis satisfecisse declaramus, & consentimus, primum qui hæc fecerit primo, secundo secundo præmio donandum, si sua solutio ab ipso D. de Carcaui virisque ad id secum adhibitis, cum ipsi visum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera iudicetur, saluo semper erroris calculo.

Casus autem cuius solius sufficit calculus ille est. Si semicyclois $a c$ circa basim $a f$ conuertatur, & solidum inde genitum secetur plano per ipsam $a f$ (quæ iam huius solidi axis est) ducto, quod quidem solidum diuidet in duo semisolidi paria. Alterutrius horum semisolidorum centrum grauitatis assignari postulamus. *Hætenus Anonymi litera.*

Dies quo binæ istæ literæ datæ fuerint nullus annotatus extat ; in confesso tamen est primas missas fuisse sub initium Iunij ; quod patet ex trium circiter mensium spatio ad inueniendam, & in manus Domini de Carcaui ante Kalendas Octobris tradendam solutionem, concessio sub finem illarum. Alteræ autem literæ redditæ nobis fuerunt exeunte Iulio, & iam priusquam redderentur mandaueramus Typographo primum horum librorum, illæque suam in eo operam absoluerat ; quapropter mirum esse non debet quod cum Anonymus centra grauitatis absolute polliceri videretur in primis literis, nos librum illum ediderimus, vt ad id quod penes se habere non obscure innuebat, adiungeremus vnde quadraturam circuli absolueret.

Præterea ex primis illis literis aperte constat singula problemata fuisse tractanda in duobus illis casibus, quorum calculum incunte hoc anno 1659. edidimus ; quod aduertimus, ne quis putet hos casus à nobis esse assumptos prout animus, & computandi scilicet exitus tulit. In iisdem literis Doctissimos Geometras iudicaturos asserit necessariū fuisse vt exigeretur multiplex ille calculus, quem tamen in secundis exigere destitit vt labori inquirentis Geometræ parceret, præcipue cum ad inquirendum

pauculæ hebdomadæ concederentur. Cur autem ita iudicatuſ fore Geometras dixerit, cū cauſam reticuerit, illam putauit eſſe obuiam iis præſertim qui in Geometricis diu multūque verſati ſunt. Prima huius neceſſitatis cauſa hæc mihi quidem videtur eſſe quod per illum calculum eduntur ſexdecim propoſitiones in re admodum ardua, quibus rotundè & more Archimedeo reſpondetur, vt ipſarum propoſitionum contemplatio mirum quantum rapiat Lectorem eruditum, illique ſtimulos addat ad luſtrandum viam, qua eò peruentum fuit. Secunda, quia vnus Autoris calculus ita rotundus facilè poteſt comparari cum alterius calculo, & ita ſtatim iudicari de eorum concordia vel diſcordia. Certè nos ſi Dettonuillæus dediſſet calculos illos ſaltem de centris ſemiſolidi ſuperioris circa baſim, & duorum ſemiſolidorum circa axem, perlubenter contuliſſemus calculos vtriuſque abaci, & vel de concordia gauiſi fuiſſemus, vel emendaſſemus in alterutro diſcordiæ cauſam. Tertia, quia calculi illius methodus plurimum lucis affert ad intelligendas ipſas demonſtrationes, quibus nititur; illæ verò etiam Archimedeæ, ita aliquando non imperitis imperiæ ſunt, vt lux iſta quæ ex praxi ſoluti problematis oritur, maximè ſit omnibus expetenda. Quarta, quia optandum eſt vt omnes qui inuentioni Geometricæ vacant, exerceant ſe in iſto calculandi genere; ita enim sæpe deprehendunt ipſi ſua *παρασάμματα*, quibus ij tantū obnoxij non ſunt, qui nihil ardui quærunť. Ipſe Archimedes initio librorum de ſpiralibus moram dilata editionis purgat illo errandi timore, cui occurrendum fuerit ſuo & amicorum examiné diuturno. *Ne mireris* (alloquitur ſuum Doſitheum) *ſi longi temporis interuallo hæc demonſtrationes edimus, hoc enim ea de cauſa factum eſt, quod prius cum iis communicare ſtatueraſus, qui in artium ſtudiis & diſciplinis verſati ſunt: & in hiſ inueſtigandi omnem ſuam operam poſuerunt.* Cæterū calculus ille ad agnoſcendum errorem latitantem miris modis conferre norunt omnes quibus ille familiaris eſt; diu enim verſatur præoculis ſoluti problematis forma, vt ita numeris accommodetur; quæ autem tamdiu circumſpicitur, vix eum teget, ſi quem habuerit nœuum. Adde sæpius numerorum ipſorum repugnantia ſtatim indicari latère ibi hoſtē mentis, nempe errorem. Quinta deniq; quia dum ita propius inſpicitur methodus illa qua ſoluitur aliquod problema, vel ipſa perpolitur, vel ſit generalior, vel viam etiam pandit ad alia inuenienda aliquando longiùs poſita, ſed quodammodo cognata. Porro calculi nomine quid intelligam, meliùs explicare non poſſum quàm exhibendo duas propoſitiones poſtremas duorum proximè antecedentium librorum, vbi problematum calculum tracto. Adhibentur quidem numeri, ſed ita vt res ipſa verè attingatur; nam aliquando numeri aduocantur, vt in diſenſione circuli Archimedeæ, non vt res quæſita teneatur, ſed vt quàm proximè: at verò noſter iſte calculus iſ eſt, qui non accedit tantū ad id quod inquit, ſed expolitam commodamque tenendi & propiùs inſpiciendi anſam offert.

Ad hæc, quod Anonymus veniam ipse vtrò offert errori calculi, quando is non proficiscitur ex labe demonstrationis, non modò perurbanum se probat, sed perdoctum in hac arte; neque enim vllus est, præter *ἀγνοήτης*, qui non flocci faciat similia peccata. Nos itaque, si quid huius generis latet in tam multiplici & intricato numerorum labyrintho, ignosci nobis enixè petimus: neque venditamus ista vt ab omni eiusmodi vitio pura, sed vt accuratè olim examinata, & etiam non semel castigata antè diem quintum Nouembris anni superioris 1658. Ab eo verò tempore aliis intenti curis toties computatos casus reliquimus vt iacent editi; nec enim quicquam immutauimus præter apertum in problematis sexti secundo calculo, Typographi erratum, de quo pòst agimus in propositione duodecima sexti libri.

Denique idem Anonymus sapienter admodum cauet pauculos illos nummulos non offerri à se instar escæ pecuniariæ, qua Geometræ trahantur ad laborem mercenariorum instar. Ego quidem statim atque legi huius pecuniolæ spem fieri inuentori, scripsi ad D. de Carcaui qui pro Anonymo totum istud negotium gerebat, à meæ vitæ instituto alienissimum esse auri vel argenti comparandi causâ aliquid aggredi; vacaturum itaque me perquisitioni problematum, hac tamen præmij pecuniarij conditione procul reiectâ. Quapropter si ante initium octobris scripsi ad eundem D. de Carcaui à me repertam esse solutionem omnium problematum, sed nondum omninò in schedas traductam, misique calculum casûs propositi sed (vt sæpius fit in iis quæ, antequam exscribantur, in sola mente contemplamur, si multiplicia, longa, & implexa inter se sint) vitiosum, vt statim agnoui, monuique per literas Dominum de Carcaui; id eò tantum feci, vt constaret Anonymo quantum detulissem ipsius exhortatoriis literis, & nonnullam ei injicerem spem inuentæ solutionis problematum, quam efflictm expetere se à Geometris significauerat in suis primis literis. Quod autem quidam dixere Anonymum proposuisse quædam istorum problematum vt facilia, quædam verò vt difficilia, refellitur primo istarum literarum aspectu, vbi sine vllo discrimine *solutionem propositarum questionum à præstantissimis toto Orbe Geometris supplex postulat*, easque *satis arduas ac difficiles sibi visus esse* pronuntiat. Profectò iniurius fuisset *præstantissimis* illis viris, si illos habuisset vt huius artis Nouitios, quibus facilia proponi solent; eorûmque otio non nisi abuti velle visus fuisset.

S C H O L I V M I V.

Anonymus in Historiâ Cycloideos Gallicâ decimo die mensis octobris 1658. ita scribit. Calculi nostri viris clarissimis & doctissimis priuatim communicati editionem nondum mandare Typographo è re fore existimaui, vt si quis, dum à Domino de Carcaui, & aliis iudicibus examen legitimè instituetur, reperiatur soluisse illa problemata, publicè enuntiem eum inuenisse solutionem illorum, antequam meam euulgarem: sin autem nullus reperiatur; quod nemo inuenierit, id emittere in lucem publicam non verebor,

adjiciamquē prioribus insuper problemata sequentia, quæ de naturâ cycloideos restabant, & quorum aliqua non minùs mihi difficilia videntur. 1. Puncto z (Fig. 1.) dato utcumque in perimetro Cycloideos, inuenire non solùm dimensionem curvæ $z c$, terminatæ puncto z & vertice c (quod à Domino Vvren iam dissolutum extat) sed præterea centrum gravitatis portionis istius ex perimetro abscissæ. 2. Inuenire dimensionē superficiē descriptæ à portione illa rotata tam circa basim, (quod quidem facile est) quàm circa axem: siue illa delatio sit integræ reuolutionis, aut dimidia-tæ, aut quadrantalīs, aut alterius cuiuslibet designationis. 3. Inuenire gravitatis centrū istius superficiē &c. quod est omnium difficillimum, & propriè vnicum quod propono. In quibus omnibus problematis pono quadraturam circuli vt datam, sicubi eam dari fuerit necessarium. En quæ supererant inquirenda de natura huius perimetri curvæ, & quorum solutionem secretò apud me reservaturus sum vsque ad diem postremum mensis Decembris labentis anni 1658. Vt si quis interea temporis repererit veram eorum solutionem, non careat honore suæ inuentioni debito. *Hac Anonymus Gallicâ linguâ in cartaceo quaternione ex Typographico prælo ad nos tunc statim misso. Quod de dilata primorum problematum editionis causa hic narrat, facessuit nobis aliquando negotium, cum per ipsos Anonymi familiarissimos sciremus indices examinis illius causâ cogendos non fore; sed hic assensum cohibemus omnem, ne vel ipsi Anonymo fidem denegemus, vel ipsius familiarium testatissimis literis. Ista Verò posteriora problemata erunt potissimum libri consequentis argumentum, vbi ostendemus ex nostra methodo obtineri solutionem posteriorum istorum problematum, etiam illius in quo ille ponit difficultatis maximum; calculumque, quem ille etsi (vt mihi quidem videtur) perdifficilem, omisit dare, exhibebimus eodem prorsus pacto, quo in propositione tertij & quartij libri vltima. Ex eo autem quod calculum illum prætermisit, factum est vt ego de tota ipsius methodo indicare pro ingenioli mei viribus nequiverim, quod nisi fallor, potuissem comparando vtrumque inter se. Neque existimes, Erudite Lector, istum calculum esse de numero vulgariū & à viribus ingenij, vix dixit Anonymus, non pendentium, qui Tyroni cuilibet demandari quæunt; intricatissimus quippe est, & totum Geometram, atque sæpe ipsius demonstrationis Parentem desiderat.*



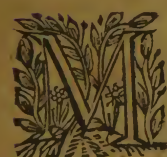


DE CYCLOIDE

LIBER QVINTVS.

In quo præcipuè demonstratur methodus generalis pro cuiuslibet lineæ curuæ in rectam æqualem commutatione per spiraceas Archimedeis spiralibus respondentes, & pro eiusdem curuæ centro gravitatis: Item pro dimensione superficiei periphericæ descriptæ motu eiusdem curuæ, & pro gravitatis centro illiusmet superficiei: Descendendo verò ad Cycloideos perimetrum curuam, solvuntur problemata secundò proposita, eorûmq; calculus traditur.

PRÆFATIO.



Ethodum generalem dum in fronte libri huius præfixam legis, noli existimare, Lector erudite, in prioribus libris illam deesse; perinde enim quadantenus adest, ut Tu ipse ad rem attendens iam, ut puto, perspexisti. Sæpe generalis aliquid præstandi methodus frustra exigitur, si in vno casu particulari eius executio præstetur. Quis enim generalem conficiendæ ex quercu arcæ methodum postulet à Fabro lignario, posteaquam ab illo didicit qua arte ex abiete compingi debeat? *universale enim à singularibus præcindere* innatum esse menti humanæ Logico-
rum Scholæ inculcant. Porro methodus aliquid exequendi, quadrandæ exempli causâ figuræ cuiuslibet, potest duobus modis dici generalis; primò quidem ut nullo alio dato, per solius methodi præ-

cepta, quadratura absolutè prodeat: alter verò modus subaudit has voculas, *nonnullis datis*, quæ quidem in singulis figuris aliunde quam ex ipsa methodo obtineri debent. Illo primo modo generalem methodum tradere quadrandæ cuiuslibet figuræ diuinum esse agnosco potius quàm humanum; posteriore autem modo id non superat vires ingenij humani. Hæ itaque de Cycloide methodi generales non absoluunt, nec ad exitum vltimum generaliter perducunt problema; etenim si à me quæras vt per methodum generalem meam problemata omnia soluta in parua Cycloide, solvam pariter in figura cuius ordinatim ad axem applicatæ sint æquales arcui genitricis ellipseos, respondebo non ita esse illam generalem quin aliqua de hac figurâ quæ ex ellipsi prodit, dari prius debeant; quæ prorsus me latent, nec ab vllò, quem legerim, scriptore mihi monstrantur: imprimis verò modus quadrandi ipsam figuram superiorem, prout vt in secundi libri nona pro cycloide fecimus, & iam antea in primo libro feceramus. Adeo quadratura huius partis quæ primo problematum aspectu occurrit, est difficilis, quantumuis nonnemo eam facilem videri in cycloide voluerit, postea quam à nobis prodiit in lucem: sed quid non est facile aditu cum semel ad eam via patet explanata? Hæc præfari debui ne specioso nomine *methodi generalis* vllus decipiatur, aut vanæ aliquid laudis me venari putet. Methodi igitur omnes nostræ non sunt primo modo generales; sed neque semper monendus est Lector eas esse secundo illo modo generales. Porro quæ sunt generales isto quodam modo, absolutè generaliores sæpe euadunt inuentione cuiusdā quod in illo priore modo non aderat. Duplex huius rei exemplum quasi domesticum mihi nunc occurrit. Demonstravit Archimedes trianguli rectilinei quadratricem esse æqualem spatio illi quod triangulo eidem æquiponderat, indèque elicuit eximia & incomparabili laude quadraturam parabolæ antea irreperitam: nos verò illud ad omnes quadratrices quarumcunque figurarum extendimus in septima propositione secundi libri tetragonismicorum, ratione cuius non inutilis vt speramus, accessio fiet isti methodo quadrandi figuras per libram, quam in eum finem adhibere post Archimedem desierant Geometræ quos quidem nouimus, sed nos illum vsum restaurare & ampliorem facere conati sumus. Alterum exemplum esto methodus qua se ipsum superans Archimedes demonstrauit per spirales lineas, peripheriam circuli esse æqualem certæ cuidam rectæ; nos autem hoc in libro generalissimam reddimus eam methodum,

pro

pro quibuscunque lineis curuis. Vtrobique vt extensio illa fieret, inuenienda fuerunt nonnulla; nam si nulla opus fuisset noua demonstratione, id non fuisset propositionem extendere propriè; sed monstrare quousque ipsa per se pertingeret; inuenienda autem fuerunt, vt quæ necessaria erant ad concludendum generaliter & non tantum particulatim, constituerentur in aliquo, quod esset omnibus commune, & minimè proprium triangulo vel circuli peripheriæ.

Cæterum de spiracea ista agens mihi præscriptis iam à meipso cancellis me cohibebo; spiralis & parabolæ miram concordiam quam primus excogitauit & acutè demonstrauit P. Gregorius à sancto Vincentio sub finem libri sexti, huc transferre non est animus, cum apud illum luculenter demonstrata extet hoc titulo *spiralis & parabolæ symbolizatio*. Nihil etiam dicam de methodo quam subtiliter inuit D. Ismaël Bullialdus in aureo de lineis spiralibus libello, vbi Archimedis demonstrationes aliis nouis stabilit, vt nonnullorum scrupulos euellat, qui autoritate Vietæ ducti non ita fidebant hac in re Archimedis rationibus. Scribam igitur quæ ad rem præsentem illis adjici posse iudicauit, & hæc quidem non intucunda fore spero Lectori, præcipuè cum vt rectè annotauit idem Bullialdus *linearum spiralium contemplatio tam sublimis ac ardua antiquis Geometris visa sit, vt Archimedes, qui earum affectiones & proprietates ingenio propè diuino, ac subtilitate incomparabili primus demonstrauit, in sui admirationem cum æquales, tum posteros conuerterit; laudum titulos nullo obliuionis situ inducendos meruerit; earumque inuentori Cononi gloriam palmamque præripuerit*. Accusatio illa Archimedis expurgata nunc à Viro illo doctissimo reuocat mihi in mentem aliam accusationem factam à Scaligero aduersus eiusdem Archimedis æquationem circuli cum rectangulo comprehenso sub semidiametro eiusdem circuli, & sub recta æquante dimidium eiusdem peripheriæ. Eandem enim æquationem inuenit Gregorius à S. Vincentio per aliam viam l. 3. prop. 89 vt constet quam periculosum sit quem tota retro antiquitas alicuius scientiæ Ducem secuta & venerata fuerit, eum specioso quantumuis nomine impugnare. Vnde Meibonius qui in Euclideis etiam Elementis errata demonstranda non ita pridem suscepit, quod aliud pensi inopinati pretium sperare debeat, non video. Longius abierim si illos his adiunxero qui omnia nunc mouent *ad impugnandum Aristotelismum, adhortandumque homines ad aliquam verisimiliorem, sanioresque Philosophiam*; ita enim obloquuntur contra eam quam (vt ipsi norunt)

S

generales Academiae propugnant hodie ut suam, ubi fidei Divinae contraria non fuerit.

PROPOSITIO PRIMA.

EX duabus in praesenti schemate designatis figuris prima abc esto triangulum (*Fig. 49.*) comprehensum sub rectis ab , bc , ac ; esto parabola $ameb$ quam tangat recta ac , & cuius axis æquidistet lateri bc : latus bc diuisum sit in quotcunque partes æquales, bi , ig , gh , hc , & ex puncto a ductæ sint rectæ ai , ag , ah occurrentes limbo $ameb$ in m , e , n ; per quæ puncta educantur qm , de , ln æquidistantes lateri bc , & occurrentes rectis ac , ah , ag , ai in t , o , f , r , p , n . Considerentur figuræ quadrilateræ $lnib$, $renp$, $omfe$, & trilatera amt ; quæ singulæ per limbum parabolæ diuiduntur in duas partes quarum una est interior figuræ $amebd$, altera exterior. Esto præterea figura secunda $abgc$ cuius latus ab æquet, maioris perspicuitatis causa, rectam ab primæ figuræ rectilineæ; linea autem bg , sit quælibet curua æqualis rectæ bc ; à puncto c ducta sit recta ca , & curua bgc intelligatur diuisa in totidem partes bi , ig , gh , hc in quot diuisa fuit recta bc ; istæ autem partes bi , ig , gh , hc tales sint ut ductis rectis ia , ga , ha , æqualia sint spatia bai , iag , gah , hac . Recta ab intelligatur diuisa in partes aq , qd , dl , lb æquales partibus aq , qd , dl , lb . Per l , d , q intelligantur descriptæ curuæ lnp , $dres$, qmt similes similiterque positæ curuis big , $bigh$, bhc . Intelligatur curua $aumenb$ incedens per illa omnia puncta, in quotcunque partes diuisæ concipiantur lineæ. Hæc linea vocetur *spiracea* quando bgc non est peripheria circuli, eo pacto quo *cylindraceum* dixi frequentius in Elementis solidum prismatoides cuius basis non est circulus. Patet figuris primæ figuræ $lnib$, $renp$, $omfe$, amt respondere totidem iisdem literis designatas, & figuras istas diuidi quoque per limbum $ameb$ in duas portiones vnâ internam, aliam externam.

Ostendendum est principia Archimedis pro spirali adhibita, probare figuram $amenbd$ comprehensam sub recta ab necnon sub curuâ $ameb$ spiracea, esse trientem totius bag , idque verum quoque esse in triangulo abc respectu segmenti parabolici $ameb$.

In prima figura parabolam $ameb$ esse trientem figuræ abc demonstrauit Archimedes per libræ principia in libri de quadratura parabolæ, & nos in septima secundi illam propositionem extendimus ad alias figuras in quibus linea afc est quælibet curua, ut in præfatione monuimus.

Quando curua $b g c$ est peripheria circuli integra, ostendit in vigesima quarta de spiralibus figuram $a m e b$ esse trientem figuræ $a b g c$, vtitur autem ad id ostendendum principio demonstrato in decima. Quadrata omnia linearum equalium maxima, quadratorum quidem linearum se se equaliter excedentium minora esse quam tripla; quoniam assumptis quibusdam tripla sunt; reliquorum autem dempto maxima quadrato maiora, quam tripla; quoniam assumpta minora sunt quam tripla quadrati maxime. Et propterea si similes figura describantur ab omnibus; & ab iis, quæ se se equaliter excedunt; & ab iis, quæ sunt æquales maxime: quæ ab iis describuntur, quæ sunt æquales maxime, earum quidem, quæ ab iis, quæ se se equaliter excedunt, minores erunt quam tripla; reliquarum verò, dempta ea, quæ à maxima describitur, maiores, quam tripla: similes namque figuræ eandem inter se se, quam quadrata proportionem habent. Cæterum Archimedes in illa propositione vigesima quarta assumit arcum $b g c$ esse æqualem toti peripheriæ circulari, ideòque ex eo gigni spiralem primæ reuolutionis: sed siue sit integra peripheria siue quam volueris habeat proportionem ad illam integram, eadem est vis demonstrationis.

Vnum facessere posset negotium, quòd quando linea $b g c$ non est circularis, figuræ $a l n$, $a n p$ non sint similes; sed id nihil obstat quo minus demonstratio suum robur obtineat; quia sufficit ad eius effectum vt figuræ $a l n$, $a n p$ sint æquales, & vt figuræ $a i g$, $a n p$, $a r e$ &c. sint similes; id autem accidit quæcunque sit curua $b g c$: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Demonstrationis progressus cum ostendat theorema esse verum quæcunque sit curua $b g c$; patet curuam $b g c$ posse esse spiralem, vel spiraceam, sectionem conicam quæcunque, & vno verbo lineam quæcunque siue angulosa sit, siue sit *συνέχεια ἑξῆς*; etiam si illi anguli sint rectilinei, vel curuilinei, vel quomodocunque mixti. Item siue curuæ conuexa sint ad partes a , siue sint ad oppositas.

COROLLARIUM II.

Quando curua $b g c$ est arcus circuli, & comparatur cum figura in qua $b c$ sit recta linea, analogiam earum omnimodam primus deprehendit & demonstrauit Gregorius à S. Vincentio supra laudatus; ea verò analogia vel *symbolizatio* reperitur quæcunque linea sit $b g c$, in vtrâque figura. Quia verò quando $b c$ est recta linea, proportionem omnes facillimè determinantur ex quadraturâ parabolæ & aliis circa hanc sectionem conicam inuentis; vt in cæteris similia determinentur, peti debent ex primâ figura in qua limbus $a m e b$ est parabolicus.

COROLLARIUM III.

In figura prima vbi, limbus $a m b$ est parabola, si compleatur parallelogramum $a b c x$, & iungatur diameter $b x$, ipsa $b x$ tangit parabolam $a e b$, sicuti & $a c$, vt ex trigesima tertia primi conicorum facillè colligitur: & ita recta $a x$ intercepta inter tangentem $b x$, & inter $a b$ æqualis

est recta bc . Similis proprietas demonstrata est ab Archimede quando in secundâ figurâ linea bgc est arcus circuli. Sed aduertendum est lineam bc in prima figurâ vicem gerere duarum quæ in secunda distinguuntur, nempe bgc & bM , quarum bgc est curua, bM verò est recta tangens curuam bgc in b . At in primo schemate cum linea bgc sit recta non potest tangi à recta bM , sed debent necessariò sibi mutuò congruere, dum ad tactum conueniunt. Nos autem postea demonstrabimus in vniuersum si curuam bgc tangat recta bM , & per a ducatur ax æquidistans tangenti bM ; rectam quæ in b tangat spiraceam acb , occurrere ita rectæ ax in puncto x , vt ipsa ax sit æqualis curuæ bgc . Quæ quidem proprietas in spirali demonstrata ab Archimede summæ admirationi fuit, omnibus Geometris quotquot vnquam extitere huius theorematís contemplatores. Quod autem postea Gregorius à S. Vincentio dubitabundus innuit, Archimedem deriuasse hanc spiralis proprietatem à parabolica figura in qua linea bc est recta, id probabile non est, cum Archimedes initio libri de spirilibus ad Dositheum candidè scribat ista de spirilibus theoremata fuisse à Conone inuenta nullis eorum additis demonstrationibus, quas proinde Archimedes perquisierit, & tandem inuenerit, ipsique Cononi apud Posterios omnem fermè gloriam horum theorematum præripuerit. Si itaque vllus foret accusandus, is esset Conon primus spiralis lineæ & eius proprietatum inuentor.

COROLLARIUM IV.

Ista communicatio proprietatum non sistit in planis, sed ad solida etiam pertingit: quapropter sicuti si ex puncto a excitetur perpendicularis aD ad abc primæ figuræ planum, parallelepipedum altitudinis aD , baseos abc est triplum cylindracei eiusdem altitudinis baseos abd , ita quæcunque sit linea bc in secundâ figurâ, cylindraceum eiusdem altitudinis aD , baseos abc , est triplum cylindracei baseos abd . Quod ad alia solida transferri patebit ex sequenti propositione.

PROPOSITIO II.

Intelligatur iisdem manentibus (Fig. 49.) ex puncto D educi recta linea quæ immoto puncto D describat superficiem incedendo per lineam bgc , ac proinde describens superficiem quæ si linea bgc sit peripheria circuli, erit *conica*, si alia curua erit *homæoconica*, ita enim appellauimus eam in corollario secundo duodecimæ quarti libri tetragonismicorum; si autem linea bc sit recta, erit *cunealis* superficies, solidum enim abscissum duobus planis se se secantibus ex cylindraceo aliquo, vocauimus in vigesima prima eiusdem quarti libri *cuneatum*. Intelligatur præterea per limbum ab incedere linea parallela rectæ aD & describere superficiem *cylindraceam* cuius basis sit figura abq .

Ostendendum est solidum quod est commune isti cylindraco baseos $aebq$ altitudinis aD , & homœoconico baseos $abgc$, verticis D , vi analogiæ conii euoluti & expansi esse sextantem cylindraco altitudinis aD , baseos $abgc$.

Istud ita ostenditur in prima figura, vbi linea bce est recta. Ex recta a b abscindatur bE ipsi ab æqualis, sitque ad diuisa bifariam in d : erit ergo de diameter segmenti parabolici aeb , & eius grauitatis centrum erit in recta de : ergo si libra aE suspendatur ex b perpendiculo bc , brachio bE , æquiponderans segmento $aebd$ erit æquale dimidio ipsius, cum vt bE brachium ad bd longitudinem, ita sit suspensum $aebd$ ad æquiponderans. Sed suspensum est triens figuræ $acgb$: ergo dimidium illius, nempe æquiponderans, est sextans figuræ $acgb$. Præterea ex vigesima prima quarti tetragonismicorum patet cuneatum solidum abscissum ex cylindraco baseos $aebd$ esse æquale cylindraco altitudinis aD , baseos æquantis quadratarium spatium, siue æquiponderans iam inuentum: ergo in prima figura solidum illud commune homœoconico descripto per rectam ex D manente incedentem per cg , & cylindraco baseos $aebd$ est æquale cylindraco altitudinis aD , baseos æquantis sextantem figuræ $abgc$. Igitur per analogiam id quoque verum est quæcunque sit linea bgc ; quod erat demonstrandum. Hanc porro analogiam in hoc esse veram si quis sibi demonstrari postulet, suo quidem iure vtetur; neque enim in Geometricis quicquam nisi per vim & à coacto conceditur.

COROLLARIUM.

Quando linea bgc est peripheria integra circuli semidiametro ab descripta, & punctum c congruit puncto b , patet lineam aeb esse spiralem, & superficiem descriptam motu rectæ ex vertice D per limbum bgc esse conicam: igitur in isto casu solidum commune cylindraco baseos $aebq$, & cono, est sexta pars cylindri altitudinis aD , cuius basis sit circulus peripheriæ bgc ; & si recta aD ponatur æqualis rectæ ab est octaua pars sphaeræ cuius circulus maximus sit idem qui basis conii, semidiametro ab descriptus. Nam hemisphaerium incumbens illi circulo est bes cylindri altitudinis aD habentis pro basi eundem circulum, vt ex Archimedeis demonstratis patet; ergo eiusmodi cylindrus continet tres semissemes eiusmodi hemisphaerij, & tres quadrantes totius sphaeræ: ergo cum sextans trium quadrantium vel sex octauarum, sit octaua pars, liquet solidum commune cylindraco cuius basis sit spiralis primæ reuolutionis, altitudo aD æqualis semidiametro ab , & cono verticis D , habenti pro basi circulum semidiametro ab , esse octauam partem sphaeræ cuius circulus maximus semidiametro ab describatur. Istud problema nobis postea quam edidimus viginti illas propositiones quæ primum huius Operis librum constituunt, proposuit soluendum D. Pascalius veluti suum; ipsumque idem pro suo post aliquot menses in lucem dedit Dettonuili-

læus in epistola ad D. de Sluze; quod facit ut discrimen inter Dettonuillæum & Paschaliū ecquod sit non satis videam. Porro si altitudo a D æquet semidiametrum a b, & A E, E D sint æquales, Dettonuillæus asserit solidum istud, quod cono & cylindræo commune est, esse ad cylindrum baseos eiusdem cum cono, & altitudinis a E, ut omnia simul quadrata b l ducta in l a sunt ad cubum cuius latus sit quadratum a E; id est, sicut margaritum tertij ordinis ad rectangulum comprehensum sub axe & sub ordinatim applicata ad medium, quam rationem D. de Sluze dedit non in margarito solum tertij ordinis, sed etiam in aliis reliquorum ordinum quibus constanter competit ratio numeri ad numerum. Ego cuiusmodi sint ista margarita doleo me nescire, necdum potuisse nancisci librum qui id me doceret; fateorque non potuisse me videre an meus huius solidi calculus concordet cum eo, quem ex theoremate illo suo elicere omisit Dettonuillæus.

PROPOSITIO III.

ESto a centrum circuli (Fig. 50.) semidiametro a b descripti, eiusque peripheria sit b e b, quam tangat in b recta b h, eique æquidistet recta a D; esto primæ reuolutionis spiralis b d a; per b ducta sit recta b s secans spiralem in d supra radium a b ad partes e, & occurrens rectæ a D in s.

Ostendendum est rectam a s esse minorem peripheria circuli b e b integra.

Per d & a ducatur recta a d occurrens peripheriæ circuli in e, & per e, d ducantur ordinatim applicatæ e o, d c ad radium a b: ex recta a b abscindatur a t æqualis rectæ a d. Cum a d subtendens angulum rectum a c d sit maior quàm a c subtendens acutum a d c, erit a t maior quàm a c; per t ducatur t u parallela lateri a s trianguli a s b, & occurrens lateri s b in u. Quoniam punctum t cadit inter c & b, erit trianguli b c d latus b c, maius latere b t trianguli b t u; ergo cum similia sint ipsa triangula, latus t d erit maius latere t u, ac proinde completi parallelogrammi c t u x, latus c x erit minus latere c d. Quoniam igitur rectæ a e, a b sunt æquales, itemque ex constructione a d, a t, erunt quoque æquales d e, b t. Igitur cum in triangulo s a b lateri a s æquidistet t u, ut est s a ad a b, ita ut latus trianguli u t b similis triangulo s a b, erit ad t b, & alternando ut a s ad u t vel ad x c, ita a b ad t b, vel a e ad d e. Sed ut a e ad d e ita ex generatione spiralis est peripheria circuli ad arcum e b; ergo ut peripheria circuli ad arcum e b, ita recta a s ad x c, & alternando ut peripheria tota circuli ad rectam a s, ita arcus e b ad rectam x c. Sed arcus e b est maior rectâ x c ut mox ostendetur: ergo peripheria circuli est maior rectâ a s. Superest ut ostendamus arcum e b esse maiorem rectâ x c. Si iungatur recta e b, arcus e r b erit maior ipsâ rectâ e b; in triangulo autem rectangulo e o b, recta e b subtendens angulum rectum est maior latere e o, er-

go & multò maior recta dc (cùm vt ae ad ad ita sit in triangulo cao , latus eo ad dc) ergo arcus erb est maior quàm recta dc , & multò maior quàm recta xc . Igitur recta as est minor peripheria circuli, quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Iste modus demonstrandi non postulat vt spiralis respondeat toti peripheriæ circuli; sed satis est vt totus arcus cui spiralis respondet sectus sit in e ita, vt totus ille arcus sit ad sui portionem eb , sicut est recta ae , ad ed .

COROLLARIUM II.

Præterea idem demonstrandi modus non postulat arcum bfe esse circumferentialem, sed tantum curuam bfe esse maiorem recta cx , id autem semper erit verum quoties arcus erb erit maior recta eb (quod ita esse, vt euidens assumunt Geometræ cum Archimede) & quoties insuper recta eb erit maior quam eo , id verò ita est quotiescunque angulus eo est rektus, vel rektio maior.

PROPOSITIO IV.

Idem manentibus (*Fig. 51.*) recta fb secet spiralem bi infra rectam ab in puncto i .

Ostendendum est rectam as esse maiorem peripheriâ circuli integra.

Rectæ ai æqualis abscindatur at , & per i ducatur il perpendicularis ad rectam ab : ex recta ab abscindatur at æqualis rectæ ai , & ducatur tu æquidistans rectæ bh ; erit ergo at maior quam al , cùm ai subtendens angulum rektum ali sit maior quam al . Præterea recta ai occurrat arcui bfe circulari in e ; quoniam vt illa peripheria circularis cui respondet spiralis ad punctum b per primam reuolutionem à suo initio producta, se habet ad compositam ex eadem peripheria & ex arcu bfe secundæ reuolutionis, ita ex spiralis secundæ reuolutionis generatione est ai recta ad radium ae ; ergo diuidendo vt se habet arcus circuli primæ reuolutionis ad arcum bfe secundæ, ita est radius ae ad ei , ita vt inter a & i iaceat punctum e . Præterea quoniam quotiescunque arcus spiralis primæ reuolutionis secatur per rectam ex b eductam, recta as est minor quàm arcus circuli pro prima reuolutione assumptus, patet istas secantes non auferre ex recta ad rectas as quæ ita excrecant prout magis & magis accedunt ad rectam bh tangentem, vt superent omnem datam rectam, cùm neque æquent vnquam arcum assumptum circuli: ergo tangens spiralem secabit rectam ad . Hoc autem posito apertum est curuam bi non cadere inter rectam bh & curuam bfe : angulus igitur ibl est acutus, ideoque punctum l cadit inter b & t : ergo cùm recta bh sit, vt mox ostendemus, maior arcu bfe , recta autem tu latus trianguli but , sit maior latere li trianguli bil illi similis, sed habentis latus bl minus latere

bt, vt ostendimus; erit tu maior arcu be. Quoniam verò æquales sunt ab, ae & at, ai, erit vt ab vel ae ad bt vel ad ei, ita peripheria circularis primæ reuolutioni respondens ad arcum be, sed ita etiam ob similitudinem triangulorum fab, btu est as recta ad tu vel ad lx: ergo vt peripheria circularis primæ reuolutionis ad arcum be secundæ reuolutionis, ita est as recta ad lx, & alternando vt peripheria circularis ad as rectam, ita arcus be ad lx maiorem ipso arcu be: ergo recta as est maior peripheria circulari primæ reuolutionis, si quidem verum est quod restat probandum, rectam li esse maiorem arcu be.

Per e ducatur tangens eq occurrens tangenti bh in q, & iungatur recta be, duæ ergo bq, qe ex principio Archimedeo posito initio librorum de Sphæra & cylindro sunt simul maiores arcu bre. Iungatur recta aq, quæ bifariam ex elementis Euclideis secabit arcum erb, ac proinde & angulum eab: ergo per secundam sexti Euclidis, vt ha recta ad ab, ita hq ad qb; sed ha latus trianguli hab subtendens angulum rectum, est maior quam ab; ergo hq est maior quàm qb, ac proinde & quam eq ipsi bq æqualis: ergo cum duæ eq, qb sint simul maiores arcu erb, erit hb maior eodem arcu, ergo li est maior eodem arcu, quod assumpseramus; igitur recta as est maior peripheria circulari primæ reuolutionis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Arcum circuli primæ reuolutionis intelligit Archimedes totam peripheriam circuli; potest tamen vt amplior euadat demonstratio, ita intelligi vt primæ reuolutionis arcus circularis sit ille qui percurritur totus radij motu eo tempore quo radius percurritur totus à puncto describente spiralem lineam: secundæ verò reuolutionis arcus circularis erit ille idem replicatus in consequentia, qui percurratur eodem tempore à radio intera dum punctum describens spiralem percurrit rectam æqualem radio iacentem in directum ipsius radij. Ita verò de tertia, quarta & reliquis reuolutionibus intelligi sic oportet, vt recta quæ percurritur augeatur in singulis reuolutionibus, radij vnus magnitudine. Istud verò ad spiraceas debet applicari proportionem quadam initio indicatâ.

COROLLARIUM II.

Corollarium primum superioris propositionis hîc vt patet locum habet suum. Præterea demonstrandi ratio sicuti in superiore non postulat arcum bre esse circulem, ita neque hîc, sed tantum curuam bre esse minorem rectâ lx; & rectam tu vel lx æquidistare tangenti bh.

PROPOSITIO V.

ESto (Fig. 52.) a centrum ellipseos cuius ab sit semiaxis minor, per b ducta sit bh tangens ellipsim, & ductus sit quicunque radius ae, occutrens tangenti in h.

Ostendendum est arcum bre esse minorem recta bh.

Quoniam

Quoniam ab est semiaxis minor, radius ac erit maior quam ab ; iungatur recta eb , quæ bifariam secetur in z & ducatur radius az occurrens tangenti bh in q ; ergo si iungatur e q tanget ellipsim, ut ex trigesima septima primi conicorum aperte infertur. Per e ducantur et , ey parallelæ rectis ab , az & occurrentes rectæ bh in t & y . Igitur cum in parallelas ab , et incidat recta ah , angulo hab æqualis erit angulus het ; eademque de causa cum in parallelas ey , az incidat eadem ah , anguli hey , haz erunt æquales: sed angulus haz est minor angulo hab ; ergo angulus hey est minor angulo het : ergo punctum y cadit inter t , & h : ergo recta qh est maior recta qy ; cumque ey , zq æquidistant in triangulo $eb y$, sicut be secatur bifariam in z , ita by in q : ergo recta qh est maior quam bq .

Rursus quoniam ez , zb sunt æquales, & radius ac est maior radio ab ; in triangulo azc angulus azc erit maior angulo azb trianguli azb : ergo angulus bzq æqualis angulo azc ad verticem z posito est maior angulo ezq qui æqualis est angulo azb ad verticem eundem posito; ergo cum latera trianguli bzq sint æqualia lateribus trianguli ezq singula singulis, & angulus bzq sit maior angulo ezq , patet rectam bq esse maiorem recta eq : ergo bh est maior duabus simul bq , qe , ac proinde & arcu erb , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Hinc patet quicumque arcus sit erb , si recta ac sit non minor quam ab , rectam bh esse maiorem duabus simul eq , bq tangentibus; & si ex z bisectione rectæ eb excitetur perpendicularis za occurrens rectæ ba in a ad curvæ erb caua (quod accidet quoties angulus abe fuerit acutus) rectas ae , ab esse æquales. Et si inter a & b sumatur quodcunque punctum u , & ducantur rectæ uz , ue , rectam ue esse maiorem recta ub . Cum enim az sit perpendicularis ad eb , anguli eza , azb erunt æquales: ergo angulus uze est maior angulo uzb ; ergo recta ue est maior recta ub , cum triangula uze , uzb habeant idem latus uz , & latera ze , zb æqualia.

COROLLARIUM II.

Si erb sit quilibet arcus sectionis conicæ vel cuiuscunque alterius curvæ quæ tota sit caua ad partes z , & bh tangens sit perpendicularis ad rectam ba , item si recta br per b ducatur subtendens arcum br portionem quamlibet arcus bre ; angulus hbr erit minor angulo hbe , ac proinde perpendicularis ad rectam br eam bifariam secans occurreret rectæ ab ultra punctum a , secabit enim rectam az ad curvæ erb partes a : igitur quicumque ex puncto a educatur linea ad quodlibet arcus erb punctum illa erit maior quam ab : igitur arcus erb habebit proprietatem quæ requiritur ad hoc ut recta bh sit maior arcu erb . Quod si angulus hba non sit rectus sed acutus, semper stabit dicta proprietas.

T

Esto ut in tertia (*Fig. 50.*) arcus circularis erb , & spiralis dbi ; ex puncto b educta sit bV tangens spiralem in b , & occurrens rectæ as in V .

Ostendendum est rectam aV esse æqualem arcui circulari qui respondet reuolutioni primæ in puncto b terminatæ.

Reuolutionem intelligo non solam ἀποκρίσασθαι, sed etiam ut dixi in corollario quartæ, motionem radij & puncti per radium incedentis ab vno eius extremo quousque punctum perueniat ad aliud extremum, atque hæc est prima reuolutio; secunda erit si radio isti addas in directum alterum radium, qui pari ratione à puncto generatore spiralis lineæ moueatur, interea dum pari quoque latione linea consequenter percurrit parem priori arcum; & ita tertia, quarta, & aliæ reuolutiones intelligi debent, ut propositio euadat generalis.

Esto itaque reuolutionis primæ terminus & meta b , initium a ; radius autem cuius motu describitur spiralis est ipse ab , quando primæ reuolutioni respondet tota peripheria circularis; erit verò alius quilibet af , si primæ reuolutionis arcus sumatur $ferb$, ita ut quo tempore punctum generans spiralem incipit moueri à puncto a ad f per radium af , ipse radius manente a circumferatur per arcum feb , seruata vtriusque motionis æquabilitate, ut præscripta ab Archimede ratio generationis postulat.

Hoc ita declarato vis demonstrationis ab absurdo petitæ hæc est, si arcus circuli non est æqualis rectæ aV vel est minor, vel maior. Sit primò, si fieri potest, minor, illique sit æqualis recta as ; ergo si ducatur recta bs secabit spiralem in aliquo puncto d ad partes superiores radij ab , ut infra ostendetur; igitur per tertiam propositionem, cum recta bs secet spiralem in d supra radium ab ; erit as recta minor arcui circulari qui respondet reuolutioni, quod est absurdum cum eidem arcui ponatur æqualis.

Sit secundò si fieri potest recta aV maior in arcu primæ reuolutionis, sitque aq illi æqualis; iungatur recta bq quæ secabit spiralem infra ab puncto i , ut mox ostendemus; ergo cum recta ibq spiralem productam secet infra rectam ab , recta aq erit per quartam maior arcui circulari primæ reuolutionis; quod est absurdum cum ei æqualis posita iam sit: non ergo au recta est maior, neque minor arcui circulari primæ reuolutionis, sed est illi æqualis, modo constet rectam qb secare spiralem in i .

Id verò ostenditur ex tangentis proprietate demonstrata ab Euclide libro 3. propositione 16. *alteram rectam non cadere in locum inter peripheriam & tangentem comprehensum*; quam quidem proprietatem communem esse rectis quæ sectiones conicas tangunt demonstrat Apollonius libri primi Conicorum propositione trigesima secunda. Quoniam igitur recta bh tangit arcum erb in b , quæcunque alia bq secans angulum ab ducatur,

secabit arcum in y : ergo si iungatur radius $a y$, secans spiralem in z , punctum z erit inter a & y , quia ut totus primæ reuolutionis arcus ad sui partem $y r b$, ita ex generatione spiralis est radius $a y$ ad sui partem $y z$.

Habent igitur hanc proprietatem spiralis & circuli peripheria, ut si ex puncto b educatur qualibet recta $b y$ secans peripheriam in y , & iungatur radius $a y$, in ipso radio $a y$ sit z punctum spiralis, & ut recta $b z$ secet ita spiralem, ut inter a & y pro prima reuolutione iaceat punctum z , in secunda verò inter a & z iaceat y . Quòd si inter rectas $a b$, $b h$ ex puncto b duci posset aliqua recta quæ non secaret arcum $b r e$, illa non haberet ullam sibi respondentem ex b paritereductam quæ secaret spiralem; & sicuti inter tangentem $b h$ & arcum circuli $b e$ possent duci innumeræ rectæ ex puncto tactus quæ non secarent peripheriam circuli, ita inter spiralis lineæ tangentem $b V$ & arcum ipsum spiralem possent ex b agi innumeræ quoque rectæ quæ non secarent arcum spiralem. Ergo tunc male sumeretur recta $q b$ secare arcum spiralem, cum sine numero possent duci inter tangentem & spiralem quæ non secarent ipsam in alio puncto, sed illi tantum occurrerent in b . Itaque hæc est natura spiralis ut tangens eius $b V$ imitetur tangentem $b h$ arcus genitoris in hoc, ut sicut in locum qui interiacet inter arcum genitorem $b r e$ & tangentem $b h$ potest vel non potest cadere recta, ita in locum qui est inter spiralem illi respondentem $b d z$ & tangentem $b V$ possit vel non possit duci recta ex puncto tactus b . Cum igitur in locum qui iacet inter circularem arcum & tangentem non possit cadere recta, neque poterit cadere in locum qui iacet inter spiralem $b d z$ & tangentem $b V$: ergo recta quæcunque ex b educta præter tangentem $b u$, secat spiralem arcui circuli respondentem, prout quoque secat arcum ipsius circuli; rectè ergo assumpimus rectas $b q$, $b s$ ex puncto tactus b eductas, & diuersas à tangente $b V$ secare arcum spiralis ex arcu circulari genitæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quæ de secunda reuolutione & aliis demonstrat Archimedes, satis perspicua sunt si demonstratio præsentis propositionis clarè intelligatur; quapropter ea omittimus ampliore elucidatione exponere.

COROLLARIUM II.

Ex demonstratis hætenus liquet demonstrationis robur persistere etiam in spiraceis dummodo arcus genitoris $e r b$ tangens habeat proprietatem illam ut in locum interceptum, tangente & arcu nullæ recta cadat ex puncto tactuseducta; ac proinde ut hoc ipsum conueniat tangenti spiraceæ. Secundò corollarium secundum tertiæ exigit ut angulus $e o b$ vel $d c b$ non sit minor recto, ad hoc ut iuncta $e b$, angulus $a b e$ sit acutus: eadè verò propositio tertia requirit ut recta $a d$ sit maior recta $a c$, quod necessariò euenit si angulus $a c d$ non sit minor recto; ergo cum nec $a c d$ nec $d c b$ debeant esse minores recto, secunda ista conditio eo reductur ut angulus

a c d sit rectus. Tertio ut arcus b r e sit cauus ad partes initij a. Quartò ut recta ex initio a ad arcum genitorem utcumqueeducta sit non minor recta ab, id enim exigitur in corollario primo quintæ. Quoties ergo arcus genitoris quatuor erunt proprietates iam dictæ, prima quidem ut in locum inter tangentem b h & arcum genitorem b r e nulla ex b ducta recta cadat; secunda ut angulus a b h sit rectus, tertia ut arcus e r b sit cauus ad partes initij a: quarta ut quælibet recta ex a initio ducta ad arcum non sit minor recta a b, toties demonstratio præsentis propositionis idem demonstrabit de spiracea, quod hic demonstratum fuit de spirali. Vnde patet quàm ampla euadat præsens propositio. Hanc spiraceam voco continuam.

COROLLARIUM III.

Quoniam in prima propositione ponimus ad effectum illius demonstrationis curuam b r e genitricem spiraceæ esse cuiuscunque modi, ad effectum verò præsentis requirimus quatuor iam dictas proprietates in curuâ illâ genitrice, patet istud theorema non patere tam latè quam illud. Sunt enim plurimæ curuæ quibus illæ proprietates non competunt, cuiusmodi sunt illæ quæ angulosæ sunt, id est compositæ ex multis lineis angulos constituentibus; namque si ex angulo educas rectas quæ hinc & inde tangant arcus conuenientes in angulum, illæ rectæ non iacebunt necessariò in directum; angulum verò a b h posse non esse rectum patet ex eo quod in spiraceæ generatione possit initium eius poni in quolibet puncto, ac proinde extra perpendicularem excitatam ex puncto b ad tangentem b h. Nos igitur in sequentibus non sumemus punctum a, siue initium spiraceæ nisi in perpendiculari ad tangentem b h, arcum verò b r e ostendemus *συνέχειαν ἔχειν*, id est continuo tractu & sine angulis vno ductu describi; & ad partes initij a esse cauum: id verò ostendemus in arcu circulari; elliptico, hyperbolico, parabolico & etiam spiraceo continuo; ut inde habeamus arcubus istis respondere rectam æqualem interceptam inter perpendicularem excitatam ex initio spiraceæ ad radium ab ipso initio a ad finem b spiralis primæ reuolutionis, & inter ipsius spiraceæ tangentem ex fine beductam. Circularem verò arcum adnumerauimus quia illi non solum respondet spiralis initium habens in centro, sed etiam spiracea initium habens in quolibet puncto sumpto in radio qui à centro ad finem b spiraceæ primæ reuolutionis educitur. Porro cum figuram angulis nullis asperam diximus, animus non fuit excludere ab huius vocis significatu peripheriam circuli, quamuis enim à quibusdam (ut in prolegomenis tetragonismicorum librorum notauimus) maximè angulosa figura dicatur, id tamen mente magis quàm re ipsa verum est, nam licet circuli ambitus sit reuera ille in quem definunt figuræ inscriptæ vel circumscriptæ *πολυγωνόταται*: definunt tamen, nec circulo *πολυγωνότητα* communicant.

PROPOSITIO VII.

IN schemate quintæ propositionis (*Fig. 52.*) arcus er b esto circularis, quem in b tangat recta bh , ex puncto b educta sit bu perpendicularis ad rectam bh ; & ex puncto z bifariam secante rectam eb excitata sit perpendicularis zs ad ipsam eb , occurrens rectæ a b in a .

Ostendendum est si inter a & b sumatur quodcunque punctum u , & iunctâ rectâ ue ponatur ipsum u initium spiracæ ud b respondentis arcui er b iuxta methodum primæ propositionis, quam in b tangat recta bf , occurrens in f rectæ ug ad b a rectam perpendiculariter excitatæ ex u puncto, rectam uf esse æqualem arcui circulari b re.

Quoniam recta za est perpendicularis ad eb subtendentem arcum er b, patet ex elementis Euclidis rectam ra transire per centrum, ex iisdem verò patet rectam ba transire pariter per centrum, ergo a est centrum circuli, & arcus ez b est cauus ad partes puncti a , & rectæ ae , ab sunt æquales. Præterea tangens bh habet proprietatem requisitam in corollario superioris vt in eiusdem propositionis progressu monstratum est. Ex corollario autem secundo quintæ patet omnem rectam ex u eductam ad arcum ez b esse maiorem recta ub . Igitur per superioris propositionis corollarium secundum recta uf est æqualis arcui er b, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Initium spiracæ posuimus in puncto inter a & b iacente, exclusimúsque ipsum a , quia si initium ponatur in a , gignetur spiralis linea respondens toti arcui designato er b. Quando autem arcus er b non erit circularis, poterit assumi punctum a vel etiam quodlibet aliud inter a & b iacens, dummodo quatuor in corollario sextæ requisita reperiantur in curuâ er b.

PROPOSITIO VIII.

IN schemate eodem, arcus er b esto ellipticus vel hyperbolicus vel parabolicus, quem in b tangat recta bh ; ex puncto b educta sit bu perpendicularis ad bh ; ex z bisectione rectæ be excitata sit zs perpendicularis ad ipsam be , occurrens rectæ a b in a .

Ostendendum est si in recta ab sumatur quodcunque punctum u extra b positum, & iunctâ rectâ ue ponatur ipsum u initium spiracæ ud b respondentis arcui er b iuxta leges generationis ipsius datas in prima propositione, ipsamque spiracem tangat in b recta bf occurrens in f rectæ ug ad rectam hb parallelæ, rectam uf esse æqualem arcui elliptico vel hyperbolico, vel parabolico b re.

Quoniam angulus $h b a$ est rectus, & recta $b e$ iacet inter rectas $a b$, $b h$, patet angulum $a b e$ esse acutum, ac proinde punctum a iacere ad arcus $e r b$ partes cauas, rectasque $a e$, $a b$ esse æquales. Præterea tangens $b h$ habet proprietatem requisitam in corollario ultimo sextæ, ut in eiusdem propositionis progressu ostendimus. Ex corollario autem secundo quintæ patet omnem rectam ex u (etiam cum congruit puncto a)eductam esse non minorem recta $u b$. Igitur per corollarium secundum eiusdem sextæ recta $u f$ est æqualis arcui $e r b$, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

IN eodem schemate arcus $e r b$ esto spiralis vel spiraceus continuus, quem in b tangat recta $b h$; ex puncto b educta sit $b u$ perpendicularis ad $b h$; ex z bisectione rectæ $b e$ excitata sit $z s$ perpendicularis ad ipsam $b e$, occurrens rectæ $a b$ in a .

Ostendendum est si in recta $a b$ sumatur quodcunque punctum u extra b positum, & iuncta recta $u e$ ponatur ipsum u initium spiraceæ $u d b$ respondentis arcui $e r b$ iuxta leges datas initio primæ, ipsamque spiraceam modo genitam tangat in b recta $b f$ occurrens in f rectæ $u g$ ad rectam $b h$ parallelæ, rectam $u f$ esse æqualem arcui $e r b$ lineæ spiralis vel spiraceæ continuæ.

Istud iisdem verbis ostenditur quibus superior; hoc tantum assumitur ex monstratis sub finem sextæ, si ex arcu $b r e$ qui habeat tangentem præditam proprietate requisita in corollario secundo eiusdem sextæ, gignatur spiralis vel spiracea, istam spiralem vel spiraceam habere eiusdem proprietatis tangentem in puncto b . Nam arcum $b r e$ esse cauum ad partes rectæ $b z$ ponimus, cum ponamus esse continuum & sine angulis, idque etiam habeat spiralis & spiracea continua ex arcu unde generata primum fuit: ergo cum segmentum $e r b$, & triangulum isosceles $e a b$ habeant eandem basim $b e$, & ad illius partes oppositas iaceant, patet punctum a esse ad cauas partes arcus $e r b$: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quamuis quatuor ista tantum curvarum genera ad rectas reduxerimus nulla tamen alia excipi curua debet: nam angulosæ & non continuæ, componuntur ex non angulosis; ergo angulosarum dimensio nota est si sumatur per partes. Cæterum tangens spiralem & spiraceam monstrata est in decursu sextæ habere illam proprietatem sine qua nulla prorsus foret demonstratio Archimedis, quam in propositione decima octaua adhibet, & quam nos eodem quidem sensu sed diuersis verbis attulimus in illa sexta propositione. Quod si quis exigeret eius rei demonstrationem paulo ampliorem, ei satisfieri posset, sed non sine aliquot propositionibus quas breuitatis causa prætermittimus: qua etiam de causâ similem

aliam proprietatem ex generante arcu propagatam in generatam spiralem vel spiralem quam sub finem præsentis propositionis attulimus, accuratiùs demonstrare negleximus.

COROLLARIUM II.

Dettonuillæus epistola scripta ad Anonymum & edita in eodem volumine vnâ cum tribus alijs, primâ ad D. de Carcauy, alterâ ad D. de Huguenens, tertiâ ad D. de Sulze, ostendit mira ingenij subtilitate, Archimedeo veterumque omnium stylo, *si sit parabola cuius axis æquet dimidium peripheria circularis, ordinatim verò applicata æquet radium circuli eiusdem, arcum parabola istius inclusum inter axem & ordinatim applicatam esse æqualem primæ reuolutionis spirali descriptæ in eodem circulo*, intelligendo primam reuolutionem, vt eam explicuit Archimedes iuxta annotata à nobis in primo corollario quartæ propositionis. Nos verò æquo Lectori æstimandum relinquimus quanta ex hæcenus demonstratis accessio fiat huic Dettonuillæi inuento; quando quidem & arcui parabolico, & spirali assignamus suam rectam æqualem, ea prorsus methodo qua Archimedes peripheriæ circuli æqualem rectam designauit in decima quarta propositione spirali; nec tantum arcubus parabolicis vel spirilibus, sed hyperbolicis etiam atque ellipticis, & quibuscunque alijs curuis, quod ante nos nullus præstitit quantum quidem ex libris quos viderimus editis affirmare licet. Idem Dettonuillæus initio illius epistolæ ait *suam demonstrationem esse integram, exacteque absolutam; eoque magis placere posse Anonymo, quòd vnica in hoc genere sit, cum nulla adhuc producta in lucem extet, quæ Antiquorum methodo duas diuersi generis lineas conferat*. Istud ego non satis intelligo; nam Archimedes circuli perimetrum cum recta linea quæ diuersæ planè naturæ est, iam olim contulit in libello de spirilibus, vt modo diximus.

COROLLARIUM III.

In schemate primæ propositionis explicandum vnum restat quod scripsit Gregorius à S. Vincentio sub finem propositionis secundæ libelli de symbolizatione *iure merito spiralem, dici euolutam siue expansam parabolam*. Si enim in figura primæ propositionis prima intelligas circulum euolui in rectas, ita vt integra peripheria bcb æquet rectam bc , & integra peripheria qtr æquet rectam qr , atque ita de alijs, patet circulum semidiametro ab descriptum euolui & expandi in triangulum abc ; similique de causa spiralem figuram $ambd$ euolui expandique in parabolicum segmentum $aebd$. Econtrariò pariter dicere possis triangulum rectilineum abc cuius latus bc æquet peripheriam circuli semidiametro ab descripti circumuolui & contrahi in circulum, segmentumque $aebd$ parabolicum in figuram $aebd$ conuolui. Ne tamen inde inferas vel lineam $ameb$ parabolicam esse æqualem lineæ $ameb$ spirali; vel circulum expansum esse æqualem conuoluto: non enim asseritur ista circuli veriùsque æqualitas, sed rationum similitudo atque analogia in plurimis. Præterea aliud monere debemus vt hallucinationis omnis ansa præcidatur, eundem Grego-

rium à S. Vincentio in calce propopositionis vigesimæ tertiæ mentionem facere cuiusdam spiralis ellipticæ quam ostendit esse trientem ellipseos, sicuti spiralis circularis est triens circuli: illa tamen spiralis linea alterius longè diuersæ est generationis ab ea quam in prima huius libelli tradidimus; licet enim Gregoriana & nostra figura spiracea respondentes eidem ellipsi in hoc conueniant quod singulæ sint triens ellipseos, discrepant tamen plurimum, nam recta, quæ in termino tangit lineam spiraceam, nostram, ex perpendiculari excitatâ à spiraceæ initio ad rectam connectentem puncta initij & termini, abscindit portionem æqualem peripheriæ siue perimetro ellipseos, at verò tangens spiralem ellipticam lineam Gregorianam, non abscindit nisi rectam æqualem dimidiò peripheriæ circuli, cuius diameter æquet axem longiorem ellipseos. Diuersissimæ igitur sunt istæ lineæ, verumque adeo est, neminem Autorum qui quidem à nobis perlecti sunt, inuenisse rectam æqualem perimetro ellipseos, vel cuius parti eiusdem perimetri.

COROLLARIUM IV.

Dum P. Athanasius Kircherius Musurgia suæ mirificæ tom. 2. pag. 282. quem edidit Romæ anno 1650. tradit methodum describendæ spiralis lineæ ex peripheriæ circuli portionibus certa quadam arte dispositis, manifestum est eum non agere de spirali Archimedeæ, sed de quadam conuoluta linea quæ reflectendæ voci aptissima sit. Etenim si Archimedeæ spiralis componeretur ex illis peripheriæ portionibus, nota esset methodus inueniendi tangentem spiralis, vi cuius quadratura absoluta circuli prodiret, vt ex hæcenus demonstratis liquet. At verò p. 303. & 304. vbi habetur istud ipsum quod Dettonuillaus proposuit theorema *de æqualitate perimetrorum parabola & spiralis*; apertum est eum designare Archimedeam: sed optauit iam pridem vt illius demonstrationem apposuisset integram; nam quod scribit, *illam dependere ex diuersis motibus, quæ vtraque similiter & æqualiter describitur* non satis est ad cogendum Geometram, nec ad hoc vt quæ defunt demonstrationi, inde colligantur facilè. Ad hos etiam motus sed obiter recurrit P. Mercennus in libro Hydraulicorum, vt testatur Dettonuillaus ipse, qui *hæc per motus illos demonstrandi ratione non omnino conuinci intellectum*, admonet. Quoniam verò hunc Musurgia tomum præ oculis nunc habeo, his subdere lubet nescire me, cur Doctissimus ille Autor pag. 280. vbi tradidit modum *describendæ parabola vnicò ductu fili*; addiderit modum inueniendi focum O, cum in ipsius schemate focus sit iam datus vel assumptus, ipsum nempe punctum L cui affigi filum methodus iubet. Ista enim methodus non describit nisi eam parabola partem quæ vltra focum ad partes verticis iacet; ita verò describit, vt figat filum in eo puncto quod parabola focus erit. Filum enim ponitur duplum sagittæ BL quæ iacet inter verticem B & punctum L cui necitur filum, ponitur verò æquale ordinatim applicatæ LG ad axem BL; ergo cum vt BL, ad LG ordinatim applicatam, ita sit ipsa LG ad latus rectum, vt ex vndecima

decimā primi conicorum liquet; erit BL quarta pars lateris recti, ac proinde punctum L erit focus parabolæ, vt demonstratum est à Vitellone.

PROPOSITIO X.

Ostendere ex analogia conorum euoluti & conuoluti, proportionem eandem colligi coni ad cylindrum eiusdem baseos & altitudinis, quæ alia methodo inuenta ab Antiquis extat, nempe trientis ad assem. Proportionem verò superficiei coni recti ab basim eandem quoque erui cum ea quam Archimedes demonstrauit propositione 15. libri quinti de sphaera & cylindro, videlicet lateris trianguli per axem ad semidiametrum baseos.

In secunda propositione (*Fig. 49.*) monuimus sicuti triangulum abc conuoluitur in circulum abc , ita cylindraceum prisma altitudinis aD , baseos triangularis abc conuolui in cylindrum altitudinis eiusdem baseos circularis abc : & ita pariter homœoconicum cuius eadem sit altitudo aD , basis triangularis abc , vertex D , conuolui in conum cuius idem sit vertex D , basis circularis abc . Antiqui igitur inuenerunt conum esse trientem cylindri eiusdem baseos & altitudinis, quod nos etiam nostra methodo demonstrauius in quarti libri tetragonismicorum corollario quinto propositionis decimæ octauæ. Id verò etiam seruatur in cono euoluto & conuoluto; nam homœoconicum est triens prismatis vt in illo loco tetragonismicorum ostendimus, ergo cum homœoconicum sit conus expansus & euolutus, illa proprietas competit cono in vtroque statu, quod erat primum ex demonstrandis.

Rursus ex vertice D educantur rectæ Dc , Db ; patet coni recti explicati & euoluti superficiem esse triangulum $dc b$. Cum igitur recta Da sit ad planum abc perpendicularis, erit angulus $Da b$ rectus; cumque angulus $c b a$ ponatur quoque rectus, erit angulus $c b D$ rectus; ergo triangula $c b a$, $c b D$ eadem basi $c b$ prædita sunt vt altitudines $b a$, $b D$; ergo superficies recti expansi est ad basim abc vt recta $D b$ ad $a b$. Atqui in cono conuoluto recta $D b$ est latus trianguli per axem $a D$, & recta $a b$ est semidiameter baseos circularis: ergo superficies coni expansi ad basim, est vt latus trianguli per axem recti coni conuoluti, ad semidiametrum baseos, quod erat alterum ex demonstrandis.

PROPOSITIO XI.

Esto planum quodcunque bac (*Fig. 53.*) in quo ba , ac secant se ad rectos angulos; ex a excitata ad planum sit perpendicularis xa . In plano xac intelligatur quæcunque figura axz & c insistentis rectæ ac ad positionem rectæ ax , cuius limbus xz & sit qualibet linea curua vel recta, vel mixta quomodocunque. Hæc figura vocetur ge-

generatrix. Intelligatur in plano bac supposito (ita enim vocetur) intra parallelas ba , cd describi quæcunque linea bho recta vel curua vt paulò aptè, eius verò proprietas hæc sit vt rectæ ba parallelis non occurrat nisi in vno puncto. Ad positionem plani xab intelligatur figura $cexa$ transferri in cylindraceam superficiem. Eo b l insistentem lineæ bho , descriptam motu rectæ æquidistantis perpendiculari ax , modus autem transferendi sit ille ipse quem in decima quinta secundi libri exposuimus, ita vt rectæ ax , bl sint in eodem plano xab , sintque ax , al æquales, & ducto quouis alio zgh ad planum xab parallelo, dimetientes zg , hm sint æquales; ista figura vocetur *generata*. Sit in eodem supposito plano alia quæuis linea bqr ita se habens ad bho vt quæcunque qh , sit rectæ ba æquidistantes ducantur, portio qs sit maior portione ht , idque perpetua lege seruetur, vel certè sit minor, dummodo stata lege sit minor quomodocunque ducantur ad rectam ba parallelæ qh , sit: lineæ verò bqr insit stat figura altera pari pacto generata.

Ostendendum est generatarum superficierum illam esse maiorem quæ maiori basi insitit, minorem verò quæ minori.

Quoniam enim altitudines hm , t u sunt æquales altitudinibus quæ insistant punctis s , q , eaque æqualitas dimetientium perpetua lege obseruatur ad positionem plani xab ; necesse est vt illa superficies sit maior, quæ maiori basi superstat, illa minor quæ minori. Hoc enim ex se euidentius est, basis namque magis perpetua leue extensa, posita pari altitudine dimetientium sibi æquidistanter respondentium, maius spatium gignit; hoc verò si euidentius non est, vix quicquam aliud est. Ne tamen tyrannidem vllam exercere velle in ingenia videamur, reponatur inter postulata; tale enim est istud theorema, vt saltem illum locum ei negare non debeamus: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus (*Fig. 53.*) ex recta ca abscindatur quælibet aA , & compleatur parallelogrammum $aABb$.

Ostendendum est si maneant superficies generatæ vt suprâ, & sustententur plano bac vt sunt ad illud erectæ, æquipoderans figuræ erectæ super basi maiore esse maius æquiponderante figuræ erectæ super minore, si planum bac intelligatur suspendi libræ axe ba , sustentaculo AB .

Quoniam enim illæ superficies ita ponuntur esse inter se, vt quæcunque sit axi ba parallela ducatur, dimetientes incidentes punctis t , s sint æquales, & vna superficierum sit per superiorem constanti lege maior

alia, necesse est vt cum ipsæ magnitudines sint maiores, earum maior maior sit ponderis, cum in reliquis ad pondus facientibus non vincatur à minore superficie, eo quòd in pari ab axe interuallo æquales ponantur habere altitudines, siue perpendiculares ad planum bac . Istud euidentius mihi est; sed ponatur, si placet Lectori, inter postulata: ergo &c. quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

In sexta primi tetragonismicorum ostendimus superficies illas esse æquales cuicunque lineæ insistant, quæ ad positionem rectæ cuiuslibet ab sint conductæ ratione æquales, quod videtur repugnare superiori & præsentis propositioni; volumus enim inter figuras generatas eam esse maiorem quæ maiori limbo insistit, licet ad positionem certæ cuiusdam rectæ sint æquales. Respondemus nihil ista secum pugnare. In illo enim libro agimus de figuris quæ in eadem sunt superficie plana, hîc verò de superficiebus diuersis insistentibus eidem plano. Quod si concipias illas superficies quæ insistent inclinari in planum bac ad positionem plani xab & illi congruere, tunc ita inclinata superficies erunt æquales per illam sextam, quamuis erectæ sint inæquales vt hîc ostendimus.

PROPOSITIO XIIII.

Isdem manentibus (Fig. 54.) sit lineæ $btho$ recta, vel composita ex rectis: figuræ $acex$ quadratrix figura sit $afec$, quæ generetur librâ grammica ac suspensâ ex a , perpendiculo ax , brachio quocunque aA , ita vt sicut est Aa brachium ad quamcunque rectæ ac portionem ag , ita gz dimetiens suspensæ parallela rectæ ax se habeat ad gf dimetientem quadratricis. Hæc quadratrix intelligatur transferri & commutari modo supra præscripto in generatam quæ insistat compositæ $btho$.

Ostendendum est libræ axe ba , sustentaculo BA , æquiponderans generatæ figuræ $onmulbth$ esse translata figuram $nyibtho$: ac proinde quadratricem figuræ suspensæ translata esse ipsam quadratricem pariter translata.

Istud demonstratur ex septima secundi tetragonismicorum in hunc modum. Linea $btho$ composita sit ex quocunque rectis bt , th , ho : recta bt vel est parallela rectæ ac , vel eam secat. Si est parallela patet figuram $utbl$ generatam, esse similem & æqualem generatrici, itemque quadratricem bit esse similem & æqualem generatrici apr : ergo sit b , ar æquidistant translata bit est quadratrix generatæ $tulb$. Si bt secat rectam ca , sectionis punctum sit s ; secet autem rectam AB in E : patet itaque rectam $tbadra$ esse vt rectam $bsada$, vel $bEadA$: ergo vt Aa ad ar , ita erit bE ad bt ; sed vt Aa brachium ad ar , ita est rD ad rp , hoc est, tu perpendicularis basi $tbadri$: ergo vt bE brachium libræ grammicæ Et , ad longitudinem bt , ita est suspensæ $utbl$ dimetiens

ut ad t i dimetientem figuræ tib : ergo per septimam secundæ tetragonismicorum figura tib est quadratrix figuræ generatæ $tulb$, siue recta tb secet rectam ca supra rectam ba ad partes c , siue infra. Eadem verò seruetur demonstrandi methodus pro aliis quocunque rectis th , ho : ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Iisdem (*Fig. 55.*) manentibus figura $buctlhm$ o sit curua, & sit basis generatæ ex genitrice $ceza$ ut in superioribus, siue caua arcus illius sint ad partes rectæ ac , siue non sint; siue ex parte sint, & ex parte non sint,

Ostendendum est generatam figuram illi insistentem procreatam ex generatrice $ceza$ habere pro quadratrice generatam aliam figuram illi insistentem procreatam ex quadratrice $apfec$.

Istud ostenditur Geometrarum veterum more, sicuti & septima secundæ tetragonismicorum. Generata ex quadratrice $apfec$ insistentis curuæ $buctlhm$ e sit æqualis spatio E ; spatium æquiponderans sit F . Si igitur spatium F quod æquiponderat generatæ ex generatrice $ceza$, non est æquale spatio E , erit vel eo minus vel maius. Sit primò si fieri potest minus, & duo simul F , H æquent totum E . Assumo duo genera rectarum primum est subtendentium, quæ videlicet subtendunt quocunque arcus æquales in quos curua diuisa fuerit, quales in schemate sunt bt , th , ho ; alterum tangentium quæ eosdem arcus in extremis punctis tangunt, ita ut arcus quilibet $buct$ subtendatur recta bt quæ est basis trianguli bti ; duæ autem bi , it tangant arcum in punctis extremis b , t , vel certè non secent nisi in punctis b , t , cadantque ad arcus $buct$ conuexa. Ex Archimedeo assumpto liquet subtensam bt esse minorem arcu $buct$; duas verò simul tangentes bi , it esse maiores eodem arcu $buct$. Igitur ex demonstratis in superiore, figura $cefp$ a translata in omnes subtensas dabit quadratricem generatæ ex $ceza$ insistentis super iisdem subtensis: eodemque pacto translata in omnes tangentes exhibebit quadratricem generatæ ex $ceza$ insistentis super ipsis tangentibus. Præterea ex vndecima quadratrix insistentis tangentibus erit maior quadratrice insistente subtensis, & generata ex $ceza$ insistentis tangentibus erit quoque maior, generata insistente subtensis. Tertiò ex propositione duodecima quadratrix generatæ insistentis tangentibus erit maior quadratrice insistente arcubus, & quadratrix insistentis subtensis erit minor quadratrice insistente arcubus. Quartò si arcus vnius diuisionis diuidantur iterum bifariam & singuli subtendantur suis rectis, & ambiantur suis tangentibus, assumimus cum Archimede & aliis omnes simul subtensas posterioris diuisionis esse maiores omnibus simul subtensis prioribus: eademque ratione omnes simul tangentes posteriores esse minores omnibus diuisionis anterioris. Vnde sequitur quadratricem $cefa$ translata in omnes posteriores

subtensas, esse maiorem quadratrice translata in prioris diuisionis subtensas: similique pacto quadratricem translata in posterioris diuisionis tangentes esse maiorem quadratrice translata in tangentes prioris diuisionis. Quintò denique ponimus cum iisdem in tot arcus posse diuidi curuam, vt E genita ex $c e f a$ translata in ipsos arcus & illis insistens excedat quidem quadratricem insistentem subtensis, sed excessu qui minor sit spatium H . Pari pacto vt eadem E sit quidem minor quadratrice insistente tangentibus, sed differentia possit esse minor qualibet data, multiplicatis in infinitum diuisionibus arcuum.

Hoc ita constituto ostenditur spatium F non esse minus spatium E . Diuidi intelligatur in tot arcus vt excessus sit minor quàm H : ergo quadratrix insistens illis subtensis erit maior quàm F , quod est absurdum cum per vndecimam $a c e f$ translata in lineam maiorem sit maior translata in minorem; composita autem linea ex arcubus est maior composita ex subtensis: non igitur spatium F est minus spatium E vel quadratrice $c e f a$ translata in arcus.

Secundò si fieri potest, spatium F esto maius spatium E , & excessus sit H , ita vt duo simul E, H æquent totum F . Intelligatur in tot arcus diuidi curua vt excessus quo quadratrix $c e f a$ translata in tangentes superat eandem translata in arcus, sit minor quàm magnitudo H . Igitur ista quadratrix est minor spatium F , siue quadratrice $c e f a$ translata in arcus, quod est absurdum, cum per vndecimam $a c e f$ translata in lineam maiorem sit maior translata in minorem: composita autem linea ex tangentibus est maior composita ex arcubus: non igitur spatium E vel quadratrix $c e f a$ translata in arcus, est minor æquiponderante spatium F : sed neque est maior vt ostendimus: ergo quadratrix $c e f a$ translata in lineam curuam $b u t l h m o$ est æqualis spatium quod æquiponderat generatæ ex figura $c e z x a$ insistenti super curua, quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

In istis quatuor propositionibus notari diligenter debet planum $a c e$ poni rectum ad planum suppositum $b a c$, & rectam $c e$ perpendicularem ad planum $b a c$, ad hoc vt (quod vis demonstrandi exigit) recta translata in puncta b, t & alia eiusmodi sint perpendiculares ad planum suppositum; ac proinde & ad rectas $b t, b i$ ex definitione tertii vndecimi Elementorum Euclideanorum.

P R O P O S I T I O X V.

Iisdem manentibus curuæ $b u t l h m o$ intelligatur recta $b s$ æqualis, & diuisa in tot partes æquales $b d, d q, q s$ quot sunt aut intelligi possunt arcus $b t, t h, h o$ æquales; ad rectam $b s$ excitentur ex punctis d, q, s rectæ $d L, q M, s z$ æquales perpendicularibus translatis $r p, g f, c e$ figuræ $c e f p a$ (eadem verò est ratio de quacunque alia translata) & illæ omnes terminentur linea $z M L b$.

Ostendendum est figuram bsz ML expansam esse æqualem figuræ translatae in arcum butlhm o generatae ex figura quacunque genitrice cefpa.

Istud ostenditur methodo superioris; nam omnes subtensæ designatae constant rectam bP minorem ipsa bs, & omnes tangentes designatae constant rectam bR maiorem recta bs; igitur bP diuidatur in portiones æquales subtensis bt, th, ho & ex illis excitentur perpendiculares æquales ipsis dL, qM, sz, fiatque bP basis figuræ expansæ respondentis illis quæ rectis bt, th, ho insistant, ita ut illa quæ rectæ bt insitit competat illi primæ portioni rectæ bP, quæ ex recta bP abscissa, est æqualis ipsi bt, & ita in aliis fieri intelligatur. Simili pacto intelligatur bR diuidi ex ordine in partes æquales singulis tangentibus, & figuræ quæ tangentibus bi, it &c insistant, intelligantur transferri in partes baseos bR sibi ex ordine respondentes. Patet figuram insistentem minori bP esse minorem figura insistente arcubus; & figuram insistentem maiori bR esse maiorem figura insistente arcubus. Patet inquam quia quando bases bP, bR sunt inæquales & illis insistant figuræ bGCR, bVIP ita constitutæ ut perpendiculares CR, IP sint æquales, & si ad libitum agatur VG parallela basi occurrens in V limbo insistentis super minore bP; in G verò limbo insistentis super maiore bR; ductis perpendicularibus VN, GT ad bases bP, bR recta bN sit minor recta bT; ostenditur facillimè figuram maioris baseos esse maiorem figurâ minoris.

Hoc autem constituto modus demonstrandi est simillimus; ostenditur enim figura insistens arcubus neque maior, neque minor esse figura insistente basi bs; ergo est æqualis, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem manentibus (Fig. 55.) sit ac ex quadratum, sintque aA, ac æquales.

Ostendendum est lineam apfe esse rectam, nempe diametrum parallelogrammi ac ex. Expansam verò zMLbs ita esse constitutam ut si iungatur recta Lt, vel Mh, vel zo, & ita de aliis, iaceant in directum ambæ lt, tr; Mh, hg; zo, oc; & idem euenire in aliis quibuscunque.

Rectam ae esse diametrum parallelogrammi ac ex patet ex methodo duodecimæ tertij libri tetragonismicorum; nam ut Aa vel ac brachiū ad longitudinē ag, ita ex generatione quadratricis est gz vel ce ad gf: sed si ae sit recta complens triangulum ace, ut est ac ad ag, ita erit ce latus trianguli ad rectam per g parallelam ipsi ce, ut ex Elementis Euclidis patet; ergo quadratrix linea afe, est in hoc casu diameter parallelogrammi ac ex. Quoniam verò rectæ db, bt ponuntur æquales, & perpendicularis rp ponitur æqualis ei quæ insitit puncto t, eidem verò po-

nitur æqualis dL; ergo recta dL, rp sunt æquales inter se. Quoniam verò triangula arp, ace sunt similia, & latera ac, ce istius ponuntur æqualia, erunt quoque illius latera ar, rp æqualia; ergo recta dL æqualis rectæ rp, erit quoque æqualis rectæ ar: ergo cum dL, ar æquidistant & sint æquales, si iungatur Lr æquidistabit basi da, sed eidem ex constructione æquidistat rt: ergo recta Lr congruit recta rt; ergo recta Lt, tr iacent in directum; idem verò eodem pacto ostenditur in aliis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam trianguli ace quadratrix per duodecimam tertij tetragonismicorum est ceratoides parabolica acepa comprehensa sub arcu parabolæ aape. (quam tangit recta ac, & cuius axis est ax) & sub rectis ac, ce; liquet ex demonstratis, huius quadratricis mixtæ quadratricem mixtam esse ceratoidem parabolicam translatam. Quod si tertia quadratrix mixta quæreretur, transferri deberet tertia inuenta in quadrato axec, & ita procedi posset ad quartam, quintam & reliquas in eodem ordine quadratrices, quarum omnium quadratura habetur ex quadragesima quarta sequente.

DEFINITIONES.

Figuram genitam ex quadrato cexa & translatam in arcum but hmo appello *parallelogrammum mixtum*, & quamlibet eius portionem parallelogrammum ecgz translatam appello eodem nomine. Quadratricem acef pari methodo translatam voco quadratricem figuram *mixti parallelogrammi*, vel breuius *quadratricem mixtam*, vel etiam *superficiem ungularem aut cuneatam*. Figuram verò zMLbs in quam expanditur, *quadratricem expansam* nomino.

PROPOSITIO XVII.

Isdem manentibus (Fig. 55.) si vt est parallelogrammum mixtum ad quadratricem mixtam ita fiat brachium Aa ad rectam aO abscissam ex ac, & per O agatur planum parallelum plano xab, itemque aliud per perpendicularis ax bisectionem quod æquidistet plano supposito bac.

Ostendendum est grauitatis centrum parallelogrammi mixti esse in recta quæ est communis sectio duorum istorum planorum iam ductorum: grauitatis verò curuæ lineæ quæ est latus parallelogrammi suspensi esse in recta OX parallelâ ad rectam ab, & in eo eius puncto in quod cadit perpendicularis demissa ex grauitatis centro parallelogrammi mixti.

Quoniam ex decima quinta propositione, parallelogrammi mixti quadratrix est illa figura quam quadratricem mixtam appellamus, patet ex

lege libræ reciproca ut est suspensum, nempe parallelogrammum, ad quadratricem illi respondentem, ita esse brachium Aa , ad rectam aO . Igitur planum per O ductum æquidistans perpendiculari plano xab transit per gravitatis centrum parallelogrammi mixti; atqui planum plano supposito parallelum transit per gravitatis centrum superficiei: id enim ostenditur simili methodo qua à Commandino & aliis monstratur centrum gravitatis cylindri vel cylindracei cuiuslibet esse in plano distante æquo intervallo utrinque à basibus oppositis eiusdem: ergo &c. quod erat unum ex demonstrandis.

Rursus sicut in cylindro & cylindraceo quovis omnes sectiones basi parallelæ sunt similes & æquales, ut demonstratum extat apud Serenum pro cylindro, & ratio eadem convincit pro quibuslibet cylindraceis, ita manifestum est omnes parallelogrammi mixti sectiones esse æquales similes & parallelas basi eiusdem parallelogrammi. Item sicut in cylindro & cylindraceo recta axi parallela incedens per gravitatis centrum baseos incedere ostenditur per sectionum æqualium, similium, & parallelarum centra, ita hic recta parallela axi ax incedens per gravitatis centrum parallelogrammi mixti, incedit quoque per gravitatis centrum baseos; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si circa axem ac manentem intelligatur circumvolui linea curva $buthm$ donec ad partes oppositas congruat plano bac , & relinquere ad easdem partes sui vestigium, patet centrum gravitatis eiusmodi lineæ curvæ ita duplicatæ esse in puncto O . Quod etiam de parallelogrammo mixto pari ratione duplicati intelligi debet; nempe centrum eius esse in perpendiculari ad planum suppositum excitata ex puncto O , eiusque distantiam ab eodem puncto O esse æqualem dimidio rectæ ax vel ac .

PROPOSITIO XVIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 56.*) iungatur recta cx diameter altera quadrati vel cuiuslibet alterius rectanguli $ecax$, & ex Ac producta abscindatur recta cq æqualis rectæ ac , ut triangulum $csxa$ sit quadratrix figura rectanguli $cexa$, prout ex duodecima tertij libri liquet. Eiusmodi quadratrix $csxa$ intelligatur transferri iuxta methodum undecimæ in curvam $btho$. Recta gh æquidistet rectæ ba , & incedat per gravitatis centrum curvæ $btho$.

Ostendendum est sicut est quadratrix mixta brachij qc ad quadratricem mixtam brachij aA , ita esse rectam cg ad rectam ga .

Istud apertum est ex septima secundi tetragonismicorum, & ex superiore. Nam ex ista habemus si planum parallelum plano xab incedens per centrum gravitatis parallelogrammi mixti faciat in supposito plano sectionem gh , quæ ex Elementis Euclideis æquidistabit rectæ ab , in eiusmodi

modi recta gh esse grauitatis centrum curuæ $btho$; ex illa verò habemus vt est quadratrix mixta brachij aA ad parallelogrammum mixtum, ita esse rectam ag ad Aa vel qc ; & vt mixtum illud parallelogrammum ad quadratricem brachij qc , ita esse eandem qc ad cg : ergo ex æquo vt est quadratrix mixta brachij aA ad quadratricem mixtam brachij cq , ita est recta ag ad gc ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex nonâ secundi tetragonismicorum patet duas simul quadratrices mixtas esse æquales parallelogrammo mixto. Quòd si libræ brachium non sumeretur æquale rectæ ac , sed inæquale vt aT ; & ipsi aT æquale cD ; vt est recta ca ad aT , ita esse patet duas simul quadratrices illis respondententes ad parallelogrammum mixtum.

COROLLARIUM II.

Intelligatur eidem curuæ insistere parallelogrammum mixtum respondens parallelogrammo rectilineo $ecax$ ad positionem plani xab , & cea triangulum transferri simili pacto in curuam bho , eiusque dimetientem respondentem curuæ puncto cuilibet h esse rectam Ph æqualem & parallelam rectæ gi . Intelligatur præterea triangulum aliud abB erigi super planum bac & ad illud stare rectum; angulusque bAB sit æqualis angulo cae : deinde triangulū abB ita erectum intelligatur transferri in curuam bho ad positionem plani xac , eiusque dimetiens respondens puncto h sit hN æqualis & parallela rectæ lM . Intelligatur denique brachio Aa perpendicularo ab gigni quadratrix trianguli abB translati in curuam bth : brachio verò an latere quadrati $AanE$, gigni quadratrix trianguli ace translati in curuam bth . Ex demonstrata methodo ostenduntur duæ istæ quadratrices translatae esse vna & eadem. Quoniam la , lM sunt æquales, itemque lM , hN , patet rectas la , hN esse æquales; eademque de causa rectas ag , hP . Quoniam igitur ex generatione quadratricis vt aA brachium æquale brachio an ad longitudinem ag , ita est hN vel la ad ah dimetientem quadratricis secundæ mixtæ respondentis triangulo baB translato; rectangulum contentum sub aA & sub hA erit æquale rectangulo sub mediis ag , hN : sed recta hN est æqualis rectæ la vel hg : ergo rectangulum contentum sub aA & hA rectis est æquale rectangulo agh vel alh . Rursus quoniam vt na brachium ad al longitudinem, ita est hP vel ag ad dimetientem quadratricis respondentis triangulo cae translato; ergo rectangulum sub extremis erit æquale rectangulo sub mediis, hoc est rectangulo lag : sed eidem lag æquale ostendimus rectangulum contentum sub hA & sub aA vel an ; ergo rectangulum sub an & sub dimetiente illius quadratricis est æquale rectangulo sub an vel aA & sub hA contento. Ergo triangulorum translatorum in curuam bho quadratrix est vna & eadem, si quadratrices gignantur brachiis præscriptis. Vnde patet proprietatem in vigesima tertij libri de-

monstratam habere locum in istis triangulorum ita translatorum quadratricibus.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus (*Fig. 56.*) in plano xab intelligatur descripta curva bfm ita respondens curvæ bho ut si in recta ba sumatur quodcunque punctum l , & per l ducantur hl , lf parallelæ rectis ac , ax , occurrentes limbis bto , bfm in h , & f ; ipsæ lh , lf sint inter se æquales. Per m ducatur my parallela rectæ ax , & constructo quadrato $AanE$, bn libræ suspensæ ex a perpendicularo ax , brachio an , figuræ bfm quadratrix bpl ita respondeat, ut sicut est brachium an ad al quamcunque portionem rectæ ab , ita sit fl dimetiens figuræ bfm y ad lp dimetientem quadratricis bpl .

Ostendendum est ex figurâ bfm y generatrice, ad positionem plani xac generari in superficie cylindracea insistente super curvâ $btho$, figuram eandem quæ ex translatione trianguli ace ad positionem plani xab : ac proinde quadratricem bpl translatam, esse quadratricem quadratricis mixtæ, posita recta aA axe libræ planæ, perpendicularo plano xaA , sustentaculo nE .

Quoniam perpendicularis insistent puncto h est æqualis rectæ gi , ipsa verò gi rectæ ga , perpendicularis insistent puncto h erit æqualis rectæ hl , ac proinde & rectæ lf : ergo figura bfm y translata generat quadratricem mixtam, quod erat primò demonstrandum. Alterum verò ex isto sequitur posita veritate propositionis decimæ quartæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Si curva bho intelligatur una cum plano ohb a circumvolui circa axem ba , superficies peripherica quam describet, talis (ut patet) est ut si fecetur plano ad planum xac parallelo ducto per l quodlibet punctum rectæ ab , eius sectio sit peripheria circuli descripti semidiametro lf , centro l . Cum igitur peripheriæ inter se sint ut semidiametri, planum parallelum plano xac ductum per centrum quadratricis mixtæ, transibit ut patet per centrum periphericæ superficiæ: si igitur ut quadratrix mixta ad quadratricem bpl translatam, ita fiat brachium na ad rectam al , in plano flh erit gravitatis centrum tam quadratricis mixtæ, quam periphericæ superficiæ.

COROLLARIUM II.

Quoniam quadratrix mixta genita brachio Aa , perpendicularo ab , representat superficiem periphericam genitam circa axem ba motu arcus bho : id est, ad positionem rectæ ac , secantur proportionaliter quadratrix illa mixta & superficies peripherica; & quoniam in circuli quadrante ista quadratrix mixta est involutum cunei primi noti vel vngulæ, re-

At Gregorius à S. Vincentio libri noni propositione septuagesima sexta contendit *in omnibus superficiem vngularem conuenire cum sphericâ*; quod utique generale est pro omnibus quadratricibus mixtis, ut iam annotauimus; illæ enim perinde sunt vngulares comparatæ ad suum cylindraceum à quo abscinduntur per planum ad basim cylindracei ipsius inclinatum.

PROPOSITIO XX.

ESto $b h c a$ (*Fig. 57.*) quadrans circularis, ex quo genita sit parua semicycloideos pars superior $c r p a$, habens basim ap , axem ac ; arcui $b h c$ insitit parallelogrammum mixtum $e c h b l m$, eiusque quadratrix mixta $b i e c h$.

Ostendendum est istam quadratricem esse æqualem figuræ $c r p a$, ita ut si sumatur quodlibet parallelogrammum $m h c e$, & per h ducatur $h r$ parallela basi $b a$, occurrens limbo $c r p$ in r , & per r ducatur $r s$ parallela rectæ $a c$, occurrens basi in s , quadratrix $i h c e$ sit æqualis figuræ $a c r s$; & quadratrix $b i h$, figuræ $r s p$.

Istud patet ex corollario decimæ quintæ secundi libri; ibi enim ostendimus ex triangulo rectangulo $a c e$ translato gigni superficiem $b i e c h$ cunei primi notæ: atqui illa superficies est quadratrix mixta ex definitionibus decimæ sextæ: superficiem autem istam esse æqualem semicycloidem superiorem liquet ex secundi libri octaua, id quoque generaliter constat ex decima sexta præsentis libri: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam decima sexta præsentis libri modò laudata id generaliter demonstrat quæcunque curua sit basis rectanguli mixti, & quadratricis ipsius, patet circa istud nihil affirmari incautè, quamuis res sit plena periculi ut monuimus in illius octauæ corollario. Ex nona verò eiusdem apertum est completo rectangulo $r h z s$, portionem $b i h$ æqualem esse rectangulo $a b z$, & portionem $i h c e$ rectangulo $b a z$.

PROPOSITIO XXI.

Iisdem manentibus (*Fig. 57.*) peripheriæ $b c u$ semicirculari insitit parallelogrammum mixtum $b l e f d u c$, sit $a n$ dupla secundi termini progressionis subadiunctæ, quam initio tertij libri definiuimus.

Ostendendum est punctum n esse gravitatis cætrum peripheriæ $b c u$, siue quod idem est ex decima septimâ, planum per n incedens parallelum plano $x a b$ transire per gravitatis cætrum parallelogrammi mixti $b l e f d u c$. Rectam verò $a c$ ad $a n$ esse, ut arcum $c h b$ ad radium $c a$.

Quoniam quadratrix $b i e u$, vel bis figura $a c r p$ per nonam secundi, vel duodecimam primi, est æqualis duplo radij $a c$ vel $a A$, suspensum autem parallelogrammum mixtum $b l m e f d u c$, est ut ex tertia primi li-

quet, æquale circulo, semidiametro $a c$ descripto: igitur suspensum ad æquiponderans est vt terminus secundus progressionis perspectæ ad duplum termini primi. Rursus ex lege reciproca libræ vt est suspensum ad æquiponderans, ita est libræ brachium $A a$ ad longitudinem $a n$; ergo cum $a A$ radius sit primus subadiunctæ progressionis, erit recta $a n$ dupla secundi termini eiusdem subadiunctæ, quod erat demonstrandum primo loco.

Alterum verò ita ostenditur; quoniam $c a$ est primus terminus subadiunctæ progressionis, & $a n$ est bis secundus; vt autem primus subadiunctæ ad bis secundum, ita est secundus adiunctæ (vt ex earum definitione patet initio tertij traditâ) ad bis primum, ita quoque erit dimidium adiunctæ ad primum. Atqui secundus adiunctæ est peripheria $b c u$; ergo dimidium illius erit $b h c$ quadrans totius circularis: ergo vt $c a$ recta ad $a n$, ita $c h b$ quadrans peripheriæ descriptæ centro a , semidiametro $a c$, se habet ad rectam $c a$; tres ergo lineæ $c h a$, $c a$, $a n$ sunt proportionales, & vt $c h b$ ad $c a$, ita est $c a$ ad $a n$, quod demonstrandum supererat.

COROLLARIUM I.

Si vt latus quadrati ad diametrum eiusdem, ita fiat recta $a n$ dupla secundi subadiunctæ termini ad $a o$, ex methodo præsentis ostendetur punctum o esse grauitatis centrum curuæ $h c r$, posito quod $c a$ ad $a g$ sit potestate vt binarius ad vnitatem. Atque hac methodo inuenientur centra grauitatis quorumcunque arcuum, eorumque distantia à puncto a definitur per secundum terminum subadiunctæ progressionis, vel per rectam illi secundo termino proportionalem in ratione cognitâ.

COROLLARIUM II.

Subtilissimum Guldini nostri inuentum, quod omnes suspiciunt & sequuntur, hic præteriri non debet, vt ex eo & confirmemus nostras demonstrationes, & inueniamus centra grauitatis pro sectoribus circuli methodo diuersa ab ea quam in elementis nostris tradidimus, & qua vsi sumus in calculo problematum Anonymi edito sub ipsum huius anni 1659. initium. Esto igitur n centrum grauitatis arcus $b c u$ semicirculi, vel etiam cuiuscunque alterius peripheriæ $h c R$ subtensæ recta $h R$ ad radium $a c$ ordinatim vtrunque applicatâ. Ostendit ille primus si vt ternarius ad binarium ita fiat recta $a n$ ad $a g$, punctum g esse centrum sectoris comprehensî sub illo arcu, & sub semidiametris $a h$, $a R$. Inde verò patet ex grauitatis centro n arcus circularis cuiuscunque haberi centrum grauitatis circuli sectoris eidem arcui respondentis; si enim vt ternarius ad binarium, ita fiat $n a$ ad $a g$; erit g centrum sectoris. Hinc etiam ostenditur consonantia nostrarum & Guldinianarum demonstrationum: nam si n sit grauitatis centrû peripheriæ totius $b c u$; cum $a n$ sit bis terminus secundus subadiunctæ progressionis, vel sex trientes termini eiusdem secundi; vt ternarius ad binarium, ita erunt sex trientes, ad quatuor trientes centri grauitatis pro semicirculo distantia à centro a est quatuor trientes

secundi termini subadiunctæ, quos illi attribuimus in illo calculo: ergo nunc demonstrata consonant & principiis nostris in illo calculo adhibitis, & demonstratis Guldinianis.

COROLLARIUM III.

Cum per methodum à nobis demonstratam ex hoc Guldini inuento habeatur planum parallelum plano xab incedens per centrum parallelogrammi mixti $blmefduc$, & inuento isto plano habeatur quadratrix mixta, ipsaque quadratrix mixta sit æqualis figuræ $crpa$; ex inuento illo Guldini per demonstrata nostra perueniemus ad quadraturam figuræ $crpa$, quam in duodecima primi libri editi anno superiore statim post quàm Anonymus proposuit sua problemata, demonstrauius esse æqualem quadrato radij ca ; poteritque idem Guldinus dici primus inuentor huius quadraturæ, si is dici iure debeat primus inuenisse aliquid, qui excogitauit id vnde alij postea illud intulerunt, aut viderunt posse inferri, quamuis aliunde illud ipsum iam inuenissent. Sed hoc quis dicat nisi qui profusior esse velit in Anteriores Scriptores, & parciore in Posteriores. ~~occurrens limbo odr in puncto d : compleatur parallelogrammum ldt , $lhga$.~~

PROPOSITIO XXII.

Reuocato schemate propositionis decimæ octauæ (*Fig. 58.*) arcus bho sit quadrans peripheriæ circuli semidiametro ae , vel ao , vel ab descripti & motu illius circa manentem ba descripta sit superficies sphærica. Esto ao superior pars semicycloideos paruæ respondens quadranti circulari bho ; eius basis ar bifariam secta esto in m , & ex m excitata ad basim perpendicularis my æqualis dimidio radij ao ; sitque ay superior pars superier cycloideos paruæ genitæ circulo cuius centrum m , semidiameter my . In recta ba sumptum sit quodlibet punctum l , & per illud ductum planum flh secans superficiem sphæricam in duas partes externam, & internam adiacentem centro a : per h ducta sit hd parallela rectæ ba , occurrens limbo odr , in puncto d : compleatur parallelogrammum ldt , $lhga$.

Ostendendum est ut quadratum radij ae ad spatium tsr cognitum, per nonam libri secundi, ita esse radium an vel ab ad rectam qua centrum grauitatis, respondens externæ parti eiusdem sphæricæ superficiei, distat a centro a . Et ut idem quadratum ad figuram ats rectilineo noto æqualem, ita esse radium eundem ad rectam qua centrum partis internæ distat a centro a . Demumque centrum grauitatis respondens toti superfici ei hemisphæricæ bifariam secare radium ba . Quod si respondeat superfici ei illi internæ quæ est inter radium ao & parallelam ipsi, incedentem per bisectionem radij ab , bifariam quoque secare portionem illam radij ab .

Ex centro a in plano xab descriptus sit quadrans circularis $bfxa$, & eius quadratrix $bpxa$ respondens brachio an , vt in decima nona superiore præscripsimus. Ista itaque quadratrix translata ad positionem plani xao in superficiem cylindricam insistentem arcui bho , erit quadratrix quadratricis mixtæ insistentis eidem arcui bho , vt ibidem ostendimus: ac proinde, vt quadratrix mixta (siue figura $aodr$ vel tota pro toto arcu, vel ex parte sumpta, pro partibus arcus, ita vt arcui bh respondeat drt , & arcui ho conueniat figura $odta$) se habet ad suam quadratricem, ita erit radius an ad distantiam centri quæsitæ. Superest igitur vt ostendamus figuram bpl translata, esse æqualem figuræ tsr , & figuram $lpxa$ figuræ $ayst$; ideóque totam $bpxa$, toti $ayst$; ipsamque $ayst$ esse æqualem dimidio quadrati ab vel an .

Completo parallelogrammo $arqa$, intelligatur figura $aiqr$ subcontraria figuræ $odra$, vt in primæ propositionis secundi libri schemate: igitur ex septima secundi rectangulo itd æquale est rectangulum contentum sub radio & sub ts : sed rectæ lh æqualis est dt , rectæ verò hg vel la æqualis est ti ex tertia secundi: ergo rectangulum sub radio an & sub ts , est æquale rectangulo alf : sed vt na brachium ad al , ita est lf ad lp ex generatione quadratricis $bpxa$; ergo rectangulo alf æquale est rectangulum sub radio an & sub recta lp : ergo rectæ lp , ts sunt æquales; ac proinde quadratrix $bpxa$ translata expanditur in figuram $ayst$, & portio bpl æqualis est figuræ tsr ; portioque $lpxa$ figuræ $ayst$. Quoniam verò ex duodecima primi figura $myst$ est æqualis quadrato my , quod est quadrans quadrati ab , tota $ayrm$ erit æqualis dimidio quadrati ab ; ergo vt $odra$ siue quadratum ab , ad $ayrm$ siue ad dimidium sui, ita radius ba ad sui dimidium, in quo proinde est grauitatis centrum pro tota superficie hemisphærica. Similiter quoniam quando l bifariam secat rectam ba , punctum t congruit puncto m , spatium ast vel aym erit quadrans quadrati ba ; vt ergo quadratum ba ad sui quadrantem, ita est recta ba ad interuallum centri à puncto a : ergo cum la ponatur esse duo quadrantes rectæ ba , & distantia illa ostensa iam sit esse quadrans, bifariam secatur à centro grauitatis. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Cum Guldinus ostenderit centrum totius hemisphæricæ esse in bisectione radij; inde confirmari nostram methodum liquet. Ita pariter cum in tetragonismicorum elementorū tertio libro ostenderimus centra grauitatis solidorum comprehensorum superficie sphærica; inde eruemus centra grauitatis superficieum ad sphæram attinentium, nihil discrepantia ab inuentis modò: vel etiam ex istis extrahemus vicissim illa. Nam Dettonuillæus in Opusculo Gallico *de solidis circularibus* assumit extendi posse theorema Guldini ad solida, ita vt solidum genitum circumductu sectoris circuli circa rectam ex centro, habeat centrum grauitatis distans

à centro sphære interuallo quod ad interuallum centri superficiæ descri-
ptæ motu illius, arcus sit vt ternarius ad quaternarium, quæ est ratio
quam habet in cono distantia centri grauitatis à vertice, ad distantiam
grauitatis centri baseos ab eodem vertice. Quod recte congruit demon-
stratis: nam totius hemisphærij centrum ita diuidit radium, vt sicut 8. ad
3. ita sit radius ad distantiam centri sphære à centro hemisphærij: ergo
cùm distantia centri superficiæ sit ad istam vt quaternarius ad ternarium;
distantia centri superficiæ hemisphæricæ erit ad radium vt 4. ad 8. vel vt
1. ad 2. Hæc ipsa concordia elucescit in aliis exemplis, vt calculatori rem
experienti patebit. Sed illa extensio in sectoribus ellipseos vel hyperbo-
læ non habet locum.

PROPOSITIO XXIII.

Idem manentibus vt in vigesima (*Fig. 57.*) superficies cylindrica
duplicis cunei, vel vt alij loquuntur vngulæ sphæricæ, quarum
vna b i e u insistat peripheriæ b h c R u, supra planum suppositum b
a c, altera eidem peripheriæ insistat ad partes oppositas, habet cen-
trum grauitatis in puncto n, ita vt n a recta æquet dimidium arcus b
h c. Si autem non consideretur nisi vnicus cuneus superior, illius
centrum est in perpendiculari ad planum b a c excitatâ ex puncto n,
diſtatque à puncto n, rectâ æquante dimidium eiusdem rectæ an, vel
quadrantem arcus b h c.

Completo parallelogrammo a p B A, intelligatur semicycloides par-
ua A a p t genita circulo cuius diameter sit a A, ita vt a p basis æquet se-
miperipheriam totius circuli genitoris. Ducta sit quæcunque h i perpen-
dicularis ad planum suppositum occurrens in i limbo b i e semicunei b i e
c h: per h ducta sit recta h r parallela rectæ b a occurrens limbo c r p in r;
per r ducta sit r s parallela rectæ c a occurrens lineis a p, A t p, A B in s, t,
q. Intelligatur b D A a parabola cuius axis A a, vertex A, ordinatim ap-
plicata a b; per h ducatur h z æquidistans axi a A, occurrens lineis b D A,
A F in D, E: igitur per tertiam tertij tetr. gonismicorū tres rectæ E z, z h, z
D sunt proportionales. Quoniam verò per vndecimam tertij libri supe-
rioris tres rectæ q s, s r, vel h i & s t sunt proportionales; sunt autem æ-
quales h z, r s, item q s, E z: ergo rectæ s t, z D sunt æquales: ergo si
parabola b D A a z intelligatur ad positionem plani x a c transferri in su-
perficiem cunei, & insistere arcui b h c ita vt translata sit b H e c h, ex-
panderetur in figuram A a p t, vt ex decima quinta patet; eritque portio
b H h æqualis portioni s p t, & portio reliqua h H e c reliquæ portioni
a s t A, totâque proinde a H e c h, tori a s p t A.

Quoniam igitur vt E z vel brachium A a ad z h, vel ad a g, ita h i æ-
qualis rectæ g y ad h H; & ita est g y dimetiens trianguli rectilinei a r e
parallela lateri c e ad P g dimetientem quadratricis; erit ergo b H e c h

quadratrix translata genita ex triangulo $e c a$, generatore superficiei cunealis $b i e c h$: ergo per decimam quartam semicunealis figuræ $b i e c h$ quadratrix est $b H e c h$ libræ planæ axe $b a$, sustentaculo $A F$. Cum igitur, ut patet ex vndecimæ tertij libri calculis, figura $A a s p t$ æqualis sit quadrantum circulari $b h c a$, ut est suspensum $b i e c h$, hoc est quadratum $a b$ vel primus terminus perspectæ progressionis, ad $b h c a$ quadrantem secundi termini, ita erit brachium $A a$, siue primus terminus adiunctæ progressionis, ad quadrantem secundi adiunctæ: quapropter quia secundus adiunctæ æquat arcum $b c u$, quadrans illius erit dimidium arcus $b h c$; sed ita etiam est $A a$ ad $a n$: ergo recta $a n$ æquat dimidium peripheriæ $b h c$; quod erat primum ex demonstrandis: nam cunei geminati centrum gravitatis esse in plano $b a c$ & in recta $a c$, res est manifestior quàm ut probatione egeat.

Rursus si eadem superficies semicunealis $b i e c h$ intelligatur manens ut iacet, suspendi plano $b a c$ cadente perpendiculariter ad horizontem, ita ut recta $c e$ æquidistet eidem horizonti; sustentaculum verò distet à plano $b a c$ ad partes oppositas superficiei suspensæ intervallo æquante radium $a A$, patet isti superficiei æquiponderare idem spatium quod eidem expansæ in rectam $a p$ æquiponderat axe $a p$, sustentaculo $A B$. Atqui ex quæsito secundo vigesimæ quintæ libri tertij, ut est primus terminus perspectæ ad octauam partem secundi, ita est recta $A a$ vel primus terminus adiunctæ ad centri quæsiti distantiam à plano $b a c$: ergo centri quæsiti distantia à plano $b a c$ est octava pars secundi termini adiunctæ progressionis, qui cum sit arcus $b c h$, eiusmodi distantia erit quadrans arcus $b h c$, quod secundò erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex methodo tradita liquet pari pacto inueniri centrum gravitatis geminatæ portionis $b i h$, vel $i h c$: neque tantum geminatæ sed etiam simplicis. Cæterum hoc habent superior & præsens propositio ut proximè & directè exequantur rem propositam; nec illam petant ex altero centro gravitatis prius inuenito. Recta verò $a n$ est dupla distantia centri à plano supposito $b a c$ non tantum in isto casu, sed in omni alio ut ex decima quarta primi libri colligi potest.

SCHOLIUM.

Anno proxime elapso postquam vulgavimus nostras de Cycloide viginti propositiones, res tulit ut D. Pascalius Parisiis ad nos statim miserit aliquot sua Problemata quorum solutionem à nobis flagitabat ut probare posset num sua & nostræ ratio demonstrandi in idem conspirarent. Eorum una, quod ad præsentem propositionem attinet proponebatur istis verbis dati trianguli cylindrici centrum gravitatis reperire, intelligendo per trianguli cylindrici latera, sectiones superficiei cylindricæ cum planis communes; id verò nihil est aliud quàm postulare centrum gravitatis superficiei cunealis vel integrè vel ex parte sumptæ. Respondimus si centrum eiusmodi nobis detur, repensuros nos esse absolutam circuli quadraturam, nihilque de laude quam centri illius

illius Inuentor mereretur, detractum iri. Ad hac ille responsum sua manu dedit optando vt quam facillè ipse exhibiturus esset eiusmodi centrum, tam facillè nos quadraturam inde promeremus. Cùm centri inuentionem auidi expectaremus, accepimus ab eodem literas quibus fatetur suum istud problema non procedere nisi ex data circuli quadraturâ; quod narramus tantum vt inde constet centra ista nobis iam tunc fuisse cognita: in D. Verò Pascasio nihil propterea reprehensione dignum agnoscimus. Norunt enim omnes, quotquot inuentioni rerum reconditarum vacanti, in inuentis, cum primùm ex abditis eruitur semper residere aliquid quod postea accuratioris examinis limâ ipse Inuentor proinre suo radat. Istud porrò problema & cetera quæ tunc ad nos D. Pascalius pro suis misit, in eunte postea Nouembri Anonymus (is nunc Dettonuillaum se fuisse, scripto profiteretur gallicè libro) vt sua etiam adiecit ad prima mense Iunio data, vt ita totius Europæ Geometras secundis questionibus distineret. Quæ est causa vt ex illo tempore discrimen quidem inter nomina illa agnouerimus, sed inter Dettonuillaum & Pascaliū Geometras quodnam esset non ita bene viderimus. Excidit modo nobis vnum quod antequam longius abeamus retractari debet: neque enim omnia problemata ad nos tunc missa, euulgauit postea Dettonuillaus; vnicum excepit quod ipsi facilius fortasse visum propterea fuit, quod eius solutionem nobis notam esse calculo vnius casus ipsi exhibito probauerimus: nam suis in literis difficile id esse prius affirmauerat. Istud verò ita se habebat inuenire centrum grauitatis in sectore sphæræ dato. initio quidem sectorem intelleximus illum quem Archimedes initio librorum de sphaera & cylindro appellat τομὴν σφῆρος, qui est portio quam coni recti habentis verticem in centro sphæræ, superficies abscindit ex ipsâ sphærâ; statimque rescripsimus illud non videri difficile, satisque constare ex Archimedeis & aliorum inuentis. Post hac docuit nos ille ista sectoris voce à se intelligi portionem sphæræ interceptam inter duo plana per centrum ducta & secantia se ad angulos non rectos. Noster porrò ille calculus ita se habebat.

Sint (Fig. 59.) a c b, a d b semicirculi magni sphæræ centro e prædite; per polos eiusmodi circulorum transeat circulus maior, eiusque arcus interceptus semicirculis a c b, a d b sit d f c graduum centum viginti: idem arcus d f c bifariam sectus esto in f, & iungatur recta e f. Vt est quaternarius ad ternarium ita fiat quadratum e c ad e h: vt autem 9. ad 16. ita recta e g ex e f abscissa, sit ad e h. Dico punctum g esse grauitatis centrum sectoris a m d b c l.

Addidimus in eadem responsione si figura proposita a c b d intelligatur secari plano i l m parallelo ad planum e c d, constare nobis methodum inueniendi grauitatis centrum partium seorsum sumptiarum, datâ circuli quadraturâ: idque nobis videri difficilius problemate proposito.

Posita extensione Guldiniani illius principij cuius meminimus in corollario vigesima secunda propositionis, patet si vt ternarius ad quaternarium ita fiat e g recta ad e n, punctum n esse grauitatis centrum superficiei sphaericæ a l c b d m.

DE CYCLOIDE
PROPOSITIO XXIV.

EX centro a (*Fig. 60.*) descriptus sit quadrans circularis dua , & ex radio ta intelligatur abscissa recta ab æqualis arcui du , ut sit basis parvæ semicycloideos superioris bcd a habentis generatorem circulum centri a , & diametri dal . Completo parallelogrammo $balg$ intelligatur bfl a figura ex sinibus versis definita in decimæ tertiæ secundi corollario secundo, & usurpata in undecima libri tertij. Esto $gpql$ figura subcontraria figuræ bcd a iuxta explicationem primæ secundi libri.

Ostendendum est figuram $bflg$ esse figuram ex sinibus versis respondentem semicycloideos parvæ parti superiori $gpql$.

Quoniam rectæ ce , iq parallelæ ad rectam da sunt per tertiam primi æquales sinibus zu , az , & quadrata rectarum zu , az sunt æqualia quadrato au vel al , erunt quadrata rectarum ec , iq æqualia simul quadrato al vel ei : sed quadratum ce est ex decimâ tertiâ secundi libri æquale rectangulo ief , quadratum verò ei est æquale rectangulis ief , eif ; ergo quadratum iq est æquale rectangulo eif ; & tres rectæ ei , iq , if sunt proportionales, ergo figura $bflg$ respectu figuræ $gpql$ est illa quam ex sinibus versis appellauimus in corollario secundo decimæ tertiæ secundi, prout erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

Iisdem positis ex puncto e utcumque sumpto in basi ba (*Fig. 60.*) intelligatur excitari recta ex perpendicularis ad planum bad , æqualis radio at , & completo parallelogrammo $daceB$, ex centro e intervallo rectæ ex vel eB , intelligatur descriptus quadrans circularis $Bsxe$; ex puncto c intelligatur erigi recta cs parallela rectæ ex occurrens peripheriæ Bsx in s , & compleatur parallelogrammum $Bsfe$. Idem verò intelligatur factum in singulis punctis rectæ ba , ut inde existant duo solida quorum vnum sit quadrans cylindri cuius axis ba , basis similis æqualis & similiter posita circulo centri e , semidiametri eB vel ex ; alterum verò solidum sit illud cuius sectio est parallelogrammum $ecfr$ in cylindri quadrante inclusum.

Ostendendum est libræ planæ axe ba , perpendicularo plano xeb , sustentaculo lg , æquiponderans solido illi incluso ad positionem plani xei , esse cognitum datâ quadraturâ circuli.

Quoniam tres rectæ ei , ec , ef sunt proportionales, ut est ei ad dimidium rectæ ec , ita erit tota ec , ad dimidium rectæ ef ; ergo si dimidium rectæ ef aptetur puncto i ad positionem rectæ al : æquiponderans rectæ ec , librâ grammicâ ic suspensâ ex e , perpendicularo ex , brachio ei , erit di-

midium rectę e f aptatum puncto i; ergo parallelogrammo e c f r vt iacet manenti æquiponderans erit rectangulum contentum sub dimidio rectę e f, & sub recta c s. Quoniam verò quadrans circularis e B f x est similis & æqualis quadranti circulari a d u t, & rectę e c, a y sunt æquales, erunt quoque c s, y u vel a z æquales; sed y u, i q sunt, vt in superiore ostendimus, æquales: ergo rectę q i, c s sunt æquales, & rectangulum sub q i & sub dimidio rectę e f comprehensum, si aptetur puncto i, ad positionem plani x e B æquiponderat rectangulo e c f r: ac proinde ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum solidum aptatum sustentaculo g l, cuius sectio est rectangulum contentum sub recta q i & sub dimidio rectę e f, æquiponderat solido cuius sectio est parallelogrammum e c f r.

Restat vt ostendamus solidum cuius sectio est parallelogrammū comprehensum sub recta q i & sub recta e f, esse parallelepipedo cognito æquale, supposita quadratura circuli: id verò ita ostenditur. Cylindraceum altitudinis e x vel e i baseos g i l q p est notum, cum basis g i l q p quadretur per nonam secundi libri: cum ergo cylindraceum istud diuidatur in duo dicylindracea quorum vnum ad positionem plani x e i gignitur ex figura g i l q p & ex figura sinuum b f l i g, quę ipsi responderet; alterum ex eadem figura g i l q p & ex figura b f l a e: si ex cylindræo altitudinis e x, baseos g i l q p cognito, auferatur dicylindraceum genitum ex figura g i l q p & ex figura b f l i g, relinquetur dicylindraceum genitum ex figura b f l a e & ex figura g i l q p, cuius dimidium quærimus.

Intelligatur figura g i l m p ita descripta, vt sicut est recta e i ad i q, ita sit recta i f ad i m; ac proinde ita vt quatuor rectę e i, i q, i f, i m sint continuę proportionales. Figuram istam dimetientis i m appellauimus in corollario secundo propositionis octauę libri tertij, *quartum gradum*; figuram dimetientis f i, *tertium*; figuram dimetientis q i *secundum*; & parallelogrammum altitudinis i e *primum*. Intelligatur circa manentem g l circumuolui figura g p q l, & consideretur solidi ita geniti quadrans insistens basi g p q l. Intelligatur quoque dicylindraceum genitum ad positionem plani x e B ex ipsa figura g p q l, ita vt eius sectio in eodem plano x e c posita, sit quadratum F i q G insistens super latere q i. Æquiponderans solidi peripherici quadranti axe g l, perpendicularo plano F i g, sustentaculo b a inuentum est in tertio libro, & computatum pro tota figura g l q p extat in quæsito septimo propositionis vigesimę quintę tertij libri, pro partibus verò obtinetur ex decima nona propositione eiusdem tertij, posita circuli quadraturā. Quoniam verò ex sexta tertij tres semisses æquiponderantis quadranti peripherici sunt æquiponderans dicylindræo sectionis quadratę F i q G, patet notum esse æquiponderans dicylindræo isti. Demum verò quia ex corollario quarto octauę tertij si istud æquiponderans reducatur ad cylindræum altitudinis e x, basis est dimidium quarti gradus, patet triplum cylindræi æquiponderantis qua-

dranti illi, & habentis altitudinem $e x$, habere pro basi quantum gradum.

Quoniam igitur notus est quartus gradus, & cylindraceum sectionis $e i m$ est æquale dicylindraco sectionis $q i f$, sicuti & ipsæ sectiones sunt æquales, nam $e i m$ comprehenditur sub prima & quarta quatuor proportionalium, & $q i f$ sub secunda & tertia: ergo cylindraceum altitudinis $i e$ cuius basis sit quartus gradus iam inuentus æquat dicylindraco sectionis $q i f$ quæsitum: igitur cylindraceum altitudinis $i e$, cuius basis sit quartus gradus modo repertus æquat dicylindraco cuius sectio est reſt angulum contentum sub recta $q i$ & sub recta $i f$, & est cognitum, datâ quadraturâ circuli. Igitur si istud dematur de cylindraco altitudinis $e i$, baseos æquantis trientem quadrati $a l$, relinquetur cylindraceum quæsitum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

Ostendendum est iisdem manentibus (*Fig. 60.*) dicylindraco sectionis $c f r e$ integro, id est cuius basis sit integra figura $b c d a$, æquiponderans axe $b a$ perpendiculari plano $x e b$, sustentaculo $g l$ esse æquale cylindraco altitudinis $e x$ vel $a d$, cuius basis æqualis sit sextanti quadrati $a d$ vel $a l$, vel $e x$; sunt enim ex constructione istæ omnes rectæ inter se æquales.

Quoniam ex parte secunda decimæ nonæ propositionis tertij libri dimidio conoidis circa manentem $g l$ geniti motu figuræ $g p q l i$ æquiponderans axe $g l$, perpendiculari plano $F i g$, sustentaculo $b a$, est cylindraceum altitudinis $e x$, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati $a d$, quadranti eiusdem conoidis insistenti super basi $g p q l$ æquiponderabit cylindraceum altitudinis $e x$ vel $a d$, baseos æquantis duas nouenas quadrati $a d$: ergo cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis trientem quadrati $a l$ vel $a d$, est æquale spatio quod æquiponderat solido sectionis quadratæ $F i q G$ insistenti super tota figura $g p q l$; ergo dimidium quarti gradus $g i l m p$ est ex superioris præscripto ille idem triens quadrati $a l$: ergo dicylindraco genitum ex figura $g p q l$ & ex portione $g i l f b$, est æquale cylindraco altitudinis $e x$, baseos æquantis bessem quadrati $a d$.

Quoniam igitur cylindraceum baseos $g p q l i$, altitudinis $e x$, est æquale (ut ex nona secundi liquet) cylindraco altitudinis $a d$, baseos æquantis quadratum $a d$ vel $e i$; si ex isto dematur cylindraceum æquale dicylindraco genito ex figuris $p q l g$, $b f l g$, residuum fiet cylindraceum altitudinis $a l$, baseos æquantis trientem quadrati $a d$: igitur ex superioris demonstratione patet, dicylindraco genitum ex figuris $g p q l i$, $b f l a e$ esse æquale cylindraco altitudinis $a d$, baseos æquantis trientem quadrati $a d$, & istius dimidium nempe cylindraceum altitudinis $e x$, baseos æquantis sextantem quadrati $a d$, æquale esse spatio quod æqui-

ponderat solido sectionis cfr , axe ba , perpendicularo plano xeb , sustentaculo gl , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex corollario quintę tertij patet æquiponderans solido cuius sectio sit triangulum esc , quod comprehenditur sub parallelogrammi $ecfr$, lateribus ec , cs & sub eiusdem parallelogrammi diametro es , esse bessem æquiponderantis solido cuius sectio est ipsum parallelogrammum: igitur solido sectionis triangularis ecs æquiponderans est cylindraceum altitudinis ex , baseos æquantis nouenam partem quadrati ad .

COROLLARIUM II.

Si in plano $duta$ generetur quadratrix $atdy$ respondens ita quadranti circulari $duta$, vt libra grammicā ld suspensā ex a perpendicularo at , brachio al , sicut la ad a y quacunque portionem rectę ad , ita yu , parallela perpendicularo at & dimetiens quadrantis $duta$, sit ad yT dimetientem quadratricis, patet ad positionem plani Pab notum esse dicylindraceum genitum ex quadratrice atd & ex figura dcb ; nempe cylindraceum altitudinis ad vel al , baseos æquantis sextantem quadrati ad . Pro aliis verò casibus (vt si non sumeretur nisi dicylindraceum genitum ex partibus dcy , dTy) inueniri oporteret per præcedentem, spatium æquiponderans portioni cylindri insistenti super basi eda , & inde deducendum spatium æquiponderans portioni cylindri eiusdem insistenti super parallelogrammo cya , quod est inuentu facillimum ex vigesimę sextę quarti tetragonismicorum methodo.

PROPOSITIO XXVII.

MAneat (*Fig. 61.*) vt in superiore figura dcb , & quadrans circularis $duta$, parallelogrammumque $algb$. Esto dmn limbus partis superioris semicycloideos magnę, ita vt ad positionem rectę ab dimetientes mc , yu sint æquales, vt in prima primi libri ostendimus. Intelligatur ex centro a excitari ad planum b ad perpendicularis ap , æqualis radio ad vel at . Ad positionem plani pab intelligatur dicylindraceum genitum ex figuris bcd , $duta$ vel $dmbc$.

Ostendendum est librę planę axe ba , perpendicularo plano pab , sustentaculo lg , æquiponderans isti dicylindræo esse cognitum, si, vbi opus fuerit, cognita sit quadratura circuli.

Quoniam quadratum ym continet ex Euclidis elementis bis rectangulum mcy , & semel quadrata mc , $c y$; si habeantur æquiponderantia solidis quorum sectiones parallelę plano pab sunt quadrata my , mc , $c y$, & ex æquiponderante solido quadrati my auferantur æquiponderantia solidorum quorum sectiones sunt quadrata mc , $c y$, relinquetur (vt patet) duplum æquiponderantis solido, cuius sectio est rectangulum mcy ,

vel uy c. Vt est quadratum circulo circumscriptum ad ipsum circulum, ita ponatur recta a p ad a r.

Peripherico igitur genito motu figuræ $d m n a$ circa rectam $a d$, librę planę axe $b a$, sustentaculo $l g$, equiponderans, per decimam sextam quarti & per corollarium tertium decimę nonę eiusdem libri, est cylindraceum altitudinis $a r$, baseos æquantis quadrantem quadrati ab , auctum triente circuli genitoris semidiametro $d a$ descripti, & imminutum quatuor nouenis quadrati $a d$: ergo per demonstrata in decima nona primi, si loco peripherici ponatur dicylindraceum cuius sectio est quadratum $m y$, equiponderans erit eiusdem baseos, sed altitudinis $a p$ vel $a d$.

Similiter peripherico genito motu figurę $d c b a$ circa rectam $a d$, ex corollario vndecimę tertij & ex corollario tertio decimę nonę, equiponderat iisdem positis cylindraceum altitudinis $a r$, baseos æquantis quadrantem quadrati ab , imminutum quadrante quadrati $a d$: ergo si loco peripherici ponatur dicylindraceum, cuius sectio est quadratum $m y$, basis erit eadem, sed altitudo $a p$, vel $a d$.

Præterea quoniam dicylindraceum genitum ex figura $d u t a$, ad positionem plani $p a t$ est *homœosphericum* definitum in corollario tertio decimę quartę quarti tetragonismicorum, planum parallelum plano $p a t$, incedens per grauitatis centrum, ita diuidit rectam $d a$ in y , vt sicut octonarius ad ternarium, ita sit $d a$ vel $a l$ ad $a y$, vt ibidem ostendimus: ex decima verò octaua eiusdem libri constat eiusmodi homœosphericum esse bessem parallelepipedum, cuius basis sit quadratum $a c$ vel $a d$, & altitudo æqualis ipsi $a t$. Vt igitur $l a$ recta ad $a y$ rectam, hoc est vt octonarius ad ternarium, ita est suspensum homœosphericum, vel duo trientes parallelepipedum iam dicti, ad quadrantem eiusdem parallelepipedum: ergo equiponderans eiusmodi homœospherico est parallelepipedum altitudinis $a d$, baseos æquantis quadrantem quadrati $a t$ vel $a d$.

Duo igitur equiponderantia dicylindraceis, quorum sectiones sunt quadrata $c y$, $y u$ vel $c m$, constant simul quadrantem quadrati $a b$. Quoniam verò dicylindraceo, cuius sectio est quadratum $y m$, equiponderans inuentum est suprâ, si ex illo auferatur conflatum ex duobus postremis iam collectum, residuum fiet duplum equiponderantis dicylindraceo cuius sectio est rectangulum $m c y$ vel $c y u$, nempe cylindraceum altitudinis $a d$, baseos æquantis trientem circuli semidiametro $a d$ geniti imminutum quatuor nouenis quadrati $a d$. Igitur æquiponderans dicylindraceo genito ex figuris $d m n a$, $d u t a$, est cylindraceum altitudinis $d a$ vel $a p$, baseos æquantis sextantem circuli semidiametro $a d$ descripti, imminutum duabus nouenis quadrati $a d$: ergo si, vbi opus fuerit, cognita sit quadratura circuli, notum quoque erit istud æquiponderans, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Methodus nostra est generalis, si attentè res inspiciatur, cum propo-

tionibus quibus illa nititur, vel ex elementis nostris vel ex præfenti Operæ delumptæ, sint generales.

PROPOSITIO XXVIII.

Reuocato schemate propositionis vigesimæ sextæ (Fig. 60.) ostendendum est æquiponderans figuræ solidæ, cuius sectio parallela plano $x e B$ est sector circularis $e f x$, esse cylindraceum altitudinis $x e$ vel $a d$, bases æquantis excessum quo basis cylindracei reperti in superiore, excedit basim cylindracei reperti in propositionis proximè ante superiorem demonstratæ corollario: ac proinde æquiponderans toti solido esse cylindraceum altitudinis $e x$ vel $d a$, bases æquantis sextantem circuli genitoris semidiametro $a d$ descripti, imminutum tribus partibus nouenis, vel vno triente quadrati $d a$.

Propositio patet; nam figura $c f x e$ est sectio dicylindracei geniti ex quadrante circulari $d u t a$ & ex figura $d c b a$ ad positionem plani $x e b$; isti verò dicylindraceo inuenimus in superiore propositione æquiponderans; in vigesimæ sextæ autem corollario reperimus æquiponderans solido cuius sectio est triangulum $e c s$: ergo per subtractionem relinquitur æquiponderans solido cuius sectio est sector $e f x$, libræ planæ axe $a b$, perpendicularo plano $x e b$, sustentaculo $l g$: in casu autem assumpto calculus patet ex numerorum collatione: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Iisdem manentibus (Fig. 62.) ex recta $b a$ abscissa sint æquales $b e$, $l a g$, & ex g excitata sit perpendicularis $g q$ ad planum $b a d$, æqualis rectæ $e x$, vel $a d$; per g ducta sit $g f o$ æquidistans rectæ $a d$, & occurrens rectæ $D d$ in o , limbo $b c d$ inf: centro g per o , q descriptus sit quadrans circularis $o m q g$, & per f ducta sit ordinatim applicata $f m$, completóque parallelogrammo $g f m p$, ducta sit eius diameter $g m$.

Ostendendum est sectorem inferiorem $g o m$ esse æqualem sectori superiori $f e x$, ita vt arcus $f x$, $o m$ sint æquales.

Istud patet, nam eo modo quo ostendimus arcum $f x$ æqualem arcui $u t$ vel rectæ $b e$, ostendemus arcum $q m$ esse æqualem arcui $i t$ vel rectæ $b g$: ergo cum tota $b a$ sit æqualis arcui $o m q$, & pars $b g$ sit æqualis parti $q m$, residua $o m$ erit æqualis parti $g a$ vel $b e$, cui cum æqualis sit arcus $f x$, patet arcum $o m$ esse æqualem arcui $f x$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc apertè liquet solidum sectionis $g o m$ esse ipsum sectionis $f e x$, sed subcontrariè positum; vnde sequitur, quod æquiponderat solido sectionis $f e x$, posito libræ axe $e g$, perpendicularo plano $x e g$, æquiponderare quoque solido sectionis $g o m$ posito libræ axe $g o$ perpendicularo plano $o g a$. E con.

trario autem quod equiponderat solido sectionis $o g m$, librę axe $e g$, perpendicularo plano $x e g$, equiponderare solido sectionis $s e x$, librę planę axe $B e$, perpendicularo plano $B e g$. Patet quoque licet totum subcontrarium sit æquale toti solido primario cuius sectio est $s e x$; si tamen portio solidi subcontrarij posita inter plana plano $B e x$ æquidistanter ducta per rectas $b D$, $g o$, sumatur, eiusmodi æqualitatem non seruari amplius; sed portionem subcontrarij esse illam primarij quę iacet inter plana parallela ducta per rectas $e c$, $a d$.

DEFINITIONES.

Solidum sectionis $s e x$ vocetur *scalarium*; ita enim illud gallicè appellauit Dettonuillaus, à scalarum cochleatim structarum similitudine nonnulla. Solidum, cuius sectio est $o g m$, vocetur *scalarium subcontrarium* scalarij primarij & absolute dicti; ex centro a excitetur ad planum $d a t$ perpendicularis $a h$ æqualis ipsi $a t$, & centro a per d , h describatur quadrans circularis $d z h a$, qui vocetur *scalarij basis*; radius $a d$ vocetur *primus*, radius $a h$, *postremus*. Intelligatur ex scalarij centro gravitatis demitti perpendicularis in basim, & cadere in punctum E , ex quo demittantur in radios $a d$, $a h$ perpendiculares $E A$, $E F$. Vocetur $E A$ *distantia à radio primo*, & $E F$ *distantia à radio postremo*.

PROPOSITIO XXX.

Reuocato (*Fig. 60.*) schemate propositionis vigesimę octauę, scalario subcontrario ad positionem plani $x e c$ equiponderat axe $a b$, perpendicularo plano $x e a$, sustentaculo $l g$, cylindraceum altitudinis $a b$, baseos æquantis trientem quadrati $a d$ deducto equiponderante scalarij primarij reperto in propositione vigesima octaua.

Quoniam quadrans circularis $x e B s$ est sectio cylindracei cuius altitudo est $b a$, basis verò est $a d$ $R P$ quadrans circularis illi æqualis, & similiter positus centro a descriptus; æquiponderans autem basi, librâ grammicâ $l d$ suspensâ ex a perpendicularo $a P$, est per decimam octauam tertij tetragonismicorum, æquale trienti quadrati $a d$; æquiponderans cylindraceo altitudinis $b a$ erit, per vigesimam quintam quarti libri tetragonismicorum, æquale cylindraceo altitudinis $b a$, baseos æquantis trientem quadrati $a d$. Igitur si inde auferatur æquiponderans scalarij cuius sectio est $x e s$, residuum fiet æquiponderans scalario subcontrario, quale erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Si non sumatur nisi cylindri portio intercepta inter plana $x e B$, $P a d$, æquiponderans illi, (ut ex methodo patet) erit cylindraceum altitudinis $a e$, baseos æquantis trientem quadrati $a b$.

COROLL.

Ex corollario vigesimæ nonæ liquet æquiponderans hîc repertum, esse æquiponderans scalario, libræ planæ axe $a d$, perpendicularo plano $d a t$, sustentaculo distante interuallo rectæ $a P$, vel $a d$. Præterea æquiponderans repertum in vigesima octaua est cylindraceum altitudinis $a P$ baseos æquantis sextantem circuli semidiametro $a d$ geniti, imminutum tertia parte quadrati $a d$: cylindraceum verò altitudinis $a b$ æquantis dimidium termini secundi progressionis adiunctæ, & baseos æquantis trientem quadrati $a d$, vel primi termini perspectæ progressionis, est per reciprocatio- nis leges æquale cylindraceo altitudinis $a d$, baseos æquantis sextantem secundi termini perspectæ progressionis, qui est semicirculus semidiametro $a d$ descriptus. Nam vt altitudo, siue primus adiunctæ, ad altitudi- nem, siue ad dimidium secundi adiunctæ; ita basis, siue triens primi per- spectæ, ad basim, siue ad sextantem secundi perspectæ. Igitur æquipon- derans-scalario libræ planæ axe $a d$, perpendicularo plano $d a t$, sustentacu- lo distante distantia rectæ $a P$, est cylindraceum altitudinis $a d$, baseos æquantis tertiam partem quadrati $a d$.

PROPOSITIO XXXI.

Reuocetur schema propositionis vigesimæ primæ & vigesimæ se- cundæ quarti libri superioris (*Fig. 42.*)

Ostendendum est scalarium, cuius sectio parallela plano $d g c$ est sector $f h t$, esse æquale dimidio cylindracei altitudinis $g d$ vel $g c$, ba- seos $b g$: centrum verò grauitatis illius distare à scalarij basi $g d e c$, triente rectæ $g b$.

In illa propositione vigesima prima cum ostenderimus ad positionem plani $d g c$ solidum, cuius sectio est sector $f h t$, hoc est scalarium ita iam appellatum, esse æquale dimidio cylindracei vel prismatis, cuius basis est triangulum $b g l$, altitudo $g d$; patet scalarium esse æquale dimidio eiusmodi solidi, siue quadranti solidi cuius altitudo $g d$, basis quadra- tum $g b$. Centrum verò grauitatis esse in plano $f h n$ ita diuidente rectam $b g$, vt $g h$ sit triens totius $g b$, patet ex sexta quadraturæ parabolæ Ar- chimedæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Methodus præsens extenditur ad quamlibet portionem scalarij, vt ex illa vigesima prima liquet, abscissam plano parallelo ad basim $d g c$. Præ- terea quoniam $g b$ est æqualis arcui $c e d$ ex constructione, erit $g h$ triens peripheriæ $c e d$, & vncia totius peripheriæ circuli geniti semidiametro $g c$. In aliis verò casibus illa distantia facile ostendetur, cum non oporteat inueniri nisi rectam parallelam rectæ $g f$, incedentem per centrum grauitatis trapezij $l i h g$, abscissi ex vna parte, vel trianguli $b i h$ abscissi ex aliâ per planum $f h n$ ytcunque ductum æquidistans basi scalarij.

Z

Quadratum gb est quadrans tertij termini progressionis perspectæ; primus enim est quadratum radij gc , secundus est ipse circulus radio gc descriptus, siue rectangulum sub radio & sub dupla rectæ gb , hoc est, sub recta æquante semiperipheriam eiusdem circuli; illius ergo rectæ quadratum erit tertius terminus perspectæ, ac proinde quadratum gb erit quadrans tertij perspectæ; & solidum altitudinis gd , baseos æquantis decimam sextam partem tertij termini perspectæ progressionis, erit æquale scalario integro.

PROPOSITIO XXXII.

Reducto (*Fig. 62.*) schemate vigesimæ nonæ, recta AE , quæ est distantia à primo radio baseos scalarij, est sexdecim trientes tertij termini progressionis subadiunctæ. Distantia verò $E F$ ab extremo scalarij radio est octo trientes secundi termini subadiunctæ, deductis sexdecim trientibus tertij termini subadiunctæ. Distantia denique centri eiusdem à basi scalarij est sextans secundi termini subadiunctæ progressionis.

Ex rectis da , ha abscindantur aH , aG ipsis æquales. Igitur quoniam libræ planæ axe ad , perpendicularo plano $d a t$, sustentaculo Gm parallelo ad axem ipsum, æquiponderans scalario suspensio est per trigessimæ corollarium secundum æquale cylindræo altitudinis ah vel ad , baseos æquantis trientem quadrati ad ; ipsum autem scalarium suspensum, est per corollarium secundum trigessimæ primæ, æquale cylindræo eiusdem altitudinis, baseos æquantis decimam sextam partem tertij termini perspectæ progressionis; ut est suspensum ad æquiponderans, vel ut basis cylindræi æqualis suspensio ad basim cylindræi æqualis æquiponderanti (sunt enim ambo eiusdem altitudinis) ita recta $G a$ ad $a F$ vel AE : ergo ut decima sexta pars tertij termini perspectæ progressionis ad trientem primi, ita $G a$ primus subadiunctæ ad sexdecim trientes tertij termini subadiunctæ. Est ergo recta $a F$ vel AE æqualis trientibus sexdecim tertij termini subadiunctæ, quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam libræ planæ axe at , perpendicularo plano $ha t$, sustentaculo HN parallelo ad axem, æquiponderans scalario suspensio est, per vigesimam octauam, æquale cylindræo altitudinis ah , baseos æquantis sextantem secundi termini perspectæ progressionis, imminutum triente primi termini; ipsum autem scalarium suspensum est æquale cylindræo eiusdem altitudinis, baseos æquantis decimam sextam partem tertij termini perspectæ; ut est basis istius ad basim illius, ita erit recta $H a$ ad $a A$, vel ad $E F$; ergo ut decima sexta pars tertij termini perspectæ ad sextantem secundi eiusdem perspectæ, imminutum triente primi, ita est $a H$ primus subadiunctæ ad $a A$, hoc est ad sexdecim sextantes, vel ad octo trientes secundi subadiunctæ, imminutos sexdecim trientibus tertij;

ergo recta FE est octo trientes secundi termini subadiunctæ, deductis sexdecim trientibus tertij termini, quod erat secundò demonstrandum. Tertia verò propositionis pars constat ex corollario primo trigessimæ primæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoties suspensum diuiditur in duas partes æquales, & eodem axe brachioque inuenitur illis singulis suum æquiponderans, toties centri vnus ab axe, addita distantia centri alterius, constant duplam distantia, qua ab eodem axe distat centrum totius; id verò in præsentì calculo ita se habet. Nam cylindrus est altitudinis a d, baseos æquantis octantem tertij termini perspectæ; æquiponderans verò illi est, per corollarium secundum trigessimæ, cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem secundi termini perspectæ. Vt igitur octans tertij perspectæ ad sextantem secundi eiusdem perspectæ; ita, axe b a, perpendicularo plano h a t, sustentaculo H N, brachium, siue primus terminus subadiunctæ, ad octo sextantes, vel quatuor trientes secundi subadiunctæ progressionis, siue ad distantiam grauitatis centri competentis cylindræ baseos d z h a, altitudinis b a. Duæ autem distantie AE, EF æquant, vt ex calculo patet, octo trientes secundi termini subadiunctæ: ergo in hoc rectè quadrat calculus illi proprietati initio huius corollarij positæ.

COROLLARIUM II.

Quoniam duodecuplum decimæ sextæ partis est dodrans, vel duodecim decimæ sextæ partes; duodecuplum verò trientis est quadruplum assis, vel duodecim trientes: vt est decima sexta pars tertij termini perspectæ progressionis ad trientem primi termini; ita erit dodrans, vel tres quadrantes tertij termini, ad quadruplum primi: sed vt decima sexta pars tertij illius ad trientem primi; ita ostendimus esse radium G a vel a h ad AE distantiam primi radij: ergo vt tres quadrantes tertij termini perspectæ, ad quadruplum primi; ita est radius a d ad AE distantiam primi radij. Sed quadrans tertij termini perspectæ est æqualis quadrato rectæ a b vel peripheriæ d i t, vt ostendimus in corollario secundo trigessimæ primæ: ergo vt est triplum quadrati peripheriæ d i t, ad quadruplum quadrati a d; ita est radius a d ad distantiam AE. Dettonuillæus in epistola edita ad D. de Sluze agens de hoc scalarì scripsit vt triplum quadrati peripheriæ d i t ad quadruplum quadrati a d, ita esse ipsum radium a d ad distantiam AE. Perspicias calculorum consonantiam omnimodam, ex quo mirum quantum confirmatur nostra methodus, imprimis verò calculus secundæ partis propositionis decimæ nonæ tertij libri quo vsi sumus in vigesima sexta, itémque calculus alter decimæ sextæ propositionis libri quarti, & calculus corollarij vndecimæ tertij, quos adhibuimus in vigesima septima superiore. Porro calculus decimæ sextæ quarti exhibet æquiponderans dimidiij solidi circa femiarem superiorem geniti, libræ planæ axe posito ipso cylindrico magnæ axe, & distantia su-

stentaculi æquante radium. Inde verò per methodum in præsentì propositione usurpatam, & sæpius aliàs in calculo sexdecim casuum, obtinetur distantia centri gravitatis ab axe pro dimidio solido genito circa semiaxem superiorem. Eius tamen calculum vitiosum esse scripsit Autor Historiæ cycloideos, in sua appendicula cuius mentionem iam fecimus sub calcem libri prioris, & ampliorem adhuc facturi sumus in propositione duodecima sequentis libri. Si vitiosus est, non certè ex hoc capite; sed neque, uti speramus, ex methodi labe aliqua occulta; sin autem ex computandi ἀπορροχία, veniam huius errati non semel sponte sua ipse obtulit in suis ad Europæ Geometras literis, quas sub extremum librum quartum curauimus referri. Patet autem ex demonstratis in nouem istis postremis de scalarìo propositionibus, pari methodo posse assignari centrum gravitatis pro quolibet segmento scalarìi, abscisso per planum basi parallelum.

PROPOSITIO XXXIII.

Sint (Fig 63.) quatuor quæcunque lineæ rectæ b, c, d , a quarum tres b, c, d sint proportionales; inter quartam a & primam b media proportionalis sit f ; media verò inter eandem quartam a & tertiam d sit g .

Ostendendum est ut se habet recta b ad c , ita esse rectam f ad g . Item ut se habet recta c ad f , ita esse rectam g ad a ; ac proinde rectangulum sub extremis c, a esse æquale rectangulo sub mediis f, g .

Quoniam enim tres rectæ b, c, d sunt proportionales, & rectangulum sub rectis a, b comprehensum ad rectangulum sub rectis a & d contentum est ut basis b ad basim d ; ipsis autem rectangulis $a b, a d$ æqualia sunt quadrata rectarum f, g ; ergo ut recta b ad d , ita est quadratum f ad g : sed ut b recta ad d , ita per 20. sexti Euclidis in corollario, est quadratum b ad c ; ergo ut quadratum b ad c , ita quadratum f , ad g ; ergo ut recta b ad c , ita recta f ad g , quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam quadratum quod potest recta a , ad rectangulum comprehensum sub rectis a, b , se habet ut basis a ad basim b , sunt enim eiusdem altitudinis a : rectangulum autem sub rectis a, d contentum ad rectangulum sub b, d rectis se habet pariter ut basis a ad b , cum eorum eadem sit altitudo d ; ergo ut quadratum a ad rectangulum $a b$, hoc est ad quadratum f , ita se habet rectangulum $a d$, siue quadratum g , ad rectangulum $b d$, siue ad quadratum c ; ergo ut quadratum a ad f , ita quadratum g ad c ; ergo ut recta a ad f , ita recta g ad c ; & alternando ut a ad g , ita f ad c ; & inuertendo ut c ad f , ita g ad a , ac proinde rectangulum sub rectis c, a , est æquale rectangulo sub rectis f, g ; quod erat alterum ex demonstrandis.

COROLLARIUM I.

Quod si tres rectæ b, c, d non sint proportionales; inueniatur media

h inter b & d; atque vt h recta ad c, ita fiat recta g ad i. Patet ex demonstratis vt est recta b ad c, ita esse rectam f ad i, & vt est recta c ad f, ita esse rectam i ad a.

Quoniam enim ex antè demonstratis vt est recta b ad h, ita est recta f ad g, & vt est recta h ad c, ita ponitur recta g ad i; ergo ex æquo vt est recta b ad c, ita est recta f ad i. Item quoniam vt est recta c ad h, ita est recta i ad g, & vt h recta ad f, ita est g recta ad a; ergo ex æquo vt est c ad f, ita est i ad a.

COROLLARIUM II.

Quod si quatuor rectæ a, f, g, c sint proportionales, vt sicut est a ad b, ita sit g ad c; ostendetur tres rectas b, c, d esse proportionales. Nam rectangulum sub extremis a, c est æquale rectangulo sub mediis f, g. Rursus quoniam per lemma propositionis trigesimæ primæ decimi Euclidis, vt est recta f ad g, ita est quadratum rectæ f ad rectangulum f g, hoc est ad rectangulum a c; & vt est g ad f ita est quadratum g ad rectangulum g f, hoc est ad rectangulum a c; ergo tria spatia quadratum f, rectangulum f g, quadratum g sunt proportionalia; ergo cum quadratis f, g æqualia sint rectangula a b, a d, tria rectangula a b, a c, a d sunt proportionalia, & eiusdem altitudinis a; ergo bases b, c, d sunt proportionales, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXIV.

ESto (Fig. 64.) quadratum i B t n, & parallelogrammum rectangulum i c d n; descriptus esto circulus z D E d c centro c, diametro z d; recta i c producta occurrat peripheriæ in D: libra z d suspensa ex c perpendiculari c D, brachio c z, descripta intelligatur quadratrix c u d respondens quadranti circulari D E d c, ita vt sicut brachium z c ad c p quamlibet portionem radij c d, ita E p ordinatim ad diametrum z d applicata se habeat ad p u dimetientem quadratricis. Compleatur parallelogrammum z c i o, & describatur parabola i r t, cuius axis i B, vertex i, tangens o i, ac proinde ordinatim applicata B t. Recta E p producta occurrat lineis i n, i r t, B t, in punctis q, r, s.

Ostendendum est rectam p u, esse æqualem sinui recto r H arcus q H sumpti in circulo q H s diametri q s.

Rectæ o i, i q, q r sunt proportionales per duodecimam tertij tetragonismicorum; præterea ex tertia tertij tetragonismicorum media inter rectam s q & r s est ordinatim applicata p E; media autem inter s q, q r est, vt iam ostendimus, recta q i. Habemus ergo quatuor rectas primam s r, secundam H r; tertiam q r, quartam q s vel o i; media autem inter quartam q s & primam s r est E p, & media inter eandem quartam & tertiam q r est q i; ergo per superiorem, rectangulum sub r

H & sub o i est æquale rectangulo sub i q & sub p E comprehenso, hoc est; rectangulo c p E, nam c p, i q sunt æquales: sed rectangulo c p E est æquale rectangulum sub z c, & sub p u cum ex generatione quadratricis ut brachium z c ad c p, ita sit p E ad p u, rectangulumque sub extremis z c, p u sit æquale rectangulo c p E sub mediis, ergo rectangulum contentum sub rectis z c, p u est æquale rectangulo contento sub rectis q s vel z c & sub r H: ergo rectæ p u, r H sunt æquales, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Idem manentibus (*Fig. 64.*) ostendendum est arcum q H esse similem arcui duplo arcus D E.

Radius z c bifariam secetur in A, & compleatur parallelogrammum A c i a: arcus D R sit duplus arcus D E. Quoniam c p est æqualis sinui arcus D E, rectangulum comprehensum sub sinu verso arcus D R, & sub a i, erit æquale quadrato c p, ut demonstrat Clavius propositione quarta libelli sinuum: ergo rectangulum sub o i & sub dimidio sinus versi respondentis arcui D R, erit æquale quadrato c p: sed quadrato c p vel i q æquale est rectangulum contentum sub o i & sub q r: ergo q r est dimidium sinus versi arcus D R. Cum igitur semicirculi z D d, q H s habeant diametros z d, q s in ratione dupla, sinus versus arcus D R erit duplus sinus versi competentis arcui simili sumpto in peripheria q H t; sed q r sinus versus arcus q H est duplus sinus versi attinentis ad arcum D R; ergo arcus q H est similis arcui D R, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Esto (*Fig. 65.*) semicycloides magna c d a b, cuius basis b c, axis b a æqualis diametro circuli genitoris b q a; ex c b producta abscindatur b z dupla ipsius a b, & fiat parabola a b z h cuius axis a b, ordinatim applicata b z, & latus rectum est rectæ a b quadruplum.

Ostendendum est quadratricem mixtam definitam sub finem decimæ sextæ propositionis, respondentem parallelogrammo mixto altitudinis æquantis rectam b a, librâ grammica u b a suspensa ex b perpendiculo b c, brachio b u æquantæ rectam b a, esse æqualem figuræ parabolicæ a h z b, ita ut ductâ quacunq; d g parallela basi c b occurrente lineis a d c, a b, a h z in d, g, h, & per d, h actis d t, h r perpendicularibus ad c z, quadratrix respondens parallelogrammo mixto insistenti super arcu c d sit figura h z r, & reliqua a h r b respondeat parallelogrammo mixto quod insistit super curva d a.

Arcum a d esse æqualem rectæ g h, sumo ex inuentis Recentiorum Geometrarum, inter quos D. Vyren primus dicitur inuenisse integrum

arcum a d c esse duplum axis a b. De veritate autem huius assumpti nullus dubitare possum ex quo huius rei demonstrationem more antiquorum à Geometra celeberrimi nominis Tolosano subtilissimè elaboratam legi. Eo autem ita sumpto, cætera patent ex methodo simillima propositionis vigesimæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si compleatur parallelogrammum c b u l, ex Archimedeis de parabolæ quadratura demonstratis patet parabolicæ figuræ a h z b, axe b z, sustentaculo u l æquiponderare rectanguli a b z quatuor decimas quintas, hoc est, quadrati a b o octo decimas quintas, cum recta b z sit dupla rectæ b a. Duplum igitur huius æquiponderantis erunt sexdecim decimæ quintæ partes quadrati a b. Ipsa autem figura a h z b est vt patet, duo, trientes rectanguli a b z, vel quatuor trientes quadrati b a. Quod si b g bifariam secetur in g, patet rectam b z ad g h esse potestate vt binarium ad vnitatem, siue vt rectam a b ad a g. Igitur portio a b r n est quinque trientes rectanguli a g h comprehensi sub semidiametro circuli genitoris a q b & sub recta g h quæ ad a b est potestate vt binarius ad vnitatem: & quæ ad semidiametrum circuli genitoris est potestate vt 8. ad 1.

PROPOSITIO XXXVII.

ESto vt in trigesima quarta, (Fig. 64.) b g i a pars superior semicycloideos paruæ cuius circulus generator sit i x o, diametro i o descriptus; tota verò semicycloides parua sit z b i o; completo parallelogrammo o i c z; ex c z abscindatur c d æqualis ipsi c z, & descripta concipiatur pars superior i h d c semicycloideos paruæ, cuius circulus genitor z D d descriptus sit diametro z d. Librâ z d suspensâ ex c, perpendicularo c D, brachio z c, intelligatur ita generari quadratrix c u d, vt sicut brachium z c ad c p, quamlibet portionem rectæ c d, sic E p ordinatim applicata ad generatoris diametrum z d, se habeat ad u p dimetientem quadratricis c u d p. Ista quadratrix intelligatur ad positionem rectæ i c transferri in curuam i h d illique insistere ad partes c, & ita insistens esse figura i F d h, cuius hæc est proprietas vt quæcunque u p parallela rectæ c i ducatur occurrens limbo c u in u; rectæ i d in p, curuæ i F in F, & curuæ i h in h, dimetientes u p, F h sint æquales. Intelligatur denique semicirculus o x i similiter transferri in curuam z b i, vt z M i o sit semicycloides magna, cuius circulus genitor o x i.

Ostendendum est quæcunque y g ducatur parallela rectæ i c, secans rectam o i in y, occurrens limbo z b i in g, limbo z M i in M, si per g ducatur recta g h parallela rectæ o i, occurrens rectæ i c,

in l; limbo i h d in h: et per h ducatur h q æquidistans rectæ y g, occurrens limbo i F d in F: rectam M F connectentem, puncta M & F esse parallelam rectæ o i.

Intelligatur figura i n t B vt in trigesima quinta: ergo recta h F vel p u est æqualis rectæ r H, siue sinui recto arcus q H similis arcui D R, & sumpti in circulo diametri q s vel o i, hoc est in circulo o x i. Præterea ex prima secundi libri propositione, recta i f est æqualis arcui D E, & eadem recta i f est æqualis arcui i m. Quoniam igitur peripheriæ sunt vt diametri, tota i x o peripheria erit æqualis toti D E d; ergo vt D E ad quadrantem D E d peripheriæ circuli maioris, ita i m ad semiperipheriam i m x circuli minoris: ergo dimidium arcus i m est ad i m x dimidium arcus i x o, vt arcus D E ad D E d: igitur dimidium arcus m i est similis arcui D E: ergo cum D E, E R sint æquales, peripheriæ i m, D R erunt similes: sed peripheriæ q H, D R sunt similes per superiorem trigessimam quintam; ergo arcus i m, q H sunt similes; cumque diametri o i, q s sint æquales, erunt ipsi arcus i m, q H æquales: ergo recta y m est æqualis rectæ r H; sed ista est, per superiorem trigessimam quintam, æqualis rectæ p u, & rectæ p u est æqualis rectæ h F; ergo rectæ y m vel g M, & h F sunt æquales: ergo cum sint etiam parallelæ, figura M g h F erit parallelogramma, ac proinde latera M F, g h æquidistant: sed æquidistant o i, g h: igitur recta M F æquidistat rectæ o i, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Patet ex demonstratis posse rem conuerti, nempe si limbi i M z, i F d secentur qualibet M F parallela ad rectam i o, & per M, G ducantur M y, F q occurrentes limbis i b z, i h d in g, h, iungaturque recta g h, ipsam g h esse parallelam rectæ i o.

PROPOSITIO XXXVIII.

Idem manentibus (Fig. 64.) ducatur quæcunque M F parallela basi o i, occurrens limbis i M z, i F d in M, F, & rectæ i c in G.

Ostendendum est tres rectas o i, G F, M G esse proportionales.

Quoniam z b i l c, ex vigesima quarta huius libri, est figura ex sinibus versis comparata ad figuram i h d c, tres rectæ o i, f h, g f erunt proportionales per eandem propositionem; sed duabus g f, f h æquales sunt duæ M G, G F, singulæ singulis: ergo tres rectæ o i, G F, M G sunt proportionales, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Completo parallelogrammo o z d n, recta M F producta occurrat lateribus o z, d n in S, N; patet semicycloidi magnæ i M z o, cuius generator circulus o x i, ita respondere figuram i F d n, vt si istius basis i n secetur vtcunque in q, & per q ducatur recta q F parallela rectæ o z, occurrens limbo i F d in F, & per F agatur F M parallela basi i n, occurrens

lineis

lineis i M z, o z in M, S, recta i q sit æqualis dimidio curvæ M i. Quoniam enim, per trigessimam sextam, curua M i est æqualis rectæ quæ media proportionalis sit inter quadruplam rectæ o i, & inter i y vel M G, dimidium curvæ M i, erit æqualis rectæ quæ media sit inter rectam o i rotam & inter i y, quadratum enim dimidij illius est ad quadratum totius, vt vnitas ad quaternarium, prout ex elementis Euclideis notum est. Ergo cum per præsentem tres rectæ o i, G F vel i q, & M G vel i y sint proportionales, patet rectam i q esse æqualem dimidio arcûs M i.

PROPOSITIO XXXIX.

Iisdem manentibus (Fig. 64.) ex recta i n abscindatur n L ipsi æqualis, & completo parallelogrammo c i L V, figuræ i F d c fiat ad positionem rectæ c V proportionalis i P V c; ita vt, sicut est c d ad c V, siue vnitas ad binarium, ita G F quælibet parallela rectæ c d dimetiens figuræ i F d c, se habeat ad G P dimetientem figuræ i P V c.

Ostendendum est semicycloidi magnæ z M i o ita respondere figuram i P V L; vt quæcunque ducatur S Q parallela rectæ o i, occurrens lineis o z, z M i, i P V, V L in S, M, P, Q; si per P agatur P T perpendicularis ad i L, recta i T sit æqualis curvæ M i. Atque ita per definitiones decimæ sextæ; si ex i c auferatur i Y ipsi æqualis, libræ grammicæ Y c suspensâ ex i perpendicularo i o, brachio i Y, figura i P V L sit quadratrix mixta & expansa rectanguli mixti insistentis super arcu z M i, altitudinis æquantis rectam i Y. Eiusmodi verò rectangulum mixtum est portio superficie curvæ solidi cylindracei recti insistentis super basi z M i o.

Quoniam rectis G F, G P æquales sunt i q, q T, sicut G P est dupla rectæ G F, ita i T erit dupla rectæ i q; sed M i, per corollarium superioris propositionis, est etiam dupla rectæ i q; ergo recta i T est æqualis curvæ M i; ergo, per vigessimam propositionem, figura i P V L est quadratrix mixta expansa rectanguli mixti insistentis super arcu z M i, libræ brachio i Y, perpendicularo i L; ita vt parallelogrammo mixto quod super curua i M insistit, respondeat quadratrix expansa i P T; parallelogrammo verò mixto quod super curua M z insistit, respondeat T P V L, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex secundi libri tetragonismicorum decima quinta liquet, libræ grammicæ brachio i Y, perpendicularo i L, æquiponderans figuræ i P V L esse ad positionem rectæ i L condita ratione duplum æquiponderantis figuræ i F d n; cum illius dimetientes parallelæ perpendicularo i L sint duplæ dimetientium istius.

DE CYCLOIDE COROLLARIUM II.

Hæc quadratrix expansa habet istam proprietatem, quæcunque sit curva zMi cui parallelogrammum mixtum insitit, ut portio eius quælibet VPQ , posito libræ perpendicularo GQ , brachio æquante rectam Gc , & altitudine parallelogrammi mixti æquante pariter eandem Gc , sit quadratrix mixta expansa parallelogrammi mixti iam dicti. Id verò ita patet, ut ampliore explicatione non egeat.

COROLLARIUM III.

Eadem quadratrix expansa integrè sumpta est æqualis circulo genitori diametri zd , imminuto quatuor trientibus quadrati cd . Nam parallelogrammum $cind$ est, ex Archimedeis de dimensione circuli principiis, æquale dimidio circuli genitoris iam dicti; ipsa verò figura $ihdc$ est æqualis quadrato cd , ut ex nona secundi liquet: ergo figura $ihdn$ est semicirculus genitor imminutus quadrato cd ; sed figura $ifdh$, vel cup , est per decimam octauam tertij tetragonismicorum æqualis trienti quadrati cd ; ergo tota figura $ifdn$ est æqualis semicirculo genitori, imminuto duobus trientibus quadrati cd . Cum igitur figura $ifdn$ sit dimidium figuræ pVL patet quod propositum fuit in præsentis corollario.

PROPOSITIO XL.

ESto $bcd a$ (*Fig. 66.*) quadrans circularis ex centro a descriptus; super radio ba descriptum sit quadratum baf ; ponatur f a axis parabolæ ela , & fe ordinatim ad illum applicata. Ex ba abscissa sit ag ipsi æqualis, & libræ grammicæ gb suspensæ ex a perpendicularo ad , brachio ag , intelligatur gigni quadratrix $anbm$, quam *semihederaceam* voco, respondens quadranti circulari; ita ut, sicut brachium ga ad quamlibet am , ita mo ordinatim applicata ad diametrum gb sit ad mn . Ex puncto a excitetur ap perpendicularis ad planum $b a d$.

Ostendendum est dicylindraceum ad positionem plani $p a d$ ad planum $b a d$ recti genitum ex figuris $aleb$, $bcd a$ esse condicta ratione æquale cuneato baseos $anbm$, altitudinis $aqeb$; & quod vni æquiponderat axe ad , perpendicularo plano paf , æquiponderare alteri.

Quoniam ut ga ad am , ita ponitur mo ad mn , & ita, per duodecimam tertij tetragonismicorum, est qm dimetiens trianguli aeb , ad ml dimetientem figuræ parabolicæ $aleb$, erit ut qm ad ml , ita mo ad mn ; ergo rectangulum sub extremis qm , mn est æquale rectangulo sub mediis ml , mo ; ergo cuneatum genitum ex triangulo aeb & quadratrice $anbm$, est condicta ratione æquale dicylindraceo genito ex ceratoide

parabolica a l e b, & ex figura b c d: ergo per vndecimam quarti habent centrum grauitatis in eodem ad planum p a d parallelo; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quæcunque figura sit b c d a patet idem demonstrari, & quamuis a b e f non sit quadratum, sed latera e b, b a forent inæqualia, semper cuneatum genitum ex triangulo comprehenso sub lateribus a b, b e, & sub diametro a e, & ex quadratrice, erit æquale alteri dicylindraceo habebitque centrum grauitatis in eodem plano ad planum p a d parallelo; ac proinde idem erit vtrique æquiponderans spatium. Eadem porrò methodus idem probat si pro triangulo a e b, sumatur alia figura eiusque quadratrix pro figura a l e b.

PROPOSITIO XLI.

MAneat b c d a quadrans circularis, ostendendum est dicylindraceum genitum ex ceratoide parabolica e l a b & ex quadrante circulari b c d a ad positionem plani p a f, esse æquale cylindraceo altitudinis e b, baseos æquantis quadrantem figuræ b c d a totius, quando tota sumitur: vel si sumatur eius quælibet portio m o d a inter parallelas a d, m o, vel extra illas alia portio m o c b, esse cylindraceum altitudinis b e, baseos æquantis quadrantem figuræ m o d a, vel b c o m, auctum ex nota lege vel imminutum rectilineo cognito.

Intelligatur cylindraceum altitudinis b e baseos a n b, & semihederaceæ quadratrix altera a r b: ex corollario superioris liquet dicylindraceo genito ex triangulo e a b & ex semihederacea a n b, æquale condita ratione esse cylindraceum genitum ex parallelogrammo f a b e, & ex quadratrice altera a r b; est enim triangulum a b e quadratrix parallelogrammi: ergo vt i m ad m n, ita q m ad m r; ideoque rectangulum sub extremis i m, m r est æquale rectangulo sub mediis q m, m n; ipsæque solida, quorum illa rectangula sunt sectiones, sunt inter se æqualia, & habent idem æquiponderans.

Rursus quoniam vt i m ad m q, ita m o ad m n; rectangulum sub extremis erit æquale rectangulo sub mediis: ergo solidum sectionis q m o, est æquale condita ratione solido sectionis i m n, & habent idem æquiponderans. Quoniam verò cylindraceum altitudinis i m, baseos a n b, habet æquiponderans cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos a r b, quæ est quadratrix baseos a n b (quadratarium enim spatium cylindracei eiusdem altitudinis, habet basim quadratricem baseos cylindracei: ergo cylindraceum altitudinis e b, baseos a r b, æquiponderat ad positionem plani p a f condita ratione cylindraceo altitudinis b e, baseos a n b) igitur idem cylindraceum baseos a r b æquiponderat cuneato genito ex

triangulo aeb & ex $bcd a$. Præterea quoniam tres im, mq, ml , sunt proportionales tribus om, mn, mr (sunt enim im, mq, ml proportionales in ratione rectæ ga ad am ; in eadem quoque ratione proportionales sunt ex generatione quadratricis, tres mo, mn, mr) ergo ex æquo ut im ad ml , ita mo ad mr : ergo rectangulum sub extremis im, mr , est æquale rectangulo sub mediis lm, mo . Igitur solidum genitum ex ceratoide aeb & ex figura $bcd a$, est condita ratione æquale cylindraceo altitudinis im vel eb , baseos $arbm$, quæ est quadratrix semihederaceæ.

Quadratricem autem secundam $ar b$ reduci ad quadrantem totius figuræ $bcd a$, si tota sumatur, vel ad quadrantem figuræ $mod a$, vel $bcom$ auctum vel imminutum certo quodam rectilineo, patet ex decima tertia primi libri, & ex corollario quarto decimæ quartæ tertij: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam cylindraceum altitudinis eb , baseos $bcd a$ diuiditur in duo dicylindracea eiusdem baseos, quorum vnum habeat pro altitudine figuram ceratoidem $ela b$, alterum figuram parabolicam $ela f$, patet dicylindraceum genitum ex semisegmento parabolico $ela f$ ad positionem plani $pa f$, & ex figura $bcd a$, reduci ad solidum altitudinis eb cuius basis sint tres quadrantes figuræ $bcd a$, si totum sumatur: vel tres quadrantes figuræ conditæ $ad om$, vel $mo c b$, aucti vel minuti cognito spatio.

COROLLARIUM II.

Ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum liquet, si figura parabolica $ela f$ intelligatur ad positionem rectæ ad aptari limbo bcd , & libræ planæ ponatur axis ab , sustentaculum ef , æquiponderans parabolæ ita aptatæ esse æquale tribus quadrantibus conditis si tota suspendatur, vel auctis imminutisue certo rectilineo, si non suspendatur nisi secundum partem $eli f$, vel eli ; nempe tribus illis quadrantibus auctis vel minutis, quos in superiore corollario collegimus. Eadem ratione si ceratoides figura aeb intelligatur ita aptari eidem limbo bcd , æquiponderans erit quadrans conditus si suspendatur tota, vel quadrans conditus auctus minutisque certo quodam rectilineo, si non suspendatur tota, sed ex parte, ut dictum fuit.

COROLLARIUM III.

In quinto nostrorum elementorum tradidimus principia vnde habeatur quadratrix secunda quadratricis respondentis hyperbolæ; ex illis verò inuenitur, æquiponderans esse notum rectilineum imminutum tribus quadrantibus conditis, quando bg ponitur axis transuersus sectionum oppositarum centro a descriptorum, & fd axis rectus. Quod hic obiter monemus; nam isto corollario hic opus nobis non est.

PROPOSITIO XLII.

Iisdem manentibus (*Fig. 66.*) ad positionem rectæ fa intelligantur per generationem continuam propagari quadratrices quarum radix sit parallelogrammum $befa$, quamcunque rationem habeant latera be , ba ; prima verò quadratrix sit triangulum bca , secunda ceratoides parabolica $abel$, tertia bes , & ita sine ullo certo fine procedatur; ita ut rectæ im , ml , ms &c. sint in continua progressionem geometricā.

Ostendendum est in ista serie graduum, quorum primus sit parallelogrammum $befa$, notum esse spatium æquale singulis ex quatuor post primum consequentibus.

Quoniam in decima sexta propositione ostendimus lineam ae esse rectam; patet triangulum aeb esse notum. Quoniam verò in duodecima tertij tetragonismicorum ostendimus lineam ale esse parabolæ limbum, cuius axis af , tangens ab ; liquet ex quadratura parabolæ notum esse gradum dimetientis lm . Præterea quoniā per demonstrata ibidem initio quarti notum est grauitatis centrum quadratricis secundæ, & notum quoque rectilineum æquale ipsi quadratrici; ergo ut brachium ga ad longitudinem notam interceptam inter fa , & ipsi parallelam per grauitatis centrum secundæ ductam, ita spatium secundæ notum ad spatium tertiæ; notum igitur est spatium dimetientis sm . Denique completo parallelogrammo $bada$, intelligantur ad positionem rectæ ad , tres gradus quorum primus sit parallelogrammum $afeb$, secundus ceratoides parabolica $bale$, tertius figura $ABdz$, insistent super recta Ad ; igitur per vigesimam octauam quarti tetragonismicorum, figuræ $aleb$ ut iacet manenti, axe ab , sustentaculo dA , æquiponderat condita ratione dimidium figuræ $dBAz$ aptatum sustentaculo dA . Igitur cum figura $abel$ sit æqualis rectilineo noto & cum eiusdem figuræ centrum grauitatis sit notum ex parabolæ quadraturâ, notum erit æquiponderans illi eidem figuræ axe ab , sustentaculo dA : ergo figuræ $dBAz$, æquale rectilineum est cognitum. Rursus quoniam ut im ad mq , ita est mq ad lm , & ita est lm ad sm , & sm ad dimetientem quinti gradus; dimetientes primi, tertij, & quinti erunt proportionales; atqui dimetiens primi est mz , tertij ml ; ergo cum mz , ml , & zB sint proportionales, erit zB dimetiens quinti gradûs. Igitur quatuor gradus nempe secundus, tertius, quartus, quintus sunt singuli æquales rectilineo noto, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Primam quadratricem $aqeb$ esse dimidium rectanguli parallelogrammi $afeb$, patet ex eo quod aqe limbus quadratricis sit diameter eiusdem parallelogrammi. Secundam quadratricem, siue tertium gradum,

esse trientem eiusdem rectanguli patet ex quarti tetragonismicorum prima, & ex quadratura parabolæ Archimedeæ. Tertiā quadratricem, siue gradum quartum, esse quadrantem eiusdem rectanguli ita ostenditur. Ex corollario quarto primæ propositionis quarti libri tetragonismicorū recta lm incedens per centrum grauitatis tertij gradūs $aleb$, ita secat rectam ab , vt ab vel ga sit ad am , sicut quaternarius ad ternarium; ergo quartus gradus $afeb$ est tres quadrantes tertij $aleb$: sed tertius est triens vel quatuor vnciæ parallelogrammi $afed$; ergo quartus est tres vnciæ, vel quadrans eiusdem parallelogrammi rectanguli. Denique quintum gradum esse partem quintam eiusdem rectanguli; demonstratur hoc pacto. Si recta af secetur bifariam in E , centrum grauitatis parallelogrammi $afeb$ erit in parallelâ ad rectam ab , ductâ per E ; & si fG recta ponatur duæ quintæ, vel quatuor decimæ partes totius fa , centrum grauitatis figuræ $alef$ erit in recta per G ducta æquidistanter rectæ ab , per corollarium quintum primæ quarti tetragonismicorum. Cū ergo totum fab diuidatur in duas partes ela , fab , quarum illa est dupla istius, si EH abscissa ex recta Ea sit dupla rectæ EG , hoc est si EH sit duæ decimæ partes rectæ fa , centrum grauitatis partis $aleb$ erit per reciprocationis legem, quam libra præscribit, in recta per H ducta æquidistanter rectæ ab . Præterea quoniam ad vel af est ad aH vt denarius ad ternarium, pars autem $aleb$ est triens parallelogrammi $afeb$, æquiponderans isti parti axe ab , sustentaculo dA , erit tres decimæ partes illius trientis, hoc est, erit vna decima pars rectanguli $afeb$; ergo cū duplum huius æquiponderantis sit quarta quadratrix, vel quintus gradus, patet istum quintum gradum esse quintam partem rectanguli $afeb$. Hinc patet gradus istos ad primum comparatos esse vt vnitatem ad numerum sedis quam in illa serie occupant, hoc est secundum esse ad primum vt vnitatem ad binarium; tertium, vt vnitatem ad ternarium; quartum, vt vnitatem ad quaternarium; quintum vt vnitatem ad quinarum; quod de consequentibus singulis gradibus esse verum constabit ex mox demonstrandis: quamuis enim iis non egeamus in præsens, quia tamen illa iamdiu à nobis parata sunt, & huc solum transferenda sunt ex libro vbi alias graduum series pari pacto demonstramus, non iniucundum id fore Lectori speramus. Hinc porro liquet si recta im parallela perpendiculari ad incedat per grauitatis centrum primi gradūs; rectam am esse dimidium rectæ ab ; si per centrum secundi, ipsam am esse duos trientes ipsius ab ; si per centrum tertij, esse tres quadrantes; si per centrum quarti, esse quatuor quintas; ita vt bm pro primo gradu sit dimidium, pro secundo triens, pro tertio quadrans, pro quarto quinta pars, qui progressus pergit in infinitum, si graduum ratio progrediatur, vti diximus.

ESto (Fig. 67.) quadratum $bade$, & ex puncto a excitata sit a perpendicularis ad planum $bade$, æqualis lateri ba : completo quadrato $bact$, intelligatur describi graduum series supra exposita, quorum primus sit quadratum $bact$, secundus sit triangulum comprehensum lateribus ba , ac , & diametro bc ; tertius sit ceratoides parabolica comprehensa arcu parabolæ quam tangat in b recta ba , & cuius axis sit bt : & sic deinceps, ita ut graduum istorum consequens sit quadratrix figura antecedentis, brachio pb æquante latus ba , & perpendiculò bt . In illa serie *numerus gradualis* appellatur ille quo sedes cuiusque gradus designatur, initio ducto à primi, siue quadrati $bact$, sede primâ. Intelligatur quicumque gradus $bacm$, & ad positionem plani tba , ex illo gradu & ex quadrato $bade$ intelligatur gigni dicylindraceum, ita ut (si in recta ba sumatur quodcunque punctum n , & per illud ducatur nm parallela rectæ ca , limbo gradus bmc designati occurrens in m ; item recta ng ducatur complens parallelogrammum $ngeb$, & recta mg) triangulum nmg sit dimidium illius parallelogrammi, quod erit sectio dicylindræi & plani per n ducti æquidistanter plano tbe . Per a & e agatur diameter ae , occurrens rectæ ng in f : super lateribus be , de construuntur quadrata $bpAe$, $eduz$: per f ducta sit fh complens parallelogrammum $abhi$; per i ducta sit il recta parallela lateri ac , trianguli cad . Solidum illud cuius sectiones parallelæ plano tbe sunt triangula nmg , acd , vocetur *semidicylindraceum*. Isti semicylindræo & plano cae sectio communis vocetur *septum medium*, quod ad positionem plani bac intelligatur transferri in planum pbe , & ita insistere rectæ be , ut septi dimetiens λf , perpendicularis ad planum $bade$ excitata ex puncto f , sit æqualis dimetienti Dh sectionis translatae $ebpD$. Intelligatur figura $egdus$, cuius dimetiens gs parallela rectæ du se habeat ad λf , sicut fg ad gB , vel $e z$.

Ostendendum est, si septum medium transferatur ad positionem plani tbe in planum dez , generetque figuram $deFu$; & si, recta a e manente, circumuoluatur rectilineum $apAe$, lineam eDp congruere lineæ eFu , punctumque D puncto F ; & in serie illa graduum, post gradum $bacm$ proximè sequi gradum $deFu$, & post $deFu$ gradum $desu$.

Ut est recta ca ad mn , ita esse li ad λf ostenditur methodo quam adhibuimus pro simili causa in quarti libri propositione prima. Præterea

quoniam bn, ge latera parallelogrammi $bnge$ sunt æqualia, itémque eg, gf latera quadrati $egfh$; rectæ bn, gf, hf erunt æquales: igitur ut sp b ad bn , ita est gn ad gf , & ita est p b ad hf ; ita verò quoque est mn dimetiens gradûs assumpti, ad dimetientem proximè consequentis. Cùm igitur in triangulo gnm lateri mn æquidistat λf ; ut est gn ad gf , ita erit mn ad λf , vel gF ; sed ita etiam est eadem mn ad dimetientem proximè sequentis gradûs; ergo λf vel gF est dimetiens gradûs proximè sequentis post assumptum. Præterea quoniam anguli aeb, aed in quadrato $bade$ sunt æquales; recta be , peractâ circumuolutione, congruet rectæ ed , punctumque h puncto g , cùm eh, eg sint æquales; & punctum D puncto F , cùm hD, gF singulæ, sint æquales rectæ λf ; & hD, gF sint perpendiculares ad rectas be, ed . Igitur figuræ $b p D e, d e F u$ sibi mutuò congruunt post translationem, ideóque sunt æquales singulæ gradui proximè sequenti post assumptum.

Præterea quoniam ut gn ad gf , hoc est ut $a b$ ad bn , ita ponitur λf ad gs ; & ut $a b$ ad bn , ita ex generatione quadratricum constituentium hos gradus, est superioris dimetiens ad sequentis dimetientem, patet gs esse dimetientem gradûs qui sequitur post gradum dimetientis gF . Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam ut ng ad gf , ita ex constructione est λf ad fg , patet rectangulum λfg comprehensum sub mediis esse æquale rectangulo gs comprehenso sub extremis, ac proinde cylindraceum altitudinis gn baseos $d e f u$, esse condicta ratione æquale dicylindræo ad positionem plani $t b e$ genito ex triangulo $a e d$, & ex septo medio; vel esse æquale duplo portionis semicylindræi, interceptæ inter plana $c a d, c a e$.

COROLLARIUM II.

Ex demonstratis liquet figuram $h f \lambda$ esse ad triangulum $g f \lambda$, ut est figura $b a c m$ ad triangulum $c d a$. Est enim $h f g e$ quadratum, & super latere $h f$ constructum intelligitur parallelogrammum $h f \lambda$, in quo intelligitur series graduum quorum primus est parallelogrammum $h f \lambda$, secundus triangulum $h f \lambda$: ergo cùm ut parallelogrammum $b a c$, siue primus gradus, ad triangulum $b a c$, siue ad secundum gradum, ita in alia serie sit parallelogrammum $h f \lambda$ ad triangulum $h f \lambda$; patet eandem esse utrobique rationem dimetientium in gradibus; ergo cùm respectu quadrati $h f g e$, figura $h f \lambda$ habeat numerum eundem gradualem quem habet figura $b a c m$ in ordine ad quadratum $b a d e$; patet ut est $b a c m$ ad $c a d$ triangulum, ita esse $h f \lambda$ ad triangulum $\lambda f g$. Igitur cùm post conuersionem recta $h f$ congruat rectæ fg , & planum $h f \lambda$ sit in plano $g f \lambda$, idque eueniat perpetuâ lege, vbicunque inter a & e iaceat punctum f ; patet solidum cuius sectio est figura $h f \lambda$, esse ad solidum cuius sectio est triangulum $\lambda f g$, hoc est, ad semidicylindræum, ut est figura $b a c m$ ad triangulum $c d a$.

PROP.

Idem manentibus (*Fig. 67.*) gradus quisque in illa serie integrè sumptus inter parallelas $b e$, $a d$, est ad primum gradum $b a c t$ vt vnitas ad numerum gradualem illiusmet gradus.

Sit quilibet gradus C à primo diuersus, & vnus ex quatuor quorum tetragonismum dedimus in corollario quadragessimæ secundæ; proximè antecedens sit B ; cuius numerus gradualis sit E . Dico proximè sequentem D esse ad rectangulum $b a c t$, vt est vnitas ad compositum numerum ex binario & ex E ; vel vt est vnitas ad numerum gradualem gradus C auctum vnitate; vel vt est vnitas ad numerum gradualem ipsius D .

Quoniam sectio $b a c m$ est vnus gradus ex quinque quos in corollario quadragessimæ secundæ ostendimus habere illam proprietatem, quam in præsentī extendere volumus ad consequentes omnes eiusdem seriei & ordinis; sectio $b a c m$ erit ad primum gradum $b a c t$, vt vnitas ad numerum E eiusdem $b a c m$ gradualem. Triangulum verò rectilineum $d a c$, cum sit sectio semicylindræci, est ad rectangulum $c a d$, vel $c a b$, vt vnitas ad binarium. Quoniam, vt ex corollario secundo superioris liquet, portio semicylindræci triangulo $b a e$ ad positionem plani $c a b$ insistens est ad semicylindræci portionem insistentem super triangulo $a d e$, vt est figura $b a c m$ ad triangulum $c d a$; compositum ex duobus solidis iam dictis, ad portionem semicylindræci iam dictam habebit porportionem quam duæ simul figuræ $b a c m$, $c d a$ habent ad $c d a$. Cum igitur $b a c m$ sit minutia primi gradus $b a c t$, habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E , & cum $d c a$ sit minutia primi gradus habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore binarium, patet has minutas reductas ad communem denominatorem $2 \cdot E$, esse inter se vt numeratores E & 2 . Igitur duæ simul $b a c m$ & $d c a$ sunt ad $d c a$ vt $\dagger E \dagger 2$. est ad $\dagger E$. Igitur totum semicylindræcum ad portionem insistentem super triangulo $a e d$, est vt $\dagger E \dagger 2$. ad $\dagger E$: ac proinde portio insistens super triangulo $a e d$ est totius semicylindræci minutia cuius numerator est $\dagger E$; denominator verò est $\dagger E \dagger 2$. Semicylindræcum autem est æquale cylindræco altitudinis $a b$, baseos quæ sit trianguli $c a d$ minutia habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E ; sicuti $b a c m$ sectio illius solidi ad parallelogrammum $b a c t$, quæ est sectio totius semicylindræci, est vt vnitas ad numerum E ; vt autem sectio $b a c m$ ad parallelogrammum $b a c t$, ita $h i l a$ sectio, ad parallelogrammum $h i l$; ergo vt ex 28. quarti tetragonismicorum liquet, totum semicylindræcum est ad cylindræcum altitudinis $a b$, baseos $c d a$, vt est sectio $b a c m$ ad parallelogrammum $b a c$, vel vt vnitas ad numerum E .

Rursus quia per corollarium primum superioris portio semicylindræci insistens super triangulo $a e d$, si conuertatur in cylindræcum altitudinis $e d$, dat basim quæ est dimidium gradus D quæ sit; cylindra-

B b

ceū, cuius altitudo $d e$, basis ponatur rectanguli $d a c$ minutia habens pro numeratore unitatem, pro denominatore numerum E , erit cylindraceum altitudinis $d e$; baseos æquantis quadratricem D . Minutia autem minutia habetur ex ductu numeratoris in numeratorem, & denominatoris in denominatorem; ergo illa minutia est rectanguli $d a c$, siue primi gradus, minutia habens pro numeratore numerum E , pro denominatore numerum $\dagger E E \dagger 2. E$; hoc est, numeratorem & denominatorem partiendo per numerum E , habens pro numeratore unitatem, pro denominatore numerum E auctum binario, quæ est minutia proposita; cum ergo hæc minutia sit gradus quæsitus D , ut ostendimus, patet gradum D esse ad primum ut est unitas ad numerum gradualem ipsius D .

Si igitur gradus C sit quintus ex inuentis in corollario primo superioris; erit D sextus, habebitque proprietatem propositam. Rursus si C ponatur esse sextus, erit D septimus &c. in infinitum; ergo quilibet gradus in ista serie infra primum sumptus, est ad primum ut unitas ad numerum gradualem ipsius, quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

Tres superiores propositiones huc transfulimus ex libro manuscripto ubi (ut in fronte eius exaratum extat) series quadratricum primi præsertim & secundi ordinis propagatur in infinitum, & traditur quadratura graduum absoluta in primo ordine: in secundo quoque, eorum, qui sedes numero pares occupant; eorum autem qui sedes numero impares obtinent, traditur quadratura hac conditione, ut nota prius sit quadratura ipsa circuli & hyperbolæ. Primi ordinis quadratrices eas appello quas hic demonstratas habes; secundi ordinis eas in quibus (Fig. 66.) primus gradus est figura comprehensa sub arcu circuli vel hyperbolæ centro a , axe $b g$ descriptorum; sub semiaxe $a b$ producto, si opus fuerit; & sub semiaxe $a d$ coniugato, vel sub parallelis ad ipsum: secundus autem gradus est quadratrix illi primo respondens axe $g b$, perpendicularo $a d$, brachio $a g$; istum secundum gradum iam olim appello semihederaceam, eò quod apud Proclum non multum absimilem figuram legerim $\mu\sigma\sigma\epsilon\delta\alpha$ dictam. Primum autem appellavi ordinem illum, quem hoc loco demonstrauimus, propterea quod primus ille videatur esse in quem incurrit Geometra istarum rerum indagator; nam inter figuras rectilineas parallelogramma videtur primum locum tenere, secundus verò huius ordinis gradus generationem habet perspicuam, cum eius linea quadratrix sit ipsius parallelogrammi diameter $a e$. Unde infero aliarum figurarum quadratrices lineas esse earum veluti diametros, gignuntur enim eadem prorsus lege, quæ diameter in parallelogrammo, & quoties centrum gravitatis distat à puncto suspensionis a , intervallo æquante dimidium brachij $a g$, bipartitur ipsam figuram. Ita si ponas arcum $b n a$ esse semicirculum diametro $b a$ descriptum, eius prima quadratrix genita brachio $g a$, perpendicularo $a d$, diuidet bifariam ipsum semicirculum; Unde & diametri effectum quasi primarium consequetur. Nam diametrum Aristoteles in problematum sectione decima quinta dictam vult ex eo quod $\mu\epsilon\tau\epsilon\gamma\epsilon\delta\omega\nu$ (ita enim appellat rectilincum $a b e f$ comparatum ad rectam $a e$) bifariam secetur per ipsam: verba illius hæc sunt $\eta\ \delta\tau\tau\ \delta\iota\mu\epsilon\tau\epsilon\varsigma\ \&\ \delta\iota\ \alpha\ \delta\iota\alpha\mu\epsilon\tau\epsilon\varsigma\ ,\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \delta\iota\alpha\mu\epsilon\tau\epsilon\varsigma$.

περ τὸ νομα ἑομομεναι, an quod diameter bifariam secat, sicut & nomen ipsum subindicat. sed quo pacto (ut hoc obiter inquiramus) id subindicat? In Ethic. quidem cap. 4. lib. 5. διχῶν, iudicem vult dictum quasi διχῶν, bipartitorem interpretari liceat: an ergo simili originatione διχῶν & appellabitur quasi διχῶν & bipertiens? Atamen quoniam ista nominis explanatio longius petita & improbabilis videtur, planius dixeris διὰ μέτρον componi ex particula ipsa διὰ, quæ Eustathio teste Iliad. γ. pag. 800. lin. 19. διχαγὼν diuisionem in duas æquas partes sæpe innuit. Caterum cum Archimedes lineæ illi quam quadratricem nominamus nomen non indiderit, & cum potuisset ut ex dictis patet non incongruè appellari diameter; ut illius peruulgatæ vocis vim significandi non extenderemus, quadratricis nomen assumpsimus, postquam legimus in Proclo Hippiam scripsisse de lineis τετραγωνίζουσα. Porro eadem quadratricis voce aliquoties designo lineam, aliquando verò figuram, quod satis ex aliis adiunctis liquet, & quod in sectionibus conicis passim usurari absque ulla rerum confusione video.

PROPOSITIO XLV.

Iisdem manentibus ut in quadragesima (Fig. 66.) ostendendum est Quadratricem a n b ut iacet manenti, axe a b, sustentaculo f e, æquiponderare quindecimam partem quadrati f a b e.

Intelligatur ad positionem rectæ f a ipsa figura b c d a aptari limbo a n b, & figuræ e l a f prima quadratrix brachio g a, perpendicularo a f genita aptari quoque sustentaculo f e; ergo cum ut i m recta ad m o, ita per tertiam tertij tetragonismicorum sit ipsa m o ad i l, & ut m o ad m n dimetientem quadratricis suæ, ita sit i l ad dimetientem quadratricis suæ, erit ex æquo ut i m ad m n, ita m o ad dimetientem quadratricis primæ respondentis figuræ e l a f: & alternando ut i m ad m o, ita m n ad dimetientem primæ illius quadratricis: sed ut m o ad m n, ita est dimetiens primæ quadratricis respondentis figuræ e l a f, ad dimetientem secundæ quadratricis respondentis eidem figuræ; ergo alternando ut m o ad dimetientem primæ quadratricis illius, ita m n ad dimetientem secundæ: sed ita etiam ostendimus esse i m ad m n: ergo ut i m ad m n, ita est ipsa m n ad dimetientem secundæ illius quadratricis. Igitur sicut in corollario quarto octauæ libri tertij ostendimus pro simili causâ, dimidium secundæ istius quadratricis aptatum sustentaculo f e, axe a b, ad positionem rectæ f a conductâ ratione æquiponderat figuræ a n b.

Restat ut ostendamus dimidium huius quadratricis esse decimam quintam partem quadrati a b, vel f a. Id verò ita ostenditur; libra g b suspensâ ex a, perpendicularo a f, brachio a g, quadratrix figuræ a b e l, siue tertij gradus ordinis primi, est quartus eiusdem; quadratrix autem toti quadrato a b e f, est secundus gradus ordinis eiusdem: ergo si ex æquiponderante totius auferatur æquiponderans partis e l a b, restabit æquiponderans alterius partis e l a f, nempe secundus gradus primi ordinis imminutus quarto eiusdem ordinis. Sed ut primus ad secundum, ita est

B b 2

secundus addititius ad tertium addititium, & ita quoque est quartus ablatius ad quintum ablatium: ergo secundus gradus primi ordinis imminutus quarto, habet pro quadratrice tertium gradum, imminutum quinto. Igitur quadratrix illa secunda est tertius imminutus quinto: sed tertius est triens, quintus est quinta pars quadrati $f e b a$: ergo secunda quadratrix est duæ decimæ quintæ partes quadrati $e f a b$: ergo dimidium illius est decima quinta pars quadrati $e f a b$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Cum istorum graduum, & eorum partium quadratura nota sit, notum quoque erit, ut patet, dimidium tertij gradus ex parte sumpti imminutum quinti parte inter easdem ad rectam $h g$ parallelas sumptâ: hoc est notum erit æquiponderans portioni figuræ $a n b m$ inter easdem parallelas designatæ.

PROPOSITIO XLVI.

Iisdem ut in trigesima nona manentibus (*Fig. 64.*) libræ planæ axe $i L$, sustentaculo $B t$, ostendendum toti figuræ $i P V L$ æquiponderans esse quadrantem tertij termini perspectæ progressionis, autum triente secundi, & imminutum septemdecim nouenis primi termini, siue quadrati $c d$.

Ex corollario primo septimæ tertij libri semicuneo expâso $c i h d$, cuius circulus genitor $z D d$, axe $i n$, sustentaculo $B t$, æquiponderans est æquale quadrato $c d$. Parallelogrammo $i c d n$, ex eodem corollario, æquiponderat dimidium quadrati $i c$, siue quadrantis termini tertij progressionis perspectæ: ergo figuræ $i h d n$ æquiponderat octaua pars tertij termini perspectæ, imminuta quadrato $c d$. Præterea ex vigesimæ sextæ corollario secundo dicylindraceum genitum ex figura $c u d p$, vel $i F d h$, & ex $c d h i$, ad positionem rectæ $c i$ est æquale cylindraceo altitudinis $B i$, baseos æquantis sextantem quadrati $c d$: cylindraceum autem cuius altitudo $i c$, basis $c u d p$ (quæ est triens quadrati $c d$, ut ex decima octaua tertij tetragonismicorum liquet) est per reciprocationis leges æquale cylindraceo altitudinis $c d$, cuius basis sit $a d c u d p$, vel ad trientem quadrati $c d$, ut est $i c$ dimidium secundi termini adiunctæ, ad $c d$ radium, siue ad primum terminum adiunctæ. Sed ut secundus terminus adiunctæ ad primum, ita est secundus perspectæ, siue circulus diametri $z d$, ad primum, siue ad quadratum $c d$: ergo cylindraceo baseos $c u d p$, altitudinis $c i$ est æquale cylindraceum altitudinis $c d$, baseos æquantis sextantem semicirculi genitoris. Igitur si ex hoc cylindraceo altitudinis $c d$ dematur aliud eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem quadrati $c d$, relinquetur cylindraceum altitudinis $c d$, baseos æquantis sextantem circuli genitoris diametro $z d$ descripti, imminutum sextante quadrati $c d$. Denique ex trigesima tertia constat æquiponderans figuræ $c u d p$ axe $c d$, sustentaculo $G N$, ita ut recta $c G$ æquet radium $c D$, esse decimam

quintam partem quadrati $c d$. Cum igitur æquiponderans figuræ super axe insistentis sit dimidium tertij gradus expositi & demonstrati in corollario quarto octauæ tertij libri; patet tertium gradum ad positionem rectæ $i c$, quorum primus sit quadratum $B i n t$, secundus $i h d n$, esse quadrantem tertij termini perspectæ, imminutum duplo quadrati $c d$: tertium verò gradum cuius primus sit idem quadratum $B i n t$, secundus figura $c u d p$ vel $i F d h$, esse duas decimas quintas partes quadrati $c d$. Quoniam igitur ex methodo decimæ tertiæ libri quarti, si in vnum conferantur tertius ille vterque gradus, vnà cum basi cylindracei altitudinis $c d$, quod æquale inuenimus dicylindraceo sectionis $F h q$, dimidium illius conflati, est æquiponderans figuræ $i F d n$ vt iacet manenti, axe $i n$, sustentaculo $B t$; patet æquiponderans istud esse octauam tertij termini perspectæ progressionis, auctam sextante secundi, & imminutam septemdecim decimis octauis primi, siue quadrati $c d$.

Quoniam igitur per corollarium primum trigessimæ nonæ æquiponderans figuræ $i P V L$ est duplum æquiponderantis figuræ $i F d n$, patet axe $i L$, sustentaculo $B t$ æquiponderans figuræ $i P V L$ vt iacet manenti esse quadrantem tertij termini perspectæ progressionis, auctum triente secundi, & imminutum septemdecim nouenis primi, siue quadrati $d c$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Duplum igitur huius æquiponderantis, siue tertius gradus respondens figuræ $i P V L$ ad positionem rectæ $i c$, posito primo $i B t n$, & secundo ipsâ $i P V L$, est dimidium tertij termini perspectæ progressionis, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis partibus primi termini, siue quadrati $d c$.

PROPOSITIO XLVII.

ESto vt in trigessimâ sextâ (*Fig. 65.*) semicycloides magna $c d a b$ genita circulo $a q b$, diametri $a b$; ex $c b$ abscissa sit $b z$ dupla rectæ $a b$, & descripta sit parabola $a h z$, cuius axis $a b$, ordinatim applicata $b z$, quam in illa trigesima sexta ostendimus esse quadratricem mixtam parallelogrammi mixti insistentis super arcu $c d a$ præditi altitudine $d s$ æquante rectam $b a$ vel $b u$, genitam libræ brachio $b u$ perpendicularo $b c$. Esto paræterea figura $b i f z$ cuius latus $z f$ æquet semicycloideos basim $c b$: ipsa autem sit quadratrix mixta in superiore propositione demonstrata, respondens eidem parallelógrammo mixto, sed genita libræ brachio $b r$ æquante rectam $b a$, & perpendicularo $b a$. Intelligatur ex istis figuris subcontrariè positis gigni dicylindraceum ad positionem plani $s d t$, (sicuti in simillimo casu intelligi oportuit in vigesima secunda propositione) altitudinis $b u$, baseos $b m z r$.

Ostendendum est figuram $b m z$ si esse ad positionem rectæ $b a$, condita ratione æqualem quadratrici secundæ quæ respondeat figuræ $b i f z r$, & generetur libræ $p z$ brachio $p b$ æquante ipsam $b z$, perpendicularo $b u$.

Compleatur parallelogrammum $b a P z$, ut $a P$ æquidistet ordinatim applicatæ $b z$, & tangat parabolam $a h z$ in a . Igitur figura $a n P z h$ est ceratoides parabolica, ac proinde quadratrix quadratricis respondens parallelogrammo $a b z P$, & genita libræ $o a P$ brachio $o a$ æquante rectam $a P$, & perpendicularo $a b$. Igitur ut in quadragesima propositione & sequente ostendimus, si figuræ $b i f z$ eodem brachio $o a$ vel $p b$ latere parallelogrammi $a o p b$ manente, gignatur prima quadratrix $b x A z$, respondens figuræ $b i f z$, & huius primæ quadratricis gignatur quadratrix altera $b y A z$, cylindraceum altitudinis $b a$ vel $b u$, baseos $b y A z$, erit æquale dicylindraceo genito ex ceratoide parabolica $a P z h$, & ex figuræ $b i f z r$. Quoniam verò dicylindraceum genitum ex $b i f z r$ & ex $a n P z h$, itemque aliud ex $b i f z r$ & ex $a h z b$ sunt simul cylindraceum genitum ex $b i f z r$ & ex parallelogrammo $a b z P$, patet figuram $b y A z m$ esse condita ratione æqualem figuræ $b i f z r$; ac proinde figuram $b y A z r$ esse condita ratione æqualem figuræ $b i f z m$, & si habeatur quadratrix secunda $b y A z r$, auferaturque ex $b i f z r$, relinqui spatium $b m z r$: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVIII.

Reuocato schemate propositionis quadragesimæ sextæ (*Fig. 64.*) ex recta $i o$ abscindatur $o C$ ipsi æqualis.

Ostendendum est librâ $C L$ suspensâ ex i , perpendicularo $i c$, brachio $C i$, æquiponderans figuræ $i P V L$ integrè sumptæ esse æquale trienti secundi termini perspectæ progressionis, deductis octo quadragesimis quintis partibus primi, siue quadrati $c d$.

Quoniam figuræ $i F d c$, $i P V c$ ita insistant super basi $i c$ ad positionem rectæ $i L$, ut dimetiens maioris sit dupla dimetientis minoris, ex ultima quarti tetragonismicorum liquet centrum grauitatis pertinens ad maiorem distare duplo longius ab axe $c i$, quàm distet grauitatis centrum $i F d n$. Igitur librâ grammicâ $z d$ suspensâ ex c perpendicularo $c i$, brachio $z c$ æquiponderans maiori erit quadruplum eius quod æquiponderat minori; nam si minoris centrum transferatur in centrum maioris æquiponderabit illi duplum prioris æquiponderantis; ergo minoris duplum habens idem centrum maioris figuræ postulat quadruplum primi æquiponderantis. Atqui minoris duplum in centro maioris collocatum habet idem æquiponderans, quod maior figura: ergo maiori figuræ æquiponderat quadruplum minoris, brachio $z c$: ergo per octauam secundi tetragonismicorum maiori figuræ brachio $c I$ duplo brachij $c z$, æqui-

ponderat duplum spatij, quod, brachio cz , æquiponderat minori. Id ipsum verò pari pacto ostenditur de æquiponderante ipsi quadratrici primæ: ita vt quadratrix secunda figuræ $iPVC$ genita brachio cI , sit dupla quadratricis secundæ respondentis minori $i h d c$, brachio zc .

Rursus figuræ $cihd$ brachio cz quadratrix secunda est ex decima septima tertij duæ nouenæ quadrati cd , figuræ autem $cudp$ vel $iFdh$ per trigessimam secundam est duæ quadrati cd decimæ quintæ partes: ergo per subtractionem quadratrix secunda figuræ $iFdc$ genita brachio cz est quatuor quadragesimæ quintæ partes quadrati cd . Igitur figuræ $iPVC$, brachio cI , octo quadragesimæ quintæ partes quadrati cd .

Præterea quoniam ex dimensione circuli Archimedeæ constat parallelogrammum $icdn$, cuius latus c æquat peripheriam DEd , esse æquale dimidio circuli genitoris, totum parallelogrammum $icVL$ erit æquale circulo diametri zd ; sed istius parallelogrammi brachio cI quadratrix secunda est triens ipsius, vt ex quadragesima quinta constat, vel aliunde ex duodecima tertij tetragonismicorum adiunctâ parabolæ quadraturâ: ergo si de quadratrice secunda totius parallelogrammi dematur quadratrix secunda partis $iPVC$, restabit quadratrix secunda alterius partis $iPVL$ nempe triens circuli genitoris semidiametro cd descripti, imminutus octo quadragesimis quintis quadrati cd , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Si non sumatur nisi iPT pars totius $iPVL$, inuenietur pari pacto quadratrix secunda illius, ex propositionibus vnde eruta est pro tota $iPVL$.

PROPOSITIO XLIX.

Reuocato (*Fig. 65.*) schemate propositionis quadragesimæ septimæ, figura $b m z r$ est bes circuli geniti semidiametro $a b$, deductis quinquaginta duabus quadragesimis quintis partibus quadrati $b a$.

Quoniam Figura $bifzr$ est per corollarium tertium trigessimæ nonæ æqualis circulo semidiametri $b a$, deductis quatuor trientibus quadrati $b a$, figura autem $bifzm$, siue quadratrix secunda figuræ $bifzr$ (eam enim esse eiusmodi ostendimus in quadragesima septima) est per superiorem triens eiusdem circuli, deductis octo quadragesimis quintis eiusdem quadrati: ergo per subtractionis leges figura $b m z r$ est bes circuli geniti semidiametro $a b$, deductis quadrati $b a$ quinquaginta duabus quadragesimis quintis partibus, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Sicuti in vigesima secunda ostendimus si arcus $c d a$ sit quadrans peripheriæ circularis basim cylindracei altitudinis $b a$, geniti ex quadratricibus mixtis subcontrariè positis & respondentibus parallelogrammo

mixto altitudinis ds æquantis rectam ba , æquare quadratricem mixtam respondentem ipsis quadratricibus mixtis insistentibus super arcu cd , posito libræ brachio singularum secundarum quadraticum illo, quò subcontraria quadratrix prima genita fuerit. Ita hîc, & generaliter quæcunque sit curua cd , idipsum ostendetur adhibito corollario secundo decimæ octauæ, vbi ostenditur vtrique mixtæ quadratrici primæ, vel vtrique vngulari superficiei hoc pacto sumptæ idem respondere æquiponderans, prout ibi res explicata fuit. Superest vt veniamus ad solutionem problematum ab Anonymo, cui nunc Dettonuillæus nomen est, propositorum sub initium Octobris postea quam lapsus fuit tempus præstitutum inuentioni aliorum, quatuor antè mensibus propositorum.

PROPOSITIO L.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) esto semicycloideos magnæ basis cb , axis ba arcus cd .

Ostendendum est si recta ba ita secetur in g , vt portio bg sit duotrientes totius ba , & per g agatur gd parallela basi bp , grauitatis centrum totius curuæ cd esse in recta gd .

Quoniam parallelogrammum mixtum insistens curuæ cd , altitudinis ds , æqualis rectæ ba , est æquale parallelogrammo $abzP$, est enim cd curua æqualis rectæ bz ex generatione quadratricis mixtæ expansæ; ipsa autem ahz est per trigesimam sextam quadratrix expansa respondens eiusmodi parallelogrammo, libræ brachio bu , perpendicularo bc : ergo vt suspensum, siue parallelogrammum $abzP$, ad æquiponderans, siue ad figuram ahz , hoc est ex parabolæ quadratura, vt ternarius ad binarium, ita est brachium u ad centri grauitatis respondentis parallelogrammo mixto, distantiam ab axe bp : ergo centrum grauitatis parallelogrammi mixti geminati infra & supra planum pda , est in recta gd : sed per decimam septimam idem est centrum grauitatis curuæ cd , & parallelogrammi mixti illi insistentis: ergo &c.

COROLLARIUM I.

Natura parabolæ ostendit satis, si quæraturs linea basi cb parallela incedens per centrum grauitatis arcûs ad , quamuis d non congruat puncto c , illam ita diuidere axis ba portionem ga , vt pars ad basim gd sit dupla reliquæ. Ista verò linea basi bc parallela incedens per grauitatis centrum curuæ cd , non est, vt patet, inuentu difficilis, si semel constiterit, quadratricem mixtam expansam parallelogrammi mixti esse parabolam ahz .

COROLLARIUM II.

Vides, erudite Lector, has linearum quadratrices competere per se primò rectangulis mixtis, quæ sunt superficies, ac proinde quamuis quadrataria superficies nulli primariò competat nisi superficiei suspensæ: eam
tamen

tamen vtiliter transferri secundario ad lineas; sicuti si quis cylindracei quadratrices solidas vsurparet ad inueniendum centrum grauitatis baseos (potest enim perinde; cum quæ est proportio inter quadratrices solidas in cylindro vel cylindraceo, eadem sit inter quadratrices planas respondentes basi) vel è contrario si quadratrices baseos planas pro solidis cylindri aut cylindracei vsurparet.

PROPOSITIO LI.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) ex basi $c b$ auferatur $c B$ æqualis bessi rectæ $b a$, ac proinde æqualis rectæ $b g$, & per B ducatur recta $B D$ parallela axi $b a$ occurrens rectæ $g d$ in D .

Ostendendum est punctum D esse grauitatis centrum curuæ $c d a$ ut iacet manentis.

Quoniam enim suspensum rectangulum mixtum æquale est rectangulo $a b z P$, hoc est bis quadrato $a b$; ex corollario autem tertio trigessimæ nonæ quadratrix mixta expansa $b i f z r$ est æqualis circulo semidiametri $b a$, imminuto quatuor trientibus quadrati $b a$; ut sunt duo quadrata $b a$, vel duo termini primi progressionis perspectæ, ad circulum vel ad secundum terminum eiusdem progressionis imminutum quatuor trientibus primi, ita erit brachium $b r$ vel $b u$, hoc est primus terminus adiunctæ progressionis, ad dimidium secundi, imminutum bessi primi $b u$. Cum igitur secundus adiunctæ sit dimidium peripheriæ circuli semidiametro $b a$ descripti, erit quadrans peripheriæ eiusdem: sed peripheriæ circulorum semidiametris $b e$ vel $e a$ & $b a$ descriptorum, sunt in ratione semidiametrorum: ergo quadrans peripheriæ maioris æquat duos quadrantes, siue totum arcum $a q b$ minoris; sed toti $a q b$ æqualis est recta $b c$: ergo recta $b B$, si $B D$ transeat per centrum lineæ $c d a$, est ipsa $b c$ imminuta duobus trientibus rectæ $b a$; ac proinde rectæ statuimus portionem $c B$ esse bessiem rectæ $b a$.

COROLLARIUM.

Nisi calculus aliquo vitio nobis incognito laborat, cum rectæ $c B$, $b g$ sint æquales, patet rectangulo mixto idem respondere æquiponderans tam perpendiculari $c b$, quàm $c l$, posito brachio eodem; ac proinde centrum grauitatis esse in recta $c D$ constituyente cum recta $b c$ angulum semirectum.

PROPOSITIO LII.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) intelligatur $c d a b$ circumuolui circa axem $c b$.

Ostendendum est superficiem istius peripherici esse æqualem bessi rectanguli contenti sub rectâ $a b$, & sub recta æquante duplum peripheriæ circuli descripti semidiametro $b a$.

Istud patet ex eo quod quadratrix mixta parallelogrammi mixti geni-

C c

ta brachio bu , perpendicularo bc (hoc est superficies vngularis abscissa plano per basim bc incedente, ex superficie curua cylindracei recti cuius basis cda) ad positionem plani sd t se habet ad superficiem curuam periphericam iam descriptam in eadem perpetuò ratione, sicuti in corollario secundo decimæ nonæ annotauimus cum Gregorio à S. Vincentio. Illa autem ratio vt patet est semidiametri dt ad sui circuli peripheriam. Cùm igitur ista vngularis superficies expandatur in parabolam ahz , cuius ordinatim applicata bz est dupla rectæ ba ; & cùm ista parabola sit bes rectanguli abz , patet quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) intelligatur cda circumuolui circa axem a b .

Ostendendum est superficiem istius peripherici esse æqualem duplo tertij termini perspectæ progressionis (cuius primus terminus sit quadratum ab , secundus sit circulus semidiametro a b descriptus) imminuto octo trientibus secundi.

Quoniam per corollarium tertium trigessimæ nonæ quadratrix ista siue superficies vngularis expansa est $bifzr$, ipsa autem $bifzr$ est per corollarium tertium trigessimæ nonæ æqualis secundo termino progressionis perspectæ iam propositæ demptis quatuor trientibus primi: cùm aliunde radius ad peripheriam sui circuli sit vt primus adiunctæ progressionis terminus ad bis secundum eiusdem progressionis, patet vt est primus adiunctæ ad bis secundum, ita secundum perspectæ imminutum quatuor trientibus primi esse ad bis tertium perspectæ imminutum octo trientibus secundi: tertius autem perspectæ est vt patet ex initio tertij libri, quadratum rectæ bc , vel peripheriæ aqc : ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIV.

Superficies (*Fig. 65.*) peripherica circa basim bc describi intelligatur motu figuræ adc , & eius cætrum grauitatis sit B .

Ostendendum est rectam bB esse ipsam bc imminutam tredecim decimis quintis radij a b .

Iam ostendimus in quinquagesima, per plana plano sd t parallela secari proportionaliter superficiem periphericam, & superficiem cuneatam vel vngularem, cuius singulæ perpendiculares ad basim rectanguli mixti sunt semidiametri circulorum illorum qui sunt sectio periphericæ superficiei. Itaque hîc nobis restat ostendere si planum plano sd t parallelum, incedens per grauitatis cætrum vngularis illius superficiei, quæ facta est à plano per rectam cb incedente & secante superficiem cylindraceam, faciat in basi sectionem BD ; rectam bB esse ipsam bc imminutam tredecim decimis quintis radij a b .

Quoniam superficies cunealis æquat figuram ahz b siue quatuor trientes quadrati ab , vel primi termini perspectæ progressionis; quadratrix autem eiusmodi cuneatæ est, vt ostendimus in corollario quadragesimæ nonæ, bes circuli semidiametro ab geniti, vel secundi termini, deductis quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi. Si vt quatuor trientes primi termini perspectæ, ad duos secundi imminutos quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi, ita fiat radius ab , vel primus terminus adiunctæ, ad quartam lineam, ista quarta erit dimidium secundi termini adiunctæ (is verò est dimidium peripheriæ circuli semidiametro ab descripti) imminutum tredecim decimis quintis radij ab . Atqui dimidium peripheriæ circuli semidiametro ab descripti est duplum rectæ cb : est enim recta cb æqualis peripheriæ bq a siue dimidio peripheriæ integræ circuli semidiametro ae descripti: peripheriæ verò circulorum sunt inter se vt semidiametri; ergo dimidium peripheriæ circuli semidiametro ba descripti, est duplum dimidij peripheriæ descriptæ semidiametro ea ; vel est duplum rectæ cb . Ergo illud dimidium secundi termini adiunctæ æquat rectam bc : igitur recta bB est &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LV.

Iisdem positis (*Fig. 65.*) superficies peripherica circa axem ab describi intelligatur motu figuræ $adcb$, & eius centrum grauitatis sit g .

Ostendendum est si primus perspectæ progressionis terminus sit quadratum ba , & secundus sit circulus semidiametro ab descriptus; vt secundus terminus imminutus quatuor trientibus primi, se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi; ita esse rectam ub ad bg .

Quoniam enim cunealis superficies abscissa ex cylindracei recti superficie per planum cuius basi sectio sit recta ba , inclinatum ad eandem basim gradibus quadraginta quinque, est suspensa axe bc , sustentaculo ul ; vt est ipsum suspensum ad æquiponderans suum, ita erit recta ub ad bg . Sed dimidium suspensi quod videlicet insistit arcui cda (qui est dimidium totius arcûs cycloideos integræ) est, per corollarium tertium trigesimæ nonæ, secundus terminus perspectæ imminutus quatuor trientibus primi; æquiponderans autem respondens illi dimidio est per quadragesimam nonam, eiusque corollarium, bes secundi deductis quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi; ergo vt terminus secundus progressionis perspectæ imminutus quatuor trientibus primi se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi, ita est recta bu ad bg : ergo g est grauitatis centrum cunealis superficiæ: ergo vt in superiori ostendimus, est quoque centrum periphericæ superficiæ, quod erat demonstrandum.

In præsentis propositionis calculo, sicuti & in duabus ultimis tertij & quarti libri, pro prima & secunda magnitudine quatuor proportionalium, usurpauimus terminos progressionis perspectæ, qui sunt figuræ planæ; loco tamen illorum possent in eisdem verbis adhiberi termini adiunctæ, qui sunt lineæ rectæ. Id verò ex eo patet, quod perspectæ & adiunctæ termini ponantur progredi in eadem ratione.

PROPOSITIO LVI.

Intelligatur (*Fig. 65.*) in plano *supposito* cba (ita enim illud vocari placuit in vndecima propositione) qualibet curua cda , & ex eius quolibet puncto d excitata sit perpendicularis ds ad planum suppositum; per curuam cda intelligatur moueri recta ds , vel alia illi parallela, & describere superficiem cylindraceam rectam; in ea verò superficie intelligatur qualibet figura cuius dimetiens sit ds . In plano eodem supposito secent se duæ rectæ cb , ba ad angulos rectos in b ; ipsæque cb , ab sunt oductæ ab extremis curuæ punctis. Sint ab , bu æquales, & constructum sit parallelogrammum $bule$. Esto $lgbu$ figura similis, æqualis, & similiter posita figuræ cda , ita ut si cb congruere ponatur rectæ lu , & ba rectæ ub , curua cda congruat curuæ lgb ; & si dt perpendicularis ad rectam cb producatur occurrens curuæ in G , & rectæ lu in H , dimetientes HG , td sint æquales. Intelligatur præterea figura $llfu$ circa axem lu ita opponi figuræ $lgbu$, ut ordinatim applicatæ GH , HL sint æquales; ac proinde si circa axem manentem lu intelligatur circumferri $lgbu$, postquam iacuerit ad partes oppositas, congruat figuræ $llfu$, punctumque G puncto L . Rursus in superficie cylindracea intelligatur figura cuius dimetiens sit $d\pi$, & ita se habens ad figuram cuius dimetiens ds , ut sicut est Ht ad td , ita sit dimetiens $d\pi$, ad $d\pi$; ut figura dimetientis $d\pi$ sit axe cb , sustentaculo lu ; quadratrix alterius figuræ cuius dimetiens ds ; de qua quadratrice actum est in corollario primo decimæ nonæ. Ut autem ad positionem plani sd sustentaculo lu sine errore vlllo aptetur, intelligi debet figura $bglf$ esse basis cylindracei recti, & in superficiem illius, ad positionem plani sd , ita transferri quadratrix dimetientis $d\pi$, ut medietas eius dR transferatur in GM , altera autem medietas in LN ; ut duarum GM , LN supra & infra planum suppositum æquo intervallo prominentium, centrum gravitatis sit H . Per b agatur bT parallela perpendiculari ds .

Ostendendum est duas simul superficies dimetientium GM , LN ad positionem plani fdt æquiponderare condita ratione superficiei cuius dimetiens fd , libræ planæ axe cb , perpendicularo plano Tbc .

Ista est veluti appendix vigesimæ octauæ propositionis libri quarti, vbi planam libram definiuimus simillimâ methodo, postulauimusque magnitudines sibi ita respondentes hinc & inde ad axis $b c$ partes oppositas, æquiponderare sibi mutuò; id verò etiam nunc pro ista appendice postulamus. Cum enim figura dimetientis $d\pi$, & figura limbo $bGILF$ insistens & quadratrix sustentaculo lu aptata habeant similes & æquales bases, habeantque insuper ad positionem plani fdt æquales dimetientes, non possunt non esse condita ratione æquales. Igitur cum quadratrix cuius dimetiens $d\pi$, & suspensa figura cuius dimetiens ds , habeant eandem basim $cd a$, habebunt quoque eandem æquiuolenter basim cum æquiponderans figura limbo $bGILF$ insistens, tum suspensa dimetientis ds , illi respondens; ergo cum aliunde æquidistantes dimetientes suspensæ figuræ & aptatæ sustentaculo lu , sint reciproce vt Ht brachium libræ grammicæ Hd , ad longitudinem td , idemque eueniat quodcunque axis cb punctum sit t , verosimillimum est superficiem suspensam, & superficiem ita aptatam sibi inuicem æquiponderare ad positionem plani fdt ; hoc autem quod verosimillimum esse iam diximus, repositum volumus inter postulata. Qua in re doleo (vt hoc obiter occasione data dicam) Recentiores nonnullos peccare, dum similes analogias pro demonstrationibus venditant; quod si pergant facere pacatissimam Antiquorum Geometriam turbabunt iurgiis atque contentionibus; & quæ sola scientiarum humanarum fuerat tota demonstratio, fiet partim opinio, partim fides humana; partim coniectura; quod quidem (ni fallor) in hac schola tam monstrum sapit, quàm quod in Logica partim hircus partim ceruus fingitur, vt de hircoceruis & chimæris disputari possit. At verò quoties aliquid inter postulata ponitur, nulla potest esse controuersia, quandoquidem qui illud postulat, nihil aliud contendit quàm eo dato cætera Geometricè inferri.

COROLLARIUM.

Recta ds ad planum suppositum cba perpendicularis ponatur æqualis quadranti peripheriæ circuli semidiametro dt descripti; eadem perpendicularis intelligatur manens in plano fdt curuari in quadrantem peripheriæ centri t , ita vt superficiei ita incuruatæ centrum grauitatis sit V ; id verò similiter factum intelligatur in omnibus erectis ds , vbicunque sumatur punctum d . Cum recta td ad tV maneat in vna eademque ratione, quodcunque axis cb punctum sit t ; manifestum est æquiponderans aptatum sustentaculo lu , & respondens erectæ ds , ad æquiponderans quod eidem ita incuruatæ respondet, se habere, vt se habet recta td ad tV , vel vt quadrans peripheriæ circularis ad radium suum; hanc enim

esse proportionem rectæ dt ad tV , ostendimus in vigesima prima propositione. Igitur æquiponderans superficiei periphericę genitę ex ita incuruata & incumbente in dt , erit ad æquiponderans cuneatę superficiei, cuius dimetiens est ds , sicut est recta tV ad td , vel radius ad quadrantem suę peripheriæ. Igitur, cum vt demonstrat Gregorius à S. Vincentio libri noni propositione septuagesima quarta, incuruatio ista non impediatur quominus figura incuruata sit æqualis erectę, quando arcus cd a est circularis, & cum eadem ratione istud ipsum appareat, quando non est circularis; patet istis duobus iuxta modum antè præscriptum aptatis spatiis eidem sustentaculo lu , axe bc , æquiponderantia esse inter se vt ipsa spatia: sunt ergo inter se vt quadrans peripheriæ circularis ad suum radium. Istorum spatiorum aptatorum sustentaculo lu vnum vocetur *maius*, illud videlicet quod æquiponderat figurę erectę; alterum *minus*, quod curuatę. Per grauitatis centrum figurę erectę geminatę ducatur recta $d g$ æquidistans basi bc , complens parallelogrammum $gd t b$; vt est quadrans peripheriæ circularis ad radium suum, ita ponatur recta td , ad $t \phi$ ex ipsa td abscissam, & compleatur parallelogrammum $p t \phi Y$. Quoniam in recta $d g$ ponitur grauitatis centrum erectę, & ipsi erectę æquiponderat maius spatium axe cb ; patet vicissim maiori spatio æquiponderare spatium æquale erectę eodem pacto aptatum sustentaculo gd . Igitur si sustentaculum gd mutetur in $Y \phi$, illique pari modo aptetur æquiponderans *maiori*; istud æquiponderans, per octauam secundi tetragonismicorum, ad illud quod sustentaculo gd aptatum fuit, se habebit vt recta td ad $t \phi$, hoc est, vt quadrans peripheriæ circularis ad suum radium. Igitur cum vt quadrans peripheriæ circularis ad radium, ita quoque sit spatium *maius* ad *minus*; si spatium *maius* aptatum sustentaculo lu conuertatur in *minus*; patet æquiponderans illi ita conuerso aptatum sustentaculo $Y \phi$, esse ad æquiponderans, eidem $Y \phi$ aptatum ante conuersionem, vt est radius ad quadrantem peripheriæ circularis: sed ita etiam est erectę figurę siue spatium aptatum sustentaculo gd ad spatium aptatum ante conuersionem sustentaculo $Y \phi$; ergo *maiori* conuerso in *minus*, hoc est, *minori* ad sustentaculum lu aptato spatium aptatum sustentaculo $Y \phi$ æquiponderans est æquale erectę figurę: sed eidem erectę figurę est æqualis conuexa & curuata figura, eadēque curuata ponitur æquiponderare illi eidem *minori* spatio vt iacet manenti. Igitur cum duorum spatiorum æqualium, & eidem vt iacet manenti seorsum æquiponderantium, grauitatis centrum sit in eodem sustentaculo: vnus autem istorum æquiponderantium centrum grauitatis sit ex constructione in recta ϕY , in eadem quoque recta erit centrum conuexę & incuruatę superficiei.

Caterum quod de proportionem interuallorum quibus centra cuneatę superficiei, & periphericę illius geminatę distant à recta bc , assumit vt certum Dettonuillæus sub finem epistolę ad D. Carcaui scriptę, pag. 23. assumit quidem, sed non demonstrat. Nos verò demonstrationem no-

stram postulato illo fatemur niti quod in præsentī propositione exposuimus, necnon & alio quod in corollario isto indicauimus, nempe superficiem curuatam esse æqualem erectæ: si enim foret inæqualis, demonstratio nulla existeret. Simillimum isti est quod in trigesima quarti libri demonstrauimus.

PROPOSITIO LVII.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) esto $c d a b$ semicycloides magna, & circa basim $c b$ intelligatur, vt in quinquagesima, generari superficies peripherica circumductu figuræ $c d a b$; consideretur autem eius pars quæ ad plani $T b c$ partes a iacet, & in recta $g D$ ad basim $b c$ parallela iaceat grauitatis centrum eiusmodi peripheriæ.

Ostendendum est rectam $b g$ esse quatuor quintas partes rectæ, quæ ad totam $b a$ sit, vt radius ad quadrantem peripheriæ suæ circularis.

Primaria superficies cuneata cunei cuius acies $c b$, extenditur in parabolicam figuram $a h z b$, cui axe $b z$, sustentaculo $l u$, æquiponderant duæ quintæ partes ipsius, ac proinde quatuor quintæ partes ipsius sunt tertius terminus, quorum primus $a b z P$, secundus ipsa $a h z b$ ad positionem rectæ $a b$. Istam porrò cuneatam superficiem expandi in parabolicam figuram $a h z b$ constat ex trigesima sexta; ex qua etiam constat rectas $t d$, $d s$, $h r$ esse æquales, ac proinde vt est $H t$, vel $b u$, ad $t d$ vel $d a$, vel $r h$; ita esse ipsam $d s$, vel $r h$, ad dimetientem suæ quadratricis: sed ita est $r h$ ad duplam dimetientis respondentis suæ quadratrici genitæ axe $b z$ sustentaculo $l u$ ad positionem rectæ $a b$; ergo cuneatæ superfici ei insistentis super arcu $c d a$ æquiponderans axe $c b$, sustentaculo $l u$ est quatuor quintæ partes ipsius cuneatæ superfici ei. Vt igitur suspensum ad quatuor sui quintas partes, ita est brachium $u b$ ad distantiam centri cuneatæ superfici ei geminatæ ab axe $b c$; ergo illud centrum cuneatæ distat ab axe $c b$ quatuor quintis partibus rectæ $b a$. Cum igitur, per præcedentis corollarium, vt quadrans peripheriæ circularis ad radium suum, ita sint quatuor illæ quintæ partes radij ad rectam $b g$, patet ipsam $b g$ esse quatuor quintas partes rectæ ad quam $a b$ recta sit vt quadrans peripheriæ circularis ad suum radium, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) circa axem $b a$ intelligatur circumductu semicycloideos magnæ $c d a b$ describi superficies peripherica; consideretur autem eius portio quæ ad plani $T b a$ partes c iacet, & in recta $B D$ ad axem $a b$ parallela, iaceat grauitatis centrum eiusmodi periphericæ superfici ei.

Ostendendum est vt est circulus semidiametro $b a$ descriptus, vel

vt secundus terminus progressionis perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi termini, vel quadrati ba , ad dimidium tertij termini, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, siue quadrati ba ; ita rectam, quæ ad radium b a sit vt ipse radius ad quadrantem peripheriæ, esse ad rectam bB .

Ex superioris progressu patet vt superficies curua cunei geniti ductu plani transuersi per rectam ba , insistentis arcui cda , est ad æquiponderans suum, axe ba , sustentaculo rn latere quadrati abr , genitum; ita esse rectam br vel ba , ad bt rectam posito quod tV parallela axi ba incedat per grauitatis centrum cuneatæ superficiiei geminatæ. Ex eiusdem methodo patet vt quadrans peripheriæ circuli est ad suum radium, ita esse rectam bt ad bB . Vt est quadrans peripheriæ ad radium suum, ita br ponatur esse ad bI : ergo quoniam ita quoque est recta bt ad bB , erit alternando vt br ad bt , ita bI ad bB : sed br ad bt est vt superficies cuneata ad æquiponderans, ergo ita quoque est recta bI ad rectam bB .

Rursus quoniam superficies cuneata in hoc casu expanditur in superficiem $bifz$, & illi est æqualis, ipsa autem $bifz$ est, per corollarium tertium trigessimæ nonæ, æqualis circulo semidiametri ba imminuto quatuor trientibus quadrati ba ; æquiponderans verò illi insistenti super arcu cda est ex superioris methodo spatium inuentum in corollario quadragesimæ quartæ, nempe (si ponatur primus perspectæ terminus quadratum ba , & secundus sit circulus semidiametro ba descriptus) dimidium tertij termini perspectæ, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi: ergo vt secundus terminus perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi se habet ad dimidium tertij, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, ita est recta bI ad bB , quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

Proponitur in casu vno calculus octo problematum quorum solutionem Anonymus ab Europæ Geometris exegit sub finem anni 1658. *Eius prouocatio relata habetur supra in scholio quarto vltimæ propositionis libri quarti.*

Reuocetur schema propositionis trigessimæ sextæ (Fig. 65.) & in eo cd a b sit semicycloides magna, cuius basis bc , circulus genitor a qb , descriptus diametro ab , centro g .

Primò quæritur totius curuæ (cuius dimidium est cda) centrum grauitatis. *Obtinetur per quinquagesimam propositionem presentis libri.*

Recta ba ita diuidatur in g , vt bg sit bes totius ba . Dico g esse grauitatis centrum limbi integri cycloideos magnæ.

Secundò

Secundò quæritur grauitatis centrum curuæ c d a. *Istud habetur ex quinquagesima prima superiore.*

Ex recta c b abscindatur c B æqualis rectæ b g, vel duobus trientibus axis b a; completo parallelogrammo g b B D, aio punctum D esse grauitatis centrum curuæ c d a.

Tertiò circa axem c b intelligatur circumuolui curua c d a, & gigni superficies: quæritur dimensio istius superficiei. *Datur ex quinquagesima secunda methodo.*

Dico superficiem istam esse æqualem besii rectanguli contenti sub recta a b, & sub recta æquante duplum peripheriæ circuli semidiametro b a descripti.

Quartò circa axem b a intelligatur circumuolui curua c d a, & gigni superficies; quæritur dimensio istius superficiei. *Illam exhibet quinquagesima tertia.*

Aio superficiem istam esse æqualem duplo tertij termini perspectæ progressionis (cuius primus terminus sit quadratum a b, secundus sit circulus semidiametro a b descriptus) imminuto octo trientibus secundi.

Quintò quæritur grauitatis centrum superficiei totius suprà descriptæ circa manentem c b, motu curuæ c d a. *Habetur ex quinquagesima quarta.*

Ex recta c b abscindatur c B æquans tredecim partes decimas quintas axis b a. Aio punctum B esse grauitatis centrum quæsitum.

Sextò quæritur grauitatis centrum superficiei totius suprà definitæ circa manentem a b, motu curuæ c d a. *Habetur ex quinquagesima quinta.*

Recta b a dupla sit a u, & vt secundus terminus progressionis perspectæ, definitæ in quarti quæsitæ solutione, imminutus quatuor trientibus primi se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis termini primi, ita fiat recta u b vel b a ad b g abscissam ex b a. Dico punctum g esse grauitatis centrum postulatam.

Septimò intelligatur ex puncto b erigi b T perpendicularis ad planum c b a, & plano T b c superficies motu curuæ c d a circa manentem c b descripta diuidi in duas partes, quarum quæ ad punctum a vergit hîc consideratur, eiusque centrum grauitatis quæritur. *Habetur ex quinquagesima septima propositione.*

Ex recta b a rescindatur b g quatuor videlicet quintæ partes rectæ quæ ad totam b a sit vt radius ad quadrantem peripheriæ suæ circularis; retineatur punctum B inuentum in quæsito quinto, & compleatur parallelogrammum g b B D. Aio punctum D esse centrum quæsitum.

D d

Octauò intelligatur plano Tba superficies motu curuæ cda circa manentem ab descripta diuidi in duas partes, quarum eam quæ ad punctum c spectat, hic contemplamur, eiusque centrum grauitatis inquirimus. *Obtinetur ex quinquagesima octaua superiore.*

Vt secundus terminus progressionis illius perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi termini, vel quadrati ba , se habet ad dimidium tertij termini, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, siue quadrati ba , ita recta, quæ ad radium ba sit ut ipse radius ad quadrantem peripheriæ, fiat ad rectam bB . Maneat punctum g repertum in quæsito sexto, & compleatur parallelogrammum $gbBD$. Aio punctum D esse centrum quod quærimus.

COROLLARIUM.

Calculus octo problematum absoluimus in vno casu totius semicycloideos magnæ; ex illo verò facile poterit ad alios casus transitus fieri, si quis diligens calculator rem aggrediatur, & methodum singularum propositionum à quinquagesima inchoando, accuratè obseruet. Porro ad ista omnia soluenda non inutile erit opus retexendo annotare quæ nobis necessaria fuerint. Primò quidem (data cum opus fuerit quadratura circuli) distantiam centri grauitatis curuæ cda à basi cb & ab axe ab obtinuimus in quinquagesima & in subsequente, ex cuneatis superficiebus expansis $ahzrb$, $bifzr$. Secundò in quinquagesima secunda & quinquagesima tertia ex iisdem superficiebus cuneatis habuimus dimensionem superficierum periphericarum circa basim, & circa axem descriptarum. Tertiò in quinquagesima quarta & quinquagesima quinta ex figura $bmozr$ cognita assequuti sumus centra grauitatis earundem periphericarum superficierum circa basim & axem genitarum. Quartò demum ex duplo æquiponderantis superficiei cuneatæ $ahzrb$, axe bz , sustentaculo lu ; itemque ex duplo æquiponderantis superficiei alteri cuneatæ $bifzr$ axe bz sustentaculo aP reperimus distantiam centri grauitatis dimidiarum superficierum ab axe, & à basi. Vnde liquet ad solutionem problematum istorum, inueniendam esse dimensionem rectæ cda , quadraturam figurarum $ahzrb$, $bifzr$, $bmozr$, & æquiponderantium figuræ quidem $bahzr$ axe bz , sustentaculo lu ; figuræ verò $bifzr$ axe bz sustentaculo aP . Manifestum quoque est methodum esse generalem cuiuscunque modi sit curua cda , dummodo quadraturâ figuræ cda bpositâ, inueniatur recta æqualis curuæ cda , & quadratura figurarum & æquiponderantium iam dictorum. Quapropter longè difficilior est in singulis curuarum generibus inuenire illas dimensiones & quadraturas, quàm generaliter pronuntiare quid præstandum sit: istud enim ex methodo adhibita in vno genere curuarum apertè patet.

Nonnulla alia, quæ demonstrantur in præfenti libro, summata indicantur.

Primò quidem in propositione secunda calculus datur solidi cuiusdam, ad cuius generationem conueniunt spiralis linea & conus.

Secundò in septima, octaua, nona eiusque corollario ostenditur Veterum more quælibet curua continua esse æqualis rectæ lineæ inter duas alias rectas interceptæ.

Tertiò in decima demonstratur, conuolutæ & euolutæ figuræ methodo, proportio conii ad cylindrum, & superficiei conii recti ad basim eiusdem, esse illa ipsa, quæ ab Archimede demonstrata extat.

Quartò in vigesima prima & vigesima secunda datur calculus centri grauitatis arcuum circuli, & peripheriarum sphaëricarum.

Quintò in vigesimæ tertiæ corollario habetur triangulorum cylindricorum centrum grauitatis, vnà cum grauitatis centro sectoris sphaërici à D. Pascasio propositi in datis ad nos literis.

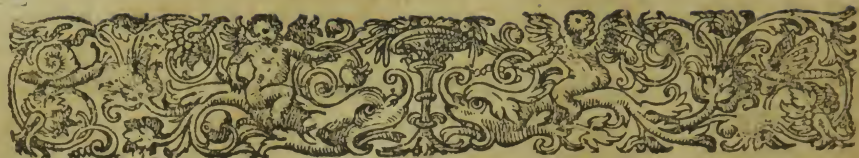
Sextò *scalarj* cuiusdam dimensionem & centrum grauitatis tradimus in trigesima secunda propositione.

Septimò in quadragesima quarta propositione exhibetur quadratura absoluta gradûs cuiuslibet in certâ quadam serie designati.

Octauò in propositionis quinquagesimæ corollario secundo ostenditur, cum nulla linea habeat per se primariò quadratricem figuram (nulla enim est ratio figuræ ad lineam) illi tamen vtiliter seruire quadratricem parallelogrammi mixti: in scholio verò quadragesimæ quartæ nomen & origo primaria quadratricum paulò distinctiùs expenduntur.

Nonò methodus libræ planæ quam in elementis nostris excogitauimus, ad superficies curuas extenditur in quinquagesima sexta propositione.





DE CYCLOIDE

LIBER SEXTVS.

Vbi nostra de Cycloide methodus unà cum Dettonuillanà paulò accuratiùs expenditur; traditur methodus calculi pro coronà Cycloidicà; generatio cycloideos magnæ, diligentius examinatur; adiungitur denique appendicula de motu grauium accelerato.

PRÆFATIO.

INVENTIONIS tanta in omnibus disciplinis est laus, ut Scriptores ad illam communi omnes studio aspirent; & ut libri illi, qui nihil noui docent, frustra edi, verè magis quàm fastidiosè passim à viris doctis dicantur. Negari quidem nequit quin ætate, qua viuimus, plurima cùm in aliis scientiis, tum in mathematicis præcipuè, reperta extent: sed istud etiam inficari nemo potest, non pauca euulgari quotidie, quæ vix quicquam noui contineant præter ipsum aliquando nomen. Certò tamen apud omnes harum inuentioni rerum deditos constat, nonnumquam euenire ut quod vnus iam reperit, alter, cùm nihil de istius inuentione vnquam audierit, in id pariter incidat, eamque rem in vulgus pro sua emittat, existimetque a se aliquid antea inauditum proferri. Methodum Dettonuillanam cum nostra illa quam in Elementis tetragonismicis dedimus, & qua in istis vñ sumus, prima huius in libri parte comparare instituimus, ut res per se obscuræ comparatione elucescant; & ut hoc ipsum, quod iam diximus, certo certius constet, accidere posse ut duo, quisque suo marte, diuerso licet tempore & loco, eandem rem extendant.

Quarti libri tetragonismicorum elementorum propositionibus vigesima prima, & vigesima secunda ante decem & amplius annos re-
 pertis, statim vidimus illis subijci quadraturam coronæ vel annuli;
 quod in secunda præsentis libri parte faciemus manifestum, assumptâ
 in exemplum corona cycloidica, cuius primùm dimensionem, tum
 centrum grauitatis; deinde eius superficiiei dimensionem, & grauita-
 tis centrum dabimus. Serò, quod ægrè ferimus, venerunt in manus
 nostras Reuerendi P. Tacquet *libri quatuor cylindricorum & annula-
 rium*, cùm enim editi sint anno 1651. non nisi labentis istius anni men-
 se Augusto ad nos delati sunt. Opus censemus absolutissimum, at-
 que merito suo nunquàm interiturum, eiùsque Autori qui primus
 hac de re suas lucubrationes vulgauit, istam coronam debitam esse
 agnoscimus; neque verò alia de causa mentionem nostri illius inuen-
 ti nunc facimus, quàm vt methodi a nobis adhibendæ in istorum cal-
 culo & demonstratione, origo & caput demonstretur; ille etenim
 principiis longè diuersis, probatissimis tamen vitur. Quanquam li-
 cet eandem ambo teneremus generalem methodum, possem ego pa-
 riculatim de cycloidica corona, quam ille non tetigit, hæc scribere;
 imò & de circulari, quod ad centra grauitatis tam solidorum, quàm
 superficialium, de quibus ille nihil egit. Cæterò si dum scholium duo-
 decimæ primi libri exarabam, nota mihi fuissent huius Autoris *cyl-
 indrica & annularia*, non omissem narrare vno eodémque anno 1651.
 produisse in lucem *cubaturam* cunei etiam hyperbolici, & à Reueren-
 do P. Tacquet in libro illius *Opus primo*, & a me editam in Ele-
 mentis, quorum quarto libro, propof. 25. coroll. 4. pro vno hyper-
 bolæ casu calculum etiam exhibeo. Anni 1651. iam memorandi oc-
 casio oblata monet me vt quod non ita pridem didici, non omitam
 hîc dicere, illo ipso anno *quadraturam circuli, ellipseos, & hyperbolæ
 ex dato portionum grauitatis centro*, Autore eruditissimo D. Christiano
 Hugenio emissam produisse è prælo Batauico; quo ipso titulo nostri
 Elementorum libri cùm prænotentur, est quod gaudeam socium me
 tunc talium Virorum in iis cogitandis & euulgandis extitisse, quæ
 ante illud tempus irreperita latuerant. Quadraticis methodis, quam
 sine socio, quem equidem sciam, tunc protuli, hoc videbatur exige-
 re, vt mihi aliquando adiungeretur Scriptor illi commendandæ ido-
 neus; id verò nunc tandem contigisse manifestum fiet ex prima præ-
 sentis libri parte.

DE CYCLOIDE

PROPOSITIO PRIMA.

Quidin nostra methodo sit summa quadratorum, cuborum, quadratoquadratorum, & reliquorum in infinitum, quorum nomen deriuetur ex serie numerorum cofficorum, siue denominatorum, quos Algebra inuenit.

Ista numerorum nomina, tradit & explicat inter alios Clavius libri de Algebra scripti capite secundo; ea verò hîc recensere omnia minimè necessarium putamus; satis enim nobis est post numerum absolutum, proximè sequi *radicem*, tum *quadratum*, *cubum* deinde, tum *quadratoquadratum* &c.

Esto iam (Fig. 68.) parallelogrammum quodcunque ad *fc*, cuius latera opposita ad, *cf* producta contineant quatuor figuras *d h f e*, *g m l i*, *n t o q*, *s r y p*, insistentes rectis *df*, *gl*, *no*, *sy*, ita ut ad positionem rectæ *ad*, quæcunque *br* parallela rectæ *ad* ducatur, occurrens figurarum perimetris in *b, e, h, i, m, q, t, p, r*; rectæ *be*, *eh*, *im*, *qt*, *pr* (& ita in infinitum quotcunque addantur aliæ figuræ) sint continuè proportionales. Hanc seriem & progressionem figurarum appellare soleo *gradualem*, ideoque singulas in octauæ tertij libri corollario appellauimus *gradus*; primam, primum; secundam, secundum &c. quo etiam nomine usus sum in quadragesima quarta prioris libri. Ut autem cum numeris ita conferantur, ut eorum nomina iam dicta eis congruant; intelligamus quamlibet numerorum progressionem Geometricam ab unitate incipientem ita componi cum gradibus, ut unitati respondeat primus gradus; secundo termino quem Algebraistæ vocant *radicem* respondeat secundus; tertio respondeat tertius, qui ab iisdem dicitur *quadratus numerus*; quarto respondeat quartus, qui appellatur *cubus*; quinto quartus, qui dicitur *quadratoquadratus*. Manifestum est hanc esse concordiam inter gradus & terminos progressionis, ut sicut si radix multiplicetur in se, hoc est, si ut unitas ad radicem, ita fiat ipsa radix ad tertium numerum; tertius est quadratus: ita cum ut *be* quasi unitas, ad *eh* quasi radicem; ita sit ipsa *eh* ad *im*, rectangulum quod gignitur ex ductu primæ *be* in tertiam *im*, esse æquale quadrato rectæ *eh*. Si ergo intelligatur dicylindraceum cuius basis sit *d h f*, cui *radix* numeralis respondet; sectiones autem ad planum *d h f* perpendiculares sint quadrata *eh*, manifestum est ex vndecima quarti tetragonismicorum, cylindraceum altitudinis æquantis rectam ad baseos *g m l i*, esse ad positionem rectæ *ad*, condicta ratione æquale dicylindraceo illi cuius sectiones sunt quadrata *he*. Igitur non absurdè appellari potest cylindraceum baseos *g m l i*, altitudinis *ad*, *summa quadratorum* respondentium figuræ *d h f*, quasi radici ad positionem rectæ *ad*.

Præterea quoniam in numeris si ut unitas respondens gradui primo *be*, ad radicem respondentem secundo, ita fiat quadratus numerus respondens tertio ad quartum, iste quartus vocatur *cubus*; & ex ductu unita-

tis in cubum gignitur idem numerus, qui ex ductu radicis in quadratum numerum; rectangulum verò quòd fit ex extremis nempe ex ductu primæ b e in quartam q t, est æquale rectangulo quod fit ex mediis videlicet ex secunda e h in tertiam i m; patet cylindraceum altitudinis b e vel a d, baseos m t o q esse æquale dicylindraceo genito ex e h, i m gradibus respondentibus radici & quadrato: ergo non malè vocetur cylindraceum altitudinis d a, baseos m t o q , *summa cuborum*. Simili de causa, cylindraceum altitudinis d a baseos s r y p vocari possit *summa quadratoquadratorum*: quia videlicet ex ductu rectæ b e in p r, gignitur spatium æquale illi, quod ex ductu rectæ e h, cui radix respondet, in q t sedem cubici numeri: ex ductu autem radicis in cubum gignitur quadratoquadratus numerus. Igitur ostendimus quid in nostra methodo appellari possit *summa quadratorum, cuborum* &c. nihil enim est aliud quam cylindraceum altitudinis a d, baseos tertij quarti &c. graduum.

COROLLARIUM I.

Ex demonstratis patet non ideo mutari methodum aliquam, quòd re-tentis rebus alia imponantur nomina; methodus enim his vestita nomini-bus eadem est cum illa, rectèque illi congruit illud Poëtæ *rebus idem, titu-lo differt*. Methodus itaque *indinisibilium* quam vocant, nescio qua de cau-sa, si nihil aliud aduehat in Antiquorum demonstrandi modum, nihil ma-gni momenti præstat, nec de eo multum laborare debemus. Sicuti nec cu-randum est quod multiplicari recta in rectam, vel in figuram dicatur; hoc enim nihil est aliud quam voces primò institutas pro numeris transferre ad quantitatem continuam; nam etiam Euclides libri septimi initio, nu-merorum alios planos, alios solidos appellauit, lateraque illis attribuit, traducendo hæc nomina ex quantitate continua ad discretam. Porro in istis, gradum A , multiplicari per gradum B , nihil est aliud quam sumi gra-dum C , qui tot in ista serie sedibus distet à gradu B , quot distat gradus A à gradu primo dimetientis b e. Nam ad positionem rectæ a d dicylin-draceum genitum ex A ducto in B , est condita ratione æquale cylindra-ceo genito ex primo in quartum C . Sicuti si primus sit vnitas, & A, B sint numeri; numerus A multiplicabitur in B , si vt vnitas ad A , ita fiat B ad C . Cum igitur primus gradus repræsentet vnitatem, rectè instituta fuit operatio inter gradus, quæ respondeat multiplicationi numerorum. Hic verò inculcandum duximus nos isto loquendi modo nolle gradus inter se esse proportionales; sed eorum dimetientes ad positionem rectæ a d sum-ptas. Dimetientes verò alicuius figuræ, vocamus rectas intra perime-trum ipsius figuræ accommodatas, & parallelas vni cuidam designatæ; quam vocis vim hîc iterum exposuisse, fortasse iuuabit.

COROLLARIUM II.

Istud hîc maximè attendi debet, si quis summam cuborum exempli causa quærat, hoc est quartum gradum, solui quidem vtcunque & faci-lè, dicendo esse secundum gradum multiplicatum per tertium: sed non

planè solui ad mentem inquirentis, & ad vsum rei quæsitæ intentum. Quæritur enim rotundè exempli causa si $d h f e$ ponatur parua cycloides cuius axis $e h$, vt determinetur rectilineum æquale quarto gradui.

COROLLARIUM III.

Nos in præsentī propositione posuimus primum gradum esse parallelogrammum, quia illa hypothesis vtilissima est ad negotium quod tractare instituimus; potest tamen cum opus fuerit poni quælibet alia figura. Præterea sicuti in superficiebus contemplati sumus eiusmodi seriem graduum, ita possumus illam considerare in solidis si enim $d h f e$ ponatur basis solidi cuiuslibet generis, ad positionem rectæ $a d$, ex ipsa basi ducta in figuram quamlibet $d z f e$, series eadem solidorum continuabitur, si reliquis gradibus consequentibus altitudo $d z f e$ addatur; eorumque sectiones ad planum $a d f$ rectæ, basium $b e$, $e h$, im &c. erunt proportionales. Abstineo tamen ab illo fusco Arabum cogitatu, satis nunc vfitato ab iis qui indissolubilium methodo ingredi se profitentur, *magnitudinem generis ex multiplicatione primi solidi in quartum, esse æqualem magnitudini generis ex multiplicatione in se duorum solidorum mediorum*: istud enim crudius est quam vt concoqui possit à stomacho cui cibus ad hunc diem fuit Euclidis, Archimedis & consequentium Græcorum Geometria simul, & Philosophia. Quapropter si quid veri iste loquendi modus continet, reducatur, quæso, ad aliquid intra fines triplicis dimensionis quantitatis continuæ collocatum; quod sanè exigit candor cogitationis Europæ.

PROPOSITIO II.

Iisdem manentibus (*Fig. 68.*) tertius & quartus gradus inseruiunt proximè ad inuentionem solidi peripherici, generis circumductu figuræ secundæ $d h f e$ circa basim $d f$, & ad inuentionem interualli quo centrum grauitatis eiusdem semiperipherici distat à basi $d f$.

In superiore ostendimus cylindræcum altitudinis $a d$, baseos $g m l i$, quæ est tertius gradus, esse æquale dicylindræco cuius sectiones sunt quadrata $e h$, basis $d h f e$: atqui istud dicylindræcum ad periphericum est vt quadratum circumscriptum circulo ad ipsum circulum, vt in tertij octaua, & nona ostendimus; ergo si vt quadratum circumscriptum ad circulum, ita fiat recta $d a$ ad $d u$, patet cylindræcum altitudinis du , baseos $g m l i$ esse æquale quadranti peripherici iam descripti: ergo tertius gradus proximè conducit ad inueniendum solidum altitudinis du , quod æquale sit dicylindræco cuius sectiones sunt quadrata $e h$, quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam in corollario octauæ tertij ostendimus libræ planæ axe $d f$, sustentaculo $a c$, æquiponderans solido cuius sectiones sunt quadrata $e h$, esse cylindræcum altitudinis $d a$, baseos æquantis dimidium quarti gradus $n t o q$: in sexta autem eiusdem libri ostendimus bessem huius æquiponderantis esse æquale spatio quod iisdem manentibus æquiponderat

ponderat quadranti peripherici: ergo triens quarti gradus est basis cylindracei altitudinis da , quod æquiponderat quadranti peripherici, ergo duobus quadrantibus peripherici, hoc est semiperipherico quod ad rectę df partes h iacet, æquiponderat iisdem manentibus cylindraceum altitudinis da , baseos æquantis bessem quarti gradus.

Præterea quoniam bc recta ad dx distantiam centri grauitatis se habet vt suspensum semiperiphericum ad æquiponderans; illud autem ad istud se habet vt basis $gmli$, quæ est tertius gradus, ad bessem baseos mt o q , quæ est quartus gradus; igitur cum vt tertius gradus ad bessem quarti, ita sit ad recta ad dx distantiam centri; apertum est si tertius & quartus gradus reducantur ad rectilinea nota, ea proximè conducere ad inuentionem distantię dx , quod erat secundò propositum.

COROLLARIUM I.

Hinc apertè patet quod in corollario secundo superioris monuimus, ad hoc vt methodus inueniendi distantiam dx censeatur plenè tradita, requiri vt figuræ $ntoq$, siue quarto gradui, siue summæ cuborum, inueniatur rectilineum æquale; & aliud figuræ $gmli$ siue tertio gradui, siue summæ quadratorum. Quod si adhuc multiplicatio aliqua restet faciendā per aliquem gradum, problematis solutionem plenam nondum esse datam. Nam iuxta explicationem traditam harum vocum, ex multiplicatione oritur descensus ad alium gradum inferiorem, qui aliquando est difficillimus inuentu, licet proximè superior sit rectilineo noto æqualis. Dettonuillæus tamen aliquando multiplicationem ita accipit vt per illam transitus fiat ad magnitudinem alterius dimensionis, exempli causa ex figura $d h f e$ per rectam ad multiplicatam, intelligit gigni solidum baseos $d h f e$, altitudinis da . Optandum esset vt omnes Geometræ vterentur Antiquorum vſitatis loquendi modis, nec vllum excogitarent, nisi necessitate cogente; ita enim eueniret, vt res melius intelligerentur, nihil Leſorem remorante vocum nouitate.

COROLLARIUM II.

Aduertendum est ista serie non exhiberi figuram planam æqualem radici, siue secundo gradui $d h f e$, ideóque inueniendam esse methodum illius gradus quadrandi, qui est veluti basis reliquorum. Istud qua ratione statim assequuti fuerimus, vbi proposita ab Anonymo fuere problemata, constat ex libello tunc edito viginti de cycloide propositionum, qui est primus huius Operis, nempe per quadraturam cuneati, siue vngularis solidi vnus, & per quadraturam alterius dimidiati, vt monemus in corollario decimæ libri eiusdem. Videndum nunc nobis est quo pacto id Gregorius à S. Vincentio & Dettonuillæus inuenerint.

PROPOSITIO III.

ESto (Fig. 69.) circulus $b c n m$ centro a descriptus, cuius diametri bn , cm secant se ad angulos rectos: sumptus sit in qua-

E c

drante bdc , quilibet arcus bp (etiamsi punctum p congruat puncto c) & per p ducta sit po parallela rectæ ba : arcui pdb intelligatur insistere superficies cylindrica recta, ita ut perpendiculares punctis d insistentes æquent applicatas di ad semidiametrum ac . Istam superficiem esse cuneatam vel vngularem monstrauius in octauâ secundi libri propositione; eamque esse æqualem rectangulo cao ostendisse diximus P. Gregorium à S. Vincentio propositione 45. & 54. libri noni quadraturæ circuli, editi anno 1657. Istud ipsum demonstrat Dettonuillæus in suo illo de cycloide libro quem præfenti anno vulgavit, *tractatus de sinibus propositione prima*.

Nunc ostendendum suscipio eadem methodo id utrumque præstitisse, & in hoc solum esse discrimen, quod postquam statutum est fundamentum sufficiens ad id concludendum celebri illa Antiquorum methodo, quæ procedit per reductionem ad impossibile, Gregorius à S. Vincentio id toto illorum Antiquorum & Geometriæ apparatu præstiterit; Dettonuillæus verò rem contraxerit, intelligendamque Lectori reliquerit; quod solent Recentiores aliqui iam præstare sine vlllo veritatis damno, dummodo constet cætera, quæ ad id necessaria sunt, rectè esse constituta.

Gregorius à S. Vincentio propositionem trigessimam libri noni iam laudati monet esse Pappi vigesimam secundam in Collect. Mathemat. ea verò demonstratur, quantumuis exigua sit recta de tangens in puncto d , si ex e demittantur perpendiculares er , rectangulum contentum sub ordinatim applicata di & sub tangente ee esse æquale rectangulo contento sub radio ac & sub recta rr . Ex eo autem quod (vbicunque sumatur punctum d , & quamlibet parua sit recta rr) id perpetuâ lege euincatur, sequitur cætera posse in circulo apparari ad concludendum mors Antiquorum; sicuti ab illa trigesima septima ad quadragesimam quintam apparatus istum Geometricè explicat Gregorius. At verò Dettonuillæus ita succinctè rem tractat, ut nullius mentione facta assumat in Lemmatium, propositionem quam ad Pappum referendam esse diximus, & sine qua quod propositum fuit ostendi non posset illâ saltem methodo. *Ducendo*, inquit, *ab omnibus punctis d tangentes de , quarum qualibet tangat sibi proximam in punctis e , & demittendo perpendiculares er ; patet vnumquemque sinum di multiplicatum per tangentem ea , æqualem esse vnicuique distantie rr multiplicatæ per radium ab* . Equidem hoc loco non semel suspexi huius Autoris acrem iugenij vim, qua statim vidit id, quod Gregorius à S. Vincentio deriuasse se à Pappo candidè fatetur: imprimis verò admiratus sum eius scelicitatem in inueniendo illo ipso quadraturæ superficiei illius cylindricæ problemate scitu dignissimo, eadem prorsus viâ, quam Gregorium te-

nuisse constat iam ab annis vndecim; tot enim fluxere ex quo est editum illius volumen. Nam si illam viam à Gregorio antè fuisse factam agnouisset, id pro suo candore nullatenus dissimulasset.

Gregorius quidem quadrat illam superficiem cylindricam nondum expansam, sed adhuc arcuatam; Dettonuillæus autem considerat illam iam expansam: attamen assumit æquales esse expansam & contractam, neque id probat: quapropter potuisset id quoque assumi à Gregorio, si expansam voluisset quadrare. An autem sint æquales expansa & contracta diximus in scholio illius octauæ propositionis secundi libri, & in corollario propositionis vigesimæ libri quinti superioris.

PROPOSITIO IV.

Intelligatur (*Fig. 69.*) curua quælibet $p d b$ in plano $p o a$, intercepta inter parallelas rectas $d o$, $b a$, quas secet recta $o a$; intelligatur super recta $o a$ insistere figura quædam ad planum $l a b$ recta, & super curuâ $p d b$ insistere altera, ita respondens illi quæ super $o a$ erigitur, vt quæcunque duo plana parallela rectæ $b a$, & recta ad planum $c a b$ secent duas illas figuras, portiones earum inter illa interceptæ, sint inuicem æquales; quantumlibet earum ad planum $c a b$ perpendiculares, plano eidem parallelo respondentes sint inæquales. Super eadem $a o$ vel super curuâ $p d b$ intelligatur alia quælibet figura insistere perpendiculariter.

Ostendendum est si postuletur & concedatur singulas istarum duarum figurarum multiplicatas ad positionem rectæ $b a$ per tertiam aliquam gignere æqualia spatia; summam quadratorum, cuborum, & quadratoquadratorum esse rectè assignatam à Dettonuillæo propositionibus secunda, tertia & quarta *tractatus sinuum*.

Aduertendum est licet istud non postuletur à Dettonuillæo; postulari tamen aut demonstrari debere, vt rationes eius cogant. In methodo, quam indiuisibilium dicunt, istud ego deprehendo à Geometria alienum, quod passim & tacitè vsurpantur propositiones tanquam euidentes & certæ, quæ neque ab vllò adhuc demonstratæ sunt, nec monentur Lectores vim demonstrandi fundari in vno quod tamdiu postulandum sit, quousque demonstretur; vel certè quod ita euidens ex se sit, vt inter principia per se nota corollari debeat.

Isto ergo postulato & concesso, sit vt in propositione superiore $p d b$ arcus circuli assumptus, & illi insistat superficies cuneata, ita vt ex puncto d perpendicularis in planum $c a b$ excitata sit æqualis sinui $i d$: super recta $a c$ constructum sit quadratum insistens eidem plano $c a b$. Igitur ex superiore propositione duæ istæ superficies ita se habet vt earum portiones interceptæ inter quælibet duo plana parallela ad rectam $h l$, & recta ad planum $c a b$, sint æquales: ergo per postulatum istud, si rectæ $c a$

E c 2|

insistere intelligatur quadrans circularis centro a descriptus, & per istum quadrantem multiplicentur duæ illæ figuræ, prodibit æquale vtrunque spatium; & ratione figuræ insistentis rectæ o a, illud spatium est cylindraceum altitudinis a b, baseos o p d b a, vt patet, cum figura insistens rectæ o a sit parallelogramma rectangula. Porro illa multiplicatio debet ita intelligi vt sicut radius a c est ad dimetientem figuræ insistentis super rectâ a o cadentem perpendiculariter in rectâ o c punctum i; ita fiat dimetiens quadrantis circularis respondens puncto i, ad quartam eidem puncto i insistentem perpendiculariter ad planum c a b. Quapropter cum radius a c æquet dimetientem figuræ parallelogrammæ insistentis super rectâ a o; patet quartam figuram ex hac multiplicatione genitam super basi a o esse æqualem portioni quadrantis circularis super eadem a o erecti. In curua autem p d b illa multiplicatio ita debet concipi, vt sicut radius a c est ad dimetientem figuræ insistentis super curua p d b cadentem perpendiculariter in curuæ p d b punctum d; ita fiat dimetiens figuræ insistentis super curuâ, respondens puncto d, ad quartam eidem puncto d insistentem perpendiculariter ad planum c a b. Figura itaque cuius basis est curua p d b, dimetiens verò est ista quarta iam reperta, est æqualis alteri figuræ cuius basis est a o, dimetiens verò est quarta illa proportionalis antè reperta. Istæ verò figuræ vtrunque prodeuntes ex generatione vel multiplicatione iam exposita habent vt patet proprietatem quam præsens propositio requirit. Vocentur *figura coniugata primæ generationis*. Figuræ autem vnde generantur vocentur *coniugata radices, basium rectæ & curuæ*.

Porro figuræ illæ coniugatæ primæ generationis cum habeant proprietatem quam requirit postulatum, si intelligantur rursus insistere, vna quidem curuæ p d b vnde ortum habet, altera verò rectæ o a vnde prodit, & intelligantur pari prorsus modo multiplicari per eandem figuram o p d b a (quæ est eadem cum illa portione quadrantis circuli insistentis super radio c o, interceptâ inter parallela plana per o d, a b rectas ducta) prodibit æqualis vtrunque figura coniugata secundæ generationis. Cum itaque figura quæ primò in rectâ o a prodit, sit ipsa o p d b a, & ponatur multiplicari in se ipsam, prodibit secundò ratione figuræ insistentis super o a, tertius gradus, cuius primus ad positionem rectæ a b sit quadratum b a c, secundus sit quadrans circularis: ac proinde si intelligatur alius ordo graduum quorum primus sit parallelogrammum mixtum altitudinis æquantis rectam a b, baseos curuæ p d b, secundus sit cuneata vel vngularis superficies illi insistent, eueniet mirabili prorsus duplicis istius seriei affinitate, vt primus gradus illius æquet secundum istius; secundus tertium; tertius quartum, & ita deinceps progressu quantocunque. Cæterùm gradus omnes primæ illius seriei (data quadratura circuli pro illis qui paribus numeris computantur) quadraimus in libello ea de re nondum edito vt in scholio quadragesimæ quartæ quinti superioris libri

monuimus; in editis verò tertium & quartum quadramus, vt constat ex quadragesima secunda eiudem libri quinti.

Supereft vt ostendamus Dettonuillæum rectè statuisse de summis quadratorum, cuborum, & quadratoquadratorum dato hoc postulato. Ait enim summam quadratorum esse æqualem figuræ $opdb a$ multiplicatæ per radium $a b$, quod patet ex iam demonstratis, cum sit æqualis parallelogrammo insistenti super $a o$ multiplicato per portionem quadrantis circularis insistentis super $c a$, illa autem portio, vt diximus, sit ipsa $opdb a$: ergo summa quadratorum est rectè constituta ab illo Autore, dato præfenti postulato

Præterea idem Dettonuillæus ait summam cuborum esse æqualem summæ figuræ $opdb a$ multiplicatæ per quadratum radij $b a$; quod manifestum est ex iam demonstratis; est enim æqualis tertio gradui primæ seriei, ille autem gignitur ex multiplicatione $opdb a$ per quadratum radij $b a$, hoc est, parallelogrammi insistentis super recta $a c$. Hic tamen annotari debet, quod in illo corollario secundo primæ propositionis diximus; istos nimirum soluendi problemata modos dare locum vltiori solutioni problematum, antequam ad postremam rei propositæ executionem perueniri possit.

Denique ille idem Autor asserit summam quadratoquadratorum esse æqualem summæ figuræ circularis $opdb a$ cubicè sumptæ, & multiplicatæ per radium $o a$. Figura enim circularis $opdb a$ cubicè sumpta est æqualis cylindræo altitudinis æquantis radium, baseos quæ sit quartus gradus primæ seriei: ergo demonstratis consonat assertio Dettonuillana; sed, vt ad vltimam rei decisionem veniatur, eget vltiore solutione, vt iam annotauimus; neque ex huius solutionis inopia vitio vlllo laboraret eius liber; ea enim ex eius tractatu *solidorum circularium* erueretur: ergo &c. quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

Istud ego postulatam pro præfenti cycloideos causâ facillè concedo, adductus ad id convenientiâ quam deprehendi inter meas problematum eorundem solutiones, quas in tertio libro tradidi, & inter eas quæ ex hoc postulato euincuntur. Porro mea illa solutiones nullatenus pendent ex illo postulato, vt examinanti patebit. Quod si postulatū sit verum in cycloideos causâ, non apparet ratio cur in vniuersum admitti non possit.

P R O P O S I T I O V.

SI postuletur, iisdem manentibus (*Fig. 69.*) vt duæ illæ figuræ quarum vna insistit curvæ $p d b$, altera rectæ $o a$ manentes vt iacent, habeant centrum gravitatis in eodem plano ad planum $c a b$ recto, & parallelo rectæ $h l$; concessio illius nihil pugnabit cum demonstratis aliunde à nobis, in istis de cycloide problematis.

Ista consonantia liquet ex vigesima secunda superioris libri; ibi enim ostendimus cuneatæ istius superficie hinc & inde arcibus $c d b$, $c g n$, in-

sistentis ad oppositas partes plani cab , ac proinde & superficiei sphaericae descriptae motu semicirculi bcn circa c a manentem, centrum gravitatis esse in puncto quod bifariam secat radium ac . Id verò liquet ex postulato praesenti; nam quadrati insistentis super recta ca , & alterius ad partes oppositas insistentis super eadem recta ca , centrum gravitatis est ut patet, in eodem puncto, quod bifariam secat radium ac . Ita quoque, cum ibidem ostenderimus, si sumatur peripheria intercepta inter planum per ab ductum, & inter aliud per bisectionem rectae ac , quorum utrumque sit rectum ad planum cab ; centrum gravitatis esse in bisectione portionis radij c a, interceptae inter illa plana: patet id ad vnguem congruere iam demonstratis ex illo postulato: ex quo illud generale obtinetur; *Centrum gravitatis portionis superficiei sphaericae interceptae inter duo qualibet plana dicto iam modo parallela, esse in bisectione portionis radij ac , interceptae inter eadem plana.* Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Postulatum, ut cernis, est centrum utriusque superficiei ut iacet manentis, esse in eodem plano ad planum cab recto & parallelo ad rectam ab : sed si hoc ipsum centrum gravitatis in eadem sectione plani paralleli, & figurae insistentis super curva retineri velis, postquam figura illa expansa fuerit; longè errabis, nec postulato isto tuum errorem iure excusare poteris.

COROLLARIUM II.

Istud postulatum potest demonstrari ex superiore; nam ambae superficies habent centrum in eodem illo plano; si, cum sint figurae aequales, habeant quadratrices siue spatia aequiponderantia aequalia, librae planae axe od ; habent autem quadratrices aequales ex quadragesima superioris libri, si ad positionem eiusdem plani multiplicata per triangulum quodcunque oua rectilineum, dent aequale spatium; atqui ex superiore dant aequale spatium; ergo superiore postulato semel concesso, non potest negari istud.

PROPOSITIO VI.

Nostra quadratricum generatio proponitur, explicatur, conferaturque cum Dettonuillana.

Esto (*Fig. 66.*) in schemate quadragesimae superioris libri bcd a qualibet figura ad positionem rectae ad insistentis basi ba ; esto quoque, ut ibidem praescriptum fuit, figura $anbm$ ita genita ut sicut ga ipsi ba aequalis se habet ad am quamlibet portionem abscissam ex ga producta, ita sit mo dimetiens figuram bca d parallela rectae ad , ad mn dimetientem figuram $anbm$, quam quadratricem primam iam olim appellamus; & ita quoque sit mn ad mr dimetientem figuram $arbm$, quam secundam quadratricem appellare solemus.

Ostendimus in septima secundi tetragonismicorum, librâ grammicâ

g b suspensâ ex a, perpendiculo ad, brachio g a, æquiponderans aptatum puncto g esse æquale quadratrici a n b m: similiterque æquiponderans quadratrici primæ, esse æquale quadratrici secundæ a r b m; & ita de tertia comparatâ ad secundam; deque quarta ad tertiam; & sic deinceps. Ostendimus autem illud methodo Archimedea per reductionem ad impossibile; ideoque in antecedentibus præparauimus quæ necessaria erant, ad istud conclusionis genus. Si quis verò nunc temporis quæ tantum sunt necessaria ad illum deducendi modum assumat, vel etiam interpolet, & reliquum apparatus, veluti syrma Geometriæ longius, præcidat, inferatque illud spatium æquiponderans esse æquale quadratrici; cuius etiam nomen immutet; nã ille exiguam operam Geometriæ præstet, & probrum sibi multum potius quam laudis quicquam creet.

Quoniam verò vt g a brachium ad a m; ita est m o ad m n; & ita est m n ad m r; patet primò rectangulum sub extremis g a, m n esse æquale rectangulo sub mediis a m, m o, vel q m, m o; ac proinde, posito quod triangulum a b e stet rectum super plano b a d, cylindraceum altitudinis g a, baseos a n b, esse æquale dicylindraceo q m o, progenito ex triangulo e a b & ex figura a d c b, ad positionem rectæ a d. Patet secundo Dettonuillæi *summam triangularem* respondentem figuræ a d c b inchoando ex puncto a, esse dicylindraceum illud: nam in prima proprietate tractatus scripti de proprietatibus *summarum simplicium, triangularium, & pyramidalium* pag. 1. monet summam rectangulorum a m in m o nihil aliud esse quàm summam triangularem omnium m o. (hoc est figuræ a d b m) initio sumpto ex a. Hoc ipsum disertè docuerat in epistola ad D. de Carcaui pag. 16. ipsum etiam solidum dicylindraceum q m o, quod æquualet cylindraceo altitudinis g a, baseos m n, appellare solet eodem nomine summæ triangularis. Perspicias apertè, Lector, nomen *summæ triangularis* esse quidem nouum, cogitationem tamen rei illi nomini subiectæ nostram tunc saltem fuisse, cum libros tetragonismicos ante decem ferme annos ederemus: ergo &c. quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I V M.

In lineis Dettonuillæus eodem pacto explicat summam istas, nimirum per quadrataria spatia parallelogrammorum illis insistentium; sicuti summam in planis figuris explicuit per quadrataria spatia cylindraceorum illis insistentium, quod fieri posse ostendimus in quinquagesimæ propositionis libri quinti corollario secundo; id tamen non esse necessarium nisi pro lineis; quod, cum aliunde rei difficultatem augeat, nunquam usurpamus, vbi dantur quadrataria spatia eiusdem cum spatio suspenso generis. Cur enim ad aliud genus recurramus, si necessitas nulla ad id cogat. Dettonuillæus tamen perpetuò adhibet magnitudines alterius generis; vnde fit vt pro solidis trinæ dimensionis excogitet quædam solida quaternarum dimensionum.

DE CYCLOIDE

PROPOSITIO VII.

Quadratricum nostrarum subcontrariarum proprietas declaratur illa ipsa, quam summis suis triangularibus subcontrariis Dettonuillaus adscribit.

Propositione nona secundi libri tetragonismicorum ostendimus (Fig. 66.) si ex $g b$ auferatur $b u$ ipsi $a b$ æqualis, ita ut tres rectæ, $g a$, $a b$, $b u$ sint æquales, quadratricem respondentem brachio $b u$ esse ipsam $b c d a n$, hoc est ipsam $a d c b$ imminutam quadratrice subcontraria $a n b m$. Inde verò fit, si per centrum gravitatis figuræ $a d c b$ ducatur $m o$ parallela perpendiculari $a d$, ut est quadratrix brachij $g a$, nempe $a n b m$, ad quadratricem brachij $b u$, nempe $a d c d a n$; ita esse longitudinem $a m$ ad $m b$. Nam ex lege libræ demonstrata ab Archimede, ut $a m$ recta ad rectam $a g$; ita æquiponderans aptatum puncto g , ad figuram suspensam $a d c b$: ita pariter ut brachium $b u$ vel $g a$ ad longitudinem $b m$; sic est eadem figura suspensa ad æquiponderans aptatum puncto u , hoc est ad figuram $b c d a n$: ergo ex æquo, ut recta $a m$ ad $m b$, ita est quadratrix genita brachio $g a$, ad quadratricem genitam brachio $b u$; hoc est, ita est triangularis summa initio sumpto ab a ad triangularem summam initio facto à b . Dettonuillaus rectam $a b$ vocat *libram*, & longitudines $a m$, $m b$ appellat *brachia*; unde in epistola ad D. Carcaui pag. 9. asserit summam triangularem incipiendo à puncto b , esse ad summam triangularem cuius initium sumatur à puncto a , ut brachium $b m$ ad brachium $m a$. Ecce miram concordiam cogitationum antiquarum & recentium; en ut duo homines de eadem re cogitabundi sæpe sæpius in eadem inuenta conveniant, esto in nominandis & appellandis illis discrepent: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Quid Dettonuillaus nomine *summarum pyramidalium* intelligat, & quid inuentis, quæ ante se extabant, addat.

Quod in corollario sextæ superioris monuimus, hic iterum & paulò fusiùs nobis censemus narrandum. Tria sunt tam apud Physicos quàm Geometras genera magnitudinis siue *ποσότης*, (quam in Scholis *quantitatem* appellamus) Linea, superficies, & corpus. Linea est unius dimensionis, siue ut ait Euclides longitudo latitudinis expers; superficies pari pacto definietur longitudo & latitudo absque profunditate; corpus denique triplici illa dimensione est præditum, longitudine, latitudine, & profunditate. Rerum per se natura exigere videtur, ut quadratrix lineæ, sit linea; superficiæ, superficies; solidi, solidum. Quia tamen lineæ quadratrix nulla in eodem genere excogitari potest, mutuo illam accipit à secundo genere, nempe à superficie parallelogrammâ rectilineâ, vel mixtâ, ut explicatum fuit in quinquagesimæ superioris libri corollario secundo.

cundo. Nos pro lineis curuis mutuati sumus quadratrices aliunde, quia illas in eodem genere non reperimus; at verò pro superficiebus & solidis, natiuas eis & congenitas intra idem genus assignauimus.

Reciproca libræ lex, qua vt suspensum $a d c b$ (*Fig. 66.*) ad quadratricem $a n b m$, ita est baachium $g a$ ad $a m$ distantiam, qua figuræ $a d c b$ centrum grauitatis distat à perpendiculo $a d$, non habet locum, quoties suspensum & quadratrix eius, sunt generis diuersi; sicuti enim punctum rationem nullam habet ad lineam, ita neque linea ad superficiem; neque superficies ad solidum triæ dimensionis; neque istud ad aliud quaternæ, aut quinæ &c. dimensionum; si quis illas capiat cogitando. Quadratrix tamen diuersi generis non erit continuò repudianda veluti prorsus inutilis; nam quoties superiori *quantitatis* generi simul & inferiori eadem proprietas competere demonstratur, toties quod in superiori demonstratum fuerit, locum habebit in inferiore. Ita cùm ostenderimus parallelogrammi mixti hanc esse proprietatem vt si per grauitatis eius centrum ducatur recta parallela lateribus, punctum in quo secabitur planum baseos curuæ, sit grauitatis centrum eiusdem curuæ; non inutiliter quæritur quadratrix parallelogrâmi mixti; & satis speciosè, vt patet, ista quadratrix dicitur pertinere ad lineam curuam; quamuis enim non propriè pertineat, commodatur tamen illi ad præsentem vsum. Simili prorsus pacto euenire potest vt per quadratrices proprias solidorum inueniantur centra grauitatis basium; nam si per centrum grauitatis cylindracei cuiuslibet duxeris rectam parallelam rectæ cuius motu superficies illius cylindracea descripta fuit, punctum in quo ista parallela secat basim, est eiusdem baseos centrum grauitatis; potest itaque per quadratrices solidi cylindracei haberi centrum grauitatis baseos, & eatenus quadratrix solidi poterit inferuire basi. Pari prorsus pacto si basis ista, verbi causa, $a d c b$ non tantùm multiplicetur in rectam $p a$ (quod accidit iuxta istum Recentiorum loquendi modum quando ponitur basis cylindracei habentis altitudinem $a p$) sed in quadratum, vel cubum, &c. rectæ $a p$, solido inde genito quaternæ vel quinæ vel senæ &c. dimensionis, respondebit quadratrix baseos $a n b$ (quæ est propria quadratrix figuræ $a d c b$, genita brachio $g a$, perpendiculo $a d$) multiplicata in quadratum, vel cubum &c. rectæ eiusdem $a p$. Vnde liquet si baseos $a d c b$ multiplicatæ in quadratum $a p$ habeantur mutuatæ quadratrices illæ quas subcontrarias diximus in propositione septimâ, & istæ subcontrariæ habeant bases multiplicatas in idem quadratum $a p$; ex earum ratione, obtineri, (si recta $m o$ transeat per grauitatis centrum baseos $a d c b$) rationem rectarum $a m, m b$, vt ex illa septima liquet. Non igitur inutiles sunt, dummodo suspensum & quadratrix ista reuocentur ad solida earundem (quotcunque illæ fingantur) dimensionum; nam cùm suspensi basis fuerit $a d c b$, basis quadratricis illius erit quadratrix $a n b m$ nostrâ methodo reperta. Quorsum, inquires, illa solida tot supra ternarium dimensionum, si eorum

Ff

tantummodo bases quæruntur? numquid satius foret illa adeo obscuræ fabricationis corpora prætermittere? Respondeo satius quidem foret, si aliter & commodiore machina veritas è puteo illo veterum fabulis celebratissimo extrahi posset; sed qui Algebrismum in Geometriam introduxerunt, illóque vtuntur ad veritatem indagandam, non possunt quin sæpe istis solidis vtantur in progressu demonstrationis; quod in cursu demonstrationis eiusmodi esto illis cõcessum, dummodo, cum ad metas eius peruentum fuerit, reductione omni peracta, res redeat ad quadratrices simplices & natiuas, quas solas nostra methodus parit. Solida ista *σπερμαειδῆ*, (hanc vocem nouam in re noua designanda fingere liceat) quorum bases sunt quadratrices nostræ secundæ, Dettonuillæus Algebrismi istius sectator, vocat *summas pyramidales*. Hinc autem manifestum fit, si nobis notæ olim fuerint istæ secundæ quadratrices, notas pariter fuisse summas pyramidales Dettonuillanas, saltem quod ad earum nucleum attinget excretum à reiectaneo putamine. Sed veniamus ad rem propositam, liceatque nobis in præsentis propositionis demonstratione eiusmodi solidis, quæ superant *σπερμαειδῆ*, more Dettonuillano, vti.

In epistola ad D. de Carcaui pag. 66. docet expressè (Fig. 66.) bis summam pyramidalem ordinarum $m o$ initio ducto ab a , esse æqualem summæ solidorum effectorum ab iisdem ordinatis $m o$ ductis figillatim in quadratum $a m$; vnde patet istud solidum esse quartæ dimensionis; subiungit verò statim neminem offendi debere hac quarta dimensione, cum reduci possit ad vnā ex tribus notis & receptis apud omnes.

Quoniam autem ex generatione à nobis traditā primæ & secundæ quadratricum, vt est $g a$ recta ad $a m$, ita est ordinata $m o$ ad $m n$; & ita quoque est ordinata $m n$ ad $m r$; ergo vt $g a$ recta ad $a m$ rectam, ita est $a m$ in $m o$, ad $a m$ in $m n$; cum $a n$ in $m o$, & $a m$ in $m n$ sint eadem altitudine $a m$ prædita, ac proinde rationem habeant basium $m o$, $m n$; quæ est ipsa rectarum $g a$, $a m$. Igitur habemus quatuor magnitudines proportionales prima est recta $g a$, secunda est recta $a m$, tertia est rectangulum $a m$ in $m o$, quarta rectangulum $a m$ in $m n$, vel illi æquale $g a$ in $m r$, cum vt recta $g a$ ad rectam $a m$, ita ponamus esse $m n$ rectam ad $m r$ rectam. Ergo solidum genitum ex prima $g a$ & ex extrema $g a$ in $m r$, hoc est solidum $g a$ in $g a$ in $m r$, est æquale solido genito ex secunda & tertia, hoc est, solido ex $a m$ in $a m$ in $m o$; hoc est solido genito ex $m o$ in $a m$ quadratum. Igitur solidum quartæ dimensionis genitum ex $m r$ in $g a$ quadratum, est æquale solido genito ex ordinata $m o$ in $a m$ quadratum.

Quoniam igitur summa pyramidalis Dettonuillana cuius initium sumatur à linea $a d$ est, vt ipse statuit, dimidium solidi geniti ex ordinatim applicata $m o$ in quadratum $a m$, patet esse quoque dimidium solidi geniti ex $m r$ ordinatim applicata secundæ quadratricis in quadratum $g a$; quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Quoniam Dettonuillæus eo loco ubi ex professo tradit naturam summæ pyramidalis constituit eam esse dimidium summæ ordinarum $m o$ in quadratum $a m$ initio facto ab a , idemque admonet sub finem tractatus solidorum circularium, & passim alibi; quod affirmat in prima proprietate tractatus *de summis simplicibus, triangularibus, & pyramidalibus* pag. 2. *summam pyramidalem omnium $m o$ initij $a d$, esse summam omnium $n o$ in a quadratum*, emendari debet, ne pugnantia in eodem libro scripserit.

COROLLARIUM II.

Hinc sequitur præterea nomen summæ pyramidalis fuisse quidem antea inauditum, rem tamen ipsam reductione peracta, nihil aliud fuisse quam dimidium quadratricis secundæ $m r$ ductum in quadratum $g a$; illud autem dimidium ita sumi debet ut omnes ordinatæ $m r$ bifariam secentur limbo diuidente quadratricem $a r b m$ in duas partes æquales.

COROLLARIUM III.

Patet ex demonstratis cum quadratrix secunda ad positionem rectæ $a d$ sit ad primam ut est prima ad radicem; ipsam secundam esse quadratricem primam respectu primæ; ac proinde cum ordinatæ omnes $m n$ inchoando ab a , habeant summam triangularem siue cuneum quadratarium, æqualem cylindraceo altitudinis $p a$, vel $b e$, baseos $a r b m$; manifestum est summam triangularem rectangulorum contentorum sub ordinata $m n$ & sub perpendiculari ex m excitata ad planum $b a d$, æquante altitudinem $a p$, esse æqualem omnibus $m r$ ductis in quadratum $a p$. Ergo cum omnes $m n$ ductæ in altitudinem $a p$ sint summa triangularis omnium $m o$, ut ostendimus in superiore, apertum est summam triangularem summæ triangularis omnium $m o$, esse summam illam quam Dettonuillæus *pyramidalem* appellat. Cum igitur, mathematicè demonstratum sit, summam triangularem summarum triangularium ad $m o$ ordinatam attinentium gigni ex $m o$ in quadratum $a m$; non video qua ratione istud concordet cum pronuntiato Dettonuillæi in epistola illa pag. 15. *summam pyramidalem esse summam triangularem summarum triangularium*, nihilominus tamen non esse nisi dimidium ordinarum $m o$ in quadratum $a m$.

COROLLARIUM IV.

Non tamen inde inferre vllus debet negari à nobis quod Dettonuillæus affirmat *triangulares numeros hanc habere proprietatem ut duplum eorum imminutum numero exponente, sit æquale quadrato numeri ipsius exponentis*; concedimus enim id lubenter; imò addimus non fuisse confugiendum ad triangulares numeros, ut ostenderet summam eorum ad Geometrica ista applicatam esse dimidium quadrati $a m$; id enim in Geometria clarissimum est ipsis tyronibus, nempe triangulum $a m q$ esse dimidium quadrati $a m$ vel $m q$, quoties $a b e f$ est quadratum. In Geometria quoque illud certum est, triangula $a m q$, esse inter se ut rectas $l m$; ac proinde ipsa

etiam quadrata a m esse inter se vt rectis l m. Id tamen nihil obstat, vt demonstrauimus, quominus omnes m o ductæ in quadratum a m æquent summam triangularem summæ triangularis omniū m o. Sed hac contro- uersia seposita, sumamus quod magis constanter asseritur à Dettonuillæo, *summam pyramidalem* eam esse quæ æqualis est dimidio summæ factæ ex m o ordinata in quadratum a m; vel ex dimidio quadratricis secundæ a r b m per nostram methodum inuentæ, & ex quadrato a b. Hæc secunda qua- dratrix vocetur *summa pyramidalis nostra methodi*, vt distinguatur à summa pyramidali Dettonuillana.

PROPOSITIO IX.

Quadratricum nostrarum in solidis, superficiebus & lineis, al- tera proprietas & generatio demonstratur.

Iisdem manentibus (Fig. 66.) intelligatur recta b e esse perpendicu- lis ad planum b a d, & æqualis rectæ a b. Cylindraceutum altitudinis b e, cuius basis sit quadratrix prima a n b æquale esse cuneato solido cuius ba- sis sit figura a d c b m, altitudo verò triangulum a e b, ostendimus in quar- ti tetragonismicorum libri propositione vigesima prima. Porro cunea- tum solidum siue vngulare, vt definiuimus ibidem, est portio cylindra- cei (quod perspicuitatis maioris causa ponimus esse rectum) intercepta inter basim a d c b, & inter planum e a d. Potest quidem cylindraceutum non esse rectum; potest quoque inclinatio plani e a d esse alia; sed illa omnia satis intelliguntur, si istud cuneatum, quod *primarium* appellamus, rectè cogitetur.

Præterea ostendimus in vigesima secunda eiusdem quarti libri ipsum cuneatum esse dimidium solidi dicylindraceuti, cuius hæc est proprietas, vt sectiones eius omnes parallelæ plano e b a, vel p a b, sint quadrata quorum latera sint rectæ intra figuram b c d a accommodatæ ad positio- nem rectæ b a. Cuneatum istud solidum in cylindro contemplatus est & quadravit primus, quem sciam, noster Gregorius à S. Vincentio initio libri noni per propositiones octoginta: in cylindraceuto verò cuius basis sit parabola, idem Gregorius à propositione octogesima per consequen- tes viginti quatuor summa eruditione: in cylindraceuto denique cuius ba- sis sit hyperbola, quinam illum in parallelepipedum verterint, narraui- mus in præfatione libri præsentis. Istud solidum vocauit Gregorius *vn- gulam*; Dettonuillæus in Gallico scripto *ungulettum* vel *unglettum*; Andreas Tacquet *portionem cylindricam*; Nos *cuneum*, vel *cuneatum solidum*. Istud au- tem solidum cuneatum esse ad positionem plani p a d vel e b A æquale con- dicta ratione cylindraceuto baseos b a n, altitudinis a p vel b e, ostendimus in vigesima quinta, & vigesima sexta quarti tetragonismicorum, necnon in quadragesima superioris libri. Vnde patet vtrumque appellari posse quadratricem figuram solidam cylindraceuti habentis basim a d c b, altitu- dinem a p; ex quo fiat vt si planum q m o ponatur duci per centrum gra-

uiratis cylindracei, vt est brachium ga ad longitudinem am , ita sit cylindraceum ad quadratricem figuram solidam alterutram, & ita quoque sit basis bcd cylindracei suspensi ad basim $anbm$ figuræ quadratricis eadem altitudine præditæ.

Quadratrix solida cuneata, siue vngulare corpus baseos $bade$ comprehendit inter plana eab , ead & superficiem cylindricam basimque $bade$, intelligatur secari plano ad basim parallelo; ita vt in plano eab ad planum $bade$ recto faciat sectionem qM parallelam rectæ ab , & per q intersectionem rectarum ea , qM ducto plano ad planum $pade$, vel eab parallelo, eius sectiones cum planis eab , $bade$ sint rectæ qm , mo parallelæ rectis eb , ad . Patet sectionem vngularis istius solidi, siue quadratricis cuneatæ solidæ effectam plano per qM ducto æquidistanter basi $bade$, esse similem, æqualem & similiter positum baseos $bado$ cb portioni $ocbm$: Atque hæc est proprietas quæ demonstranda erat in solida quadratrice cuneata, vnde eius generatio tradi potest.

Simillima autem intelligi potest (Fig. 57.) in quadratrice parallelogrammi mixti $blmech$; eius enim quadratrix $biech$, talis est vt quocunque per i plano ad suppositum planum $bhco$ parallelo secetur, sectio illa sit parallela, similis, æqualis, & similiter posita atque hc . Quod non minus verum est si bhc non sit curua sed recta: ergo in superficiebus & solidis ostendimus proprietatem alteram quadratricis, ex qua ipsius generatio peti possit, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Hinc patet Dettonuillæum pronuntiasse quidem in tractatûs *de trilineis & vngulettis* propositione septima, summam quadratorum trilinei esse æqualem duplo summæ triangularis eiusdem trilinei inchoatam à puncto a ; sed id problema longè antea vulgatum fuisse.

COROLLARIUM II.

Cùm ex vnguletto siue vngula aut cunco habeatur solidum periphericum, & vngula sit quadratrix figura solida cylindracei iam descripta; quadratrix autem apud nos sit quod Dettonuillæo dicitur summa triangularis & pyramidalis; patet causa cur in problematum de periphericis solutione toties apud Dettonuillæum mentio fiat vngulettorum & summarum triangularium, aut pyramidalium; & cur quæ per vnguletta soluantur, solui etiam posse asserantur per summas triangulares & pyramidales.

COROLLARIUM III.

Patet tertio quadratrices primas solidas reductas ad cylindræum habere suum cuneum vngulare, qui sit quadratrix solida secunda cuneata; & isti quadratrici cuneatæ secundæ respondere pariter æquale solidum cylindraceum altitudinis eiusdem ap , baseos $arbm$, quæ est quadratrix secunda baseos bcd ad attinentis ad cylindræum primum. Hoc verò pa-

cto pergere possumus ad tertias, quartas &c. quadratrices, vt ex demonstratis liquet.

PROPOSITIO X.

AD proprietatem suprà expositam quadratricum, exiguntur Dettonuillanæ definitiones *summae triangularis, & pyramidalis.*

Ponendum est, quod suprà monuimus, Dettonuillæum superficiem $b a d c$ assignare solidum pro summa triangulari, sicuti & rectæ superficiem; unde fit vt solido excogitet summam triangularem quaternæ dimensionis. Istud in Epistola ad D. de Carcaui pag. 17. expresse docet ex lineis videlicet attinentibus ad summam triangularem linearum, confici superficiem; & ex superficiebus quibus componitur summa triangularis superficieum, constitui solidum; atque ex solidis pari methodo sumptis gigni summam pyramidalem. Istas porrò summas (*Fig. 66.*) ita extruit: summa triangularis superficiem $a d c b$ incipiendo ab a , vel à recta $a d$, est solidum insitens super basi $b a d c$, cuius hæc est proprietas, vt si secetur plano $q m o$ ad planum $p a d$ recto, & incedente per rectam $m o$ parallelam, rectæ $a d$, eius sectio sit æqualis figuræ $b c o m$. Istud solidum esse æquale cuneato solido vel cuneatæ quadratrici solidæ superioris propositionis, interceptæ inter plana $e a b$, $e a d$, $b a d$, & sumptæ secundum sectiones parallelas basi $b a c d$, nunc contendo. Nam sectio quæ est in plano ad basim $b a d c$ parallelo, ducto per $q M$ rectam, est per constructionem æquale portioni $b c o m$ ex basi $b c d a$ per planum $q m o$ abscissæ ad partes b ; ergo cum rectæ $a b$, $a c$ secentur proportionaliter per planum $q m o$, & huius plani cum illis solidis sectiones ponantur æquales; ita tamen vt sectio à plano per $q M$ ducto effecta in solido superioris propositionis sit inclinata ad planum $d a e$ inclinatione anguli $b a e$; sectio verò à plano $q m o$ effecta in solido præsentis propositionis sit perpendicularis ad planum $b a d c$: ergo est æquale, si ob inclinationem tantum minui debeat solidum superioris propositionis, quantum augetur propter basim in plano $e a d$ constitutam & comprehensam sectione cylindricæ superficiem & rectis $a d$, $a e$. Atqui ista basis ad basim $b a d c$ est vt recta $e a d$ ad $a b$ (istud enim probatur vt in cylindro perfecto) ex inclinatione verò illa fit vt solidum ita inclinatum sit ad aliud quod iisdem sectionibus perpendiculariter erectis ad basim constaret, sicut est recta $e a d$ ad $e a$: ergo quantum crescit ob maiorem basim, tantumdem decrescit ob inclinationem: manet igitur æquale; & summa pyramidalis superficiem $b c d a$ respondens, initio factò ab $a b$, est æqualis quadratrici cuneatæ solidæ superioris propositionis.

Similiter si ad figuræ $b a c d$ axem $b a$ ordinatim applicatæ omnes $a d$, $m o$ &c. concipiantur produci & ex illis ita productis intelligantur abscindi rectæ æquales arcibus $d c b$, $o c b$, & sic de aliis, gignetur figura quam incipiendo ab $a d$ Dettonuillæus appellat summam pyramidalem curvæ

d c b, & quam nos in definitionibus decimæ sextæ quinti libri superioris appellauimus *quadratricem mixtam expansam*. Nostra verò quadratrix reperi-
ta ex methodo superioris, cum sit *quadratrix mixta conuoluta*, quam defini-
uimus, & cum in corollario quinquagesimæ secundæ eam ostenderimus
esse æqualem expansæ; patet summam triangularem respondentem lineis
curuis esse illam ipsam quam nos quadratricem mixtam rectanguli mixti
nominauimus.

Quoniam igitur Dettonuillæus initio epistolæ ad D. Carcaui pag. 6.
& 16. definitionem summæ triangularis pro lineis & superficiebus tradit
per proprietatem in præsentī propositione expositam, eaque ipsa compe-
tit figuris quadratricibus repertis in superiore propositione, patet no-
stras quadratrices figuras non nisi nomine discrepare à summis triangu-
laribus & pyramidalibus Dettonuillanis. Atque adeo cum proprietas alia
summarum istarum quam in sexta propositione expendimus quadret quo-
que nostris quadratricibus, vndecunque euidentis esse summam illas Det-
tonuillanas quantum ad rem & vsum præcipuum attinet, & notas fuisse
Geometris, & libris iam ante aliquot annos editis consignatas, quod erat
demonstrandum.

COROLLARIUM.

Summas pyramidales non attigi hîc speciatim, eo quod similem gene-
rationem habeant, vt ipse Dettonuillæus disertè admonet pag illa 17.
Ita pariter inquit, *summa pyramidalis earundem ordinarum mo* (Fig. 66.) *gi-*
gnit planum, compositum ex totidem solidis, quot sunt portiones in axe a b inter se æ-
quales; quæ quidem solida formantur singula per summam triangulares particulares,
quarum summa tota constituit summam pyramidalem. Nam earum summa pyramida-
lis sumitur in hunc modum. Primò sumptâ summâ omnium triangulari, quæ vnum so-
lidum conficit modo iam explicato; tum reliquarum excepta prima omnium sumitur
summa triangularis, eaque efficit aliud solidum &c. & ita quot erunt diuisiones in
axe, tot erunt solida, quorum singula cum multiplicata fuerint per particulam vnam
earum in quas diuisus fuerit axis, dabunt totidem plano-plana eiusdem altitudinis, quæ
omnia simul complent plano-planum de quo agimus. Cernis plano-planum esse
Dettonuillæo solidum quaternæ dimensionis, & in illius generatione ean-
dem seruari methodum, quæ tradita est pro summis aliis quæ trinam di-
mensionem non excedunt. Si quid itaque difficultatis extraordinariæ ex-
perimur in huius solidi generatione, id oritur ex dimensione illa quadru-
plici, quam cum nostra methodus, nosterque intelligendi modus non fe-
rant, non est mirum quod illam speciatim persequi detrectemus, præci-
puè cum de eiusmodi summæ cum quadratricibus nostris comparatione
fatis egerimus in octaua, ibique vsurpato loquendi & demonstrandi mo-
re Dettonuillano, ostenderimus rei istius medullam nihil aliud contine-
re præter quadratrices nostras secundas. Quod si summam pyramidalem
curuæ lineæ contemplemur, illæ erunt cuneata solida trium dimensio-
num; quia cum ipsæ lineæ sint vnius dimensionis, earum summa triangu-

laris erit duorum; summa verò pyramidalis, trium tantum iuxta leges huius generationis à Dettonuillæo præscriptæ; iuxta quam patet cylindri summam triangularem esse debere quaternarum dimensionum; & pyramidalem, quinarum.

PROPOSITIO XI.

Summa cuborum definita in propositione prima præsentis libri est tripla summæ pyramidalis sub finem corollarij proximè superioris descriptæ.

Reuocetur ex tertio libro schema propositionis octauæ (Fig. 25.) in quo describitur a h g b figura comprehensa rectis a b, b g & quacunque linea a h g, ita vt omnes parallelæ ad rectam a b ex ipsa a h g demissæ in rectam b g cadant inter b & g; omnes item parallelæ ad rectam b g ex ipsa a h g demissæ in rectam b a, cadant inter b & g, & non secent lineam a h g nisi in vno puncto. Libra a c suspensâ ex b perpendicularo b g, brachio b c posuimus describi quadratricem secundam b x a o figuræ b g h a; præterea posuimus seriem graduum ad positionem rectæ b a, quorum primus sit parallelogrammum b c e g, secundus figura b a h g, tertius figura c f e d, quartus figura c t e d, quæ vt ex prima propositione huiusce libri liquet est summa cuborum, sicuti quadratrix secunda b x a o est summa pyramidalis sub calcem corollarij quarti superioris definita. Quoniam in illa octaua propositione tertij libri ostendimus quartum gradum esse triplum quadratricis secundæ; quartus verò gradus in hoc libro appellatur *summa cuborum*; secunda verò quadratrix nōminatur summa pyramidalis; patet summam cuborum esse triplam summæ pyramidalis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Nostra illa demonstratio est Geometrica, & prorsus cogit ad assensum; si tamen placet rem calculo experiri in exemplis facilibus, pone primò figuram b a h g esse quadratam, & similem æqualemque figuræ b c e g, quartus gradus in hoc casu erit æqualis ipsi quadrato, ac proinde quartus gradus erit tres trientes quadrati b g vel b a. At prima quadratrix erit triangulum quod est dimidium quadrati b a h g, sicuti ex 42. superioris libri constat, secunda verò quadratrix erit ceratoides parabolica ex eadem illa propositione, illa verò ceratoides per quadraturam parabolæ, est triens quadrati b g: ergo in hoc casu quartus gradus est triplus secundæ quadratricis.

Secundò pone lineam a h g esse rectam, & a b g h esse triangulum rectangulum, cuius latera a b, b g sint æqualia & comprehendant angulum rectum. Ex 44. libri quinti superioris constat quartum gradum esse æqualem quadranti vel tribus vncijs quadrati b g, nam secundus est æqualis dimidio, tertius trienti, quartus quadranti. Præterea prima quadratrix trianguli b a g initio ducto ab a, brachio æquante rectam a b, est vt iam diximus,

diximus, æqualis trienti quadrati ab , & secunda quadranti eiusdem quadrati; ergo cum initio ducto à puncto b secunda quadratrix sit ex decima ipsum suspensum $bahg$ auctum secunda quadratrice initij a , & imminutum duplo primæ quadratricis initij a , patet secundam quadratricem initij a esse dimidium quadrati ba auctum quadrante eiusdem & imminutum duobus eiusdem trientibus, hoc est compensatione facta, esse vnciam vnā quadrati abg : sed quartus gradus est æqualis tribus eiusmodi vnciis: igitur quartus gradus in isto etiam casu est triplus secundæ quadratricis, ac proinde summa cuborum est tripla summæ pyramidalis.

COROLLARIUM II.

Dettonuillæus ait in tractatu de trilineis & vnglettis *summā cuborum* esse æqualem sextuplo *summæ pyramidalis*. Cuius pronuntiatum vt verum sit, intelligere debet nomine *summæ cuborum* solidum aliquod quartæ dimensionis; cum nomine *summæ pyramidalis* designet solidum eiusdem generis; nec possit esse æqualitas nisi inter ea quæ eidem generi supponuntur. Si igitur intelligat per summam pyramidalem dimidiū secundæ quadratricis bx a o multiplicatum per quadratum rectæ bg ; & per summam cuborum designet quartum gradum ct ed ductum in quadratum rectæ eiusdem bg ; verissima est eius assertio. Sed quid ipse velit, cum liquidò mihi non constet, suspensio hic incedo gradu; dubium verò istud de mente Dettonuillæi fecit, vt de mea dubitari noluerim, ideoque huc reuocarim, quamuis aliis verbis, propositionem illam.

PROPOSITIO XII.

R Educatur ex tertio libro schema propositionis vigesimæ (*Fig. 32.*) vbi duæ quælibet rectæ ba , ac secant se ad normam, & ad positionem rectæ ac insistit rectæ ba figura quæcunque $bica$, & eadem $bica$ ad positionem rectæ ba insistit rectæ ac iuxta cautiones superioris propositionis. Intelligitur solidum cuius sectiones sunt quadrata rectæ hi parallelæ ad rectam ba , æquidistantia plano xab recto ad planum bac ; intelligitur præterea aliud solidum cuius sectiones parallelæ plano xac sunt quadrata rectæ fi parallelæ ad rectam ac . Ex rectis ac , ab abscinduntur ea , ae inter se æquales.

Ostenditur in illa vigesima propositione solido sectionis quadratæ genito ad positionem plani xac æquiponderare, brachio da , idem spatium quod solido alteri, brachio ea ; hoc est quadratarum spatium siue triangulares summas vtriusque solidi esse easdem. Istud demonstrat quoque Dettonuillæus tractatu de *trilineis & vnglettis* propositione quinta pag. 5.

Propositionem præsentem huc reuocandam esse duximus duabus de causis, quarum prima est quod eius methodus sit generalis, & utilissima

Gg

nobis fuerit ad solutionem problematum propositorum obtinendam. Altera causa est quòd cùm calculum nostrum initio præsentis anni edidissimus (statim videlicet, vt accepimus primas epistolæ ad D. Carcaui quatuor pagellas e prælo recentes, & ad nos missas seorsum ab aliis postea cudendis) appendicem historiæ suæ addidit Dettonuillæus 20. Ianuarij 1659. qua vitiosum esse nostrum calculum quæsitum potissimum sexti contendebar. Respondimus extemplo vitium illud esse Typographi, & emendari satis potuisse ex comparatione quinti quæsitum cum sexto, cùm ex methodo huius propositionis vigesimæ, in vtroque quæsito secundus numerus proportionalis qui repræsentat æquiponderans siue quadratarium spatium, esse debeat idem, & de facto sit idem vtroque pro primo casu tractato, pro altero autem verba repræsentantia secundum numerum sint vtroque etiam eadem, nisi quod in sexto quæsito pro *quintuplum* ex quæsito quinto aduocandum, adscriptum fuit *quadruplum*. En responsionis nostræ ipsa verba.

ANTONII LALOVERÆ Societatis IESV responsio ad nouissimam Historiæ Cycloideos appendicem.

Solidi circa axem circumductu totius semicycloideos geniti centrum grauitatis in *Quæsto* nostri iam editi Calculi sexto non rectè consignatum fuisse obiicit Autor Historiæ Cycloideos in Appendicula recenti. Ad quod respondeo emendato vculæ vnus errato, tolli ansam carpendi calculum centri illius difficillimum. Nam in quæsito sexto si pro voce *quadruplum* legas *quintuplum* restitutos habes primarij istius casus numeros. Ita autem legi oportere liquet ex vigesima propositione tertij libri primo quoque die edendi, vbi demonstratur in quæsitis quinto & sexto secundos quatuor proportionalium numeros esse vtroque eosdem; quod & à nobis obseruatum esse liquet ex nuda calculi inspectione. Nam in quæsito quinto secundus numerus primi casus est *quadrans tertij auctus quatuor trientibus secundi*, & *imminutus sexdecim nouenis primi*: secundus verò numerus secundi casus est *quintuplum tertij imminutum centum viginti & octo nouenis primi*, qui numeri iisdem verbis resumpti iacent in sexto quæsito castigatâ illa vculâ. Cæterò istud erratum prouidentia Numinis prorsus singulari euenisse agnosco: nam Autor illius Historiæ eo deprehensio calculum saltem istum, quia spurium illum esse credidit, de meo esse concedit, alioquin repugnaturus.

Lubens accipio quod dat; plurimùmque etiam gaudeo centri calculum alterius à me editum illi probari; nam meæ illum esse inuentionis, clarius est quàm vt seriò negari possit. Cùm autem difficultatis apex, de sententia etiam Aduersarij, sit in calculo centri semisolidorum; ille, si vitio caret, similia errata (si quæ forte irrepperint in aliorum minùs difficultium ratiocinia) satis superque purgabit, saltem vsquedum prodeant (quod breui nec vt speramus inutiliter fiet) nostri de Cycloide libri, ad

quorum methodum calculus à nobis euulgatus exigatur à computandi peritis, & si opus fuerit etiam castigetur. Tolosæ 15. Februarij 1659.

Hæc tunc respondi, nunc verò addo vnum quod mihi exciderat dum falsam illam Anonymi de me criminationem repellerem. Doctos homines quæsisse sæpe causam cur Dettonuillaus vbi reprehendisset calculum nostrum in duobus omnium difficillimis casibus, illos non emendarit substituendo veros ex suo rationario abaco depromptos. Sicuti enim vnum & idem non sunt agnoscere vitium quadraturæ circuli, & illam minimè fucatam apud se habere; cùm Archimedes docuerit Posteris methodum vitij detegendi, nec tamen quadraturam ipsam germanam vspiciam dederit: ita in præsentī negotio euenire facile potest. Certè nos in tertij libri propositionis vltimæ scholio primo tradidimus modum non vnum explorandi numquod calculis istis de Cycloide initis vitium subfit; nec continuò, si ille modus verus est, confecimus cætera longè difficillima.

Porro quamuis in illa responsione significarim tetragonismum circuli mihi à me inuentum videri, absit vt inde velim inuentæ eiusmodi quadraturæ laudem mihi arrogare; vel si quis ante me illam posthac in lucem prompserit, ausim illius laudis minuendæ causâ iactare, apud me solum iam extitisse problema illud vsque à nascentis Geometriæ temporibus sedulò quæsitum. Expertus enim noui multa credi reperta, quæ ab ipso etiam Inuentore, dum supremâ diligentia examinantur, comperiuntur esse falsa. Quamuis verò non comperirentur esse falsa; inuentio- nis tamen lex æquissima id præscribit, vt illi qui primus propalam posuerit alicuius rei diu perquisitæ solutionem, nemo obstrepat hac voce, *ego in seriniis iamdiu occultabam inuentum illud*. Ita enim obuiam itur mille laudis alienæ detractionibus; ignauumque fucorum pecus procul arceatur ab aluearibus, ne prædatitio laboriosarum apicularum melle ditetur.

PROPOSITIO XIII.

DEclaratur quo pacto ex vna quadratrice data, & ex data suspensa magnitudine eruantur aliæ quadratrices, vndecunque suspensio fiat.

De hoc Dettonuillaus agit in tractatu *summarum simplicium, triangularem, pyramidalium*; quem aliis examinandum, & in praxim reducendum relinquimus; nobis enim id non planè licuit. Iamdiu demonstrauius in secundi libri tetragonismicorum decima propositione (Fig. 66.) si figura a d c b, postquam suspensa fuit ex a perpendicularo a d, brachio a g, ponatur suspendi ex x per recessum ab ipsâ, brachiumque par retineatur, & perpendicularum priori parallelum, quadratrici primæ a n b m addi oportere spatium, quod ad suspensum a d c b fit, vt recta a x ad a g, ad hoc vt fiat quadratrix pro suspensione ex puncto x. Quòd si intelligatur per accessum suspensio fieri ex m, reliquis seruatis; vt fiat æquiponderans res-

G g 2

pondens huic suspensioni, oportere demi eidem quadratrici $anbm$ spatium, quod ad $adcb$ sit, vt accessus am ad ag .

Præterea quoniam in septima ostendimus figuræ suspensæ $adcbm$ quadratricem respondentem brachio bu , esse ipsam $adcbm$ imminutam primæ quadratrice $anbm$; quadratrix quoque respondens ipsi $anbm$, brachio eodem bu , erit ipsa primæ quadratrix $anbm$ imminuta quadratrice secunda $arbm$. Cum ergo toti $bcdam$ æquiponderet figura ipsa $bcdam$ imminuta quadratrice primæ $anbm$: ipsi autem $bnam$ æquiponderet ipsa $bnam$, demptâ secunda $bram$, si de æquiponderante toti $adcbm$ dematur æquiponderans parti $anbm$, relinquetur æquiponderans alteri parti $anbcd$, nempe figura $adcbm$ imminuta duplo primæ quadratricis $anbm$, & aucta quadratrice secunda $arbm$. Igitur cum $anbcd$ sit quadratrix prima totius $adcbm$ posito brachio bu , & ipsi $anbcd$ æquiponderet ipsa $adcbm$ dempto duplo primæ quadratricis $anbm$, & addita semel quadratrice secunda $arbm$, patet posito brachio bu figuræ $adcbm$ quadratricem secundam esse ipsam $adcbm$, dempto duplo primæ quadratricis $anbm$, & addita semel quadratrice secunda $arbm$. Non multum ab simili methodo possemus inuenire secundam quadratricem ex secundâ datâ $arbm$, vbicunque statuatur secunda suspensio, sed illud satis constat ex nostris principiis olim demonstratis, istudque sufficit præsentis libri instituto.

Hoc tamen omitti non debet ex octaua secundi tetragonismicorum istas quadratrices haberi, si brachium ag mutetur in quodlibet aliud ax ; nam vt recta ax ad ag , ita reciprocè est æquiponderans brachij ag ad æquiponderans brachij ax . Illud quoque obiter dico ex prima quinti tetragonismicorum constare methodum inueniendi æquiponderans quocunque perpendicularo per a ducto, & suspensione ex a factâ, si detur æquiponderans figuræ $adcb$ brachio ag perpendicularo ad , & eidem æquiponderans aliud brachio fa perpendicularo ab . Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XIV.

VSus libræ planæ à nobis inuentæ & expositæ in vigesima octaua quarti libri tetragonismicorum iterum inculcatur, ostenditurque quibus illum verbis Dettonuillæus expresserit.

Libra plana, prout à nobis proposita fuit in quarto libro iam laudato, insigne præstat officium, dum quadratricem ad positionem perpendiculari in librâ grammicâ inueniendam, docet reperire ad positionem ipsius libræ grammicæ quæ ad rectos angulos secat ipsum perpendicularum. Porro istud perpendicularum conuertitur in axem ipsius libræ planæ, prout eo loci explanata istius nostri inuenti methodus docet: nec frustrâ illud esse credideris: aliquando enim non solum compendiosius per illam inueni-

tur quadratrix vel summa triangularis: sed necessariò etiam, cum non rarò nulla occurrat via illam inueniendi per libram grammicam.

Cæterùm Dettonuillæus hoc ipsum vsurpat demonstrando summam triangularem esse æqualem singulis sectionibus parallelis libræ grammicæ multiplicatis in sua brachia, siue in distantiam suorum grauitatis centrorum à perpendicularo eiusdem grammicæ libræ, quod in axem libræ conuertitur. Vide ipsum tractatu de trilineis propositione 13. & 14. & de arcubus circuli propositione 18. vide etiam quæ scripsimus in corollario quadragesimæ quartæ libri superioris. Res ergo ante Dettonuillæum non erat incomperta, sed illis nominibus non denotabatur; ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

AN methodus qua Dettonuillæus vtitur & quam à se inuentam profitetur extiterit ante ipsum, visque illius agnita fuerit.

Quæ hætenus præsentì libro demonstrauius quemlibet cogunt fate-ri eiusmodi methodum antea cognitam & in vulgus editam fuisse. Ne quis verò putet vim illius methodi à nobis iam olim vulgatæ, incognitam tunc nobis ipsis fuisse, indicamus corollarium secundum vigesimæ tertiæ quarti libri, vbi ita scripsimus de quadratario spatio quod ex vngulari vel cuneato deduximus *præsens theorema planam viam facit ad plurima problemata abstrusa pariter & vilia*: quod in corollario primo decimæ nonæ primi libri huius Operis inculcauimus; in corollario verò tertio eiusdem propositionis agentes de proportionem quam habent peripherica genita circumductu quodam sectionis conicæ ab Archimede intentato, diximus *eius inuentionem alia via esse difficillimam, nec adhuc quantum recordamur ab vllò inuentâ*: & paulò post asseruimus, pari pacto assignari posse proportionem innumerorum eiusmodi periphericorum ex parabolæ circumuolutione natorum, *ad quam si clauso isto tramite tentes ire, mirum est si aliud inueneris præter dumeta & sentes densissimas, quæ te cæco inextricabilique errore impediant*. Mirabilem verò esse quadraturam cunei vel vngulæ satis nuper indicauius in scholio duodecimæ propositionis primi libri, qui seorsum ab aliis prodiit anno superiore: sed longè antè illud prænuntiaueramus in tetragnomicorum librorum quarti propositione vigesima sexta, in cuius scholio hæc verba exarata extant, quibus innuimus tunc, quousque nos in quadraturæ instituto progressos esse existimarem: *neque exiguum profecisse nos putamus dum ad cunei notæ præsentem quadraturâ Deo dante peruenimus, hoc enim est veluti dimidium facti iam habere*. Quod si aliis ista iam semel inuenta facilia iudicentur, id nihil detrahât de inuentionis difficultate, siquidem quid non est aditu facile, postquam ad illud semel explanata patet via?

Stet itaque istam methodum si eius originem altius repetamus deducitam esse ab Archimedeis inuentis; si eius amplificationem, eam longè ante Dettonuillæi literas de Cycloide, agnitam & publici iuris factam

esse; si eius vtilitatem, maiorem certè eam esse quàm credi primo aspectu possit, ad ea quæ ad hunc vsque diem irreperta latuerant, inuenienda. Huc pertinet quod Dettonuillaus de hac methodo agens pag. 4. *Historia Cycloideos* scribit de se ipso. *Tunc ego ipse mihi pro dimensione & centro grauitatis solidorum, superficierum tam planarum quàm curuarum, nec non linearum curuarum eas excogitavi methodos, quibus pauca admodum posse se subducere iudicavi.* Quæ quidem huius Autoris verba non tantùm prædicant quanti apud ipsum momenti sit illa methodus, verùm indicant etiam ipsum sibi ascribere inuentionem illius. Sed quam certum est posse illum esse inuentorem istius methodi absque vllius alterius Geometræ auxilio, tam certum quoque est ipsum non posse nunc dici primum illius inuentorem, postquam manifestum sit decem fermè antè annis elementa tetragonismica, quibus continetur, in lucem produsse. Ex quo patet quàm cautè quisquis aliquid de suo inuenit promere debeat vocem illam Vatis.

Primus ego ingredior. —

— opus hoc de monte Sororum

Detulit intactâ pagina nostra viâ.

Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVI.

Quid de methodo *indiuisibilium* quam Dettonuillaus in suo opere sequi se profitetur sentiamus, præcipuè si cum methodo Antiquiorum comparetur.

Primò quidem nomen ipsum *Geometria indiuisibilium*, quod ab annis circiter viginti auditur inter Geometras, improbaui in secundâ appendice Elementorum tetragonismicorum sub finem; vbi scripti, cur magnus ille Caualerius suam methodum debuerit appellare *Geometriam indiuisibilium* potius quàm *diuisibilium*, à me nesciri. Post hæc scripta gauisus sum in meam sententiam conuenisse C. V. Ismaëlem Bullialdum in libro de lineis spiralibus proposit. 42. obiter hîc notabimus, inquit vir ille insignis, tam perperam ac improprio nomine *indiuisibilium* methodum, nouum suum artificium appellauisse Caualerium, quàm subili ac mirabili sagacitate, profundaue mentis indagine illud inuenisse. Nulla enim quantitas est *indiuisibilis*. Debuerat Caualerius animaduertisse artificium eiusmodi, aliud nihil esse, quàm eiusdem mensura, vel eiusdem proportionis, per omnes duarum positarum magnitudinum partes, continuam similemque in infinitum applicationem. Ita vt appositè magis illam excellentissimam methodum *ἡμιοστυμμετρίαν* appellauisset quàm *indiuisibilium*.

Secundò si *Geometria indiuisibilium* ea sit in qua quidlibet assumi possit, absque vlla demonstratione, tanquam certum; ea omnibus Geometris improbanda iure meritò iudicabitur: lege (si lubet) quæ in quadragessimæ quartæ progressu scripsimus hac de re. Quod si non assumat nisi certa apud omnes, vel nisi vt *postulata*; non erit eatenus contemnenda. Præterea si in demonstrationibus quæ fiunt per reductionem ad impossibile

omittat tractum illum longiorem quidem; sed antiquæ Geometriæ maiestate dignissimum, cuius in tertia propositione meminimus; nihil inde probri contrahet, præsertim cum id posse fieri iam demonstratum sit à Bullialdo in opere cui titulus, *exercitatio circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras*, & ante ipsum à Gregorio à S. Vincentio libro 2. de progressionibus Geometricis; nec non ab Andrea Tacquet in Elementis Geometriæ: curandum tamen est vt omnia rectè præparentur, sicuti annotauimus in tertia illa propositione. Denique si in modo demonstrandi admisceat illam quam, vocant Speciosam Algebram, adhibendo regulas multiplicationis, diuisionis, additionis, & subductionis, res adhuc obscurior euadet, facilèque fieri poterit vt problema solutum putetur, cum adhuc solutionem desideret. Nisi enim purgetur ab illis solidis quaternæ dimensionis, & aliarum omnium supra trinam excurrentium, solutio problematis Geometrici non est perfecta: quapropter hoc illam nomine nolim accusare nisi ad summum obscuritatis & Arabismi non necessarij.

Tertiò si methodus indiuisibilium vocetur illa quæ, demonstrata in genere linearum, transfert ad genus superficierum; & in isto probata traducit ad solidorum supremum genus; non potest dici veritatis secura, nisi in iis quæ per methodum Antiquorum demonstrari possunt; ita in illa tunc appendice scripsimus, itaque etiam nunc censemus cum Reuerendo P. Andrea Tacquet, libro primo *Cylindricorum & annularium* prop. 12. & libro secundo propositione secunda in scholiis; vbi rectè appellat illam methodum *per heterogenea*, antiquam verò *per homogenea*. Nam illa, id quod magnitudinibus vnus generis, verbi causa, lineis competere demonstratum fuerit, transfert in magnitudines alterius generis, nempe in superficies; quod sanè consequens non est, & si quando cohærentia ista duo appareant, id propterea tantum fit, quòd ex propriis eiusdem generis principiis idem illud consequamur. Istæ verò omnes cautiones etsi accuratè obseruentur, in confesso adhuc est apud eos etiam qui illa vtuntur, methodum Antiquorum esse Reginam cui ista famulari teneatur: vnde Dettonuillæus in Epistola quam præmisit tractatui *de æqualitate lineæ spiralis cum parabolica*, ait se illam demonstraturum methodo Antiquorum, reiectâ illâ *indiuisibilium*, *Vt res in posterum firma stet, & citra Vllius controuersie motum*. Hinc verò apertè constat quam fallantur illi qui iactant solam methodum indiuisibilium esse nunc in pretio, & audent etiam scribere *nunc demonstrationes lineares sperni à summis quibusque viris*. Id enim falsum est, cum Geometria antiqua dignitatem suam apud omnes retineat, & Algebra etiam speciosæ ita domina sit, vt eam regat fere in omnibus. Quot enim sunt quæ ex mera Geometria passim aduocantur in subsidium ancillæ istius? Ergo &c. quod erat ostendendum.

DE CYCLOIDE
PROPOSITIO XVII.

AN quæ hodiè solvuntur problemata sint difficiliora iis quæ olim soluta sunt a Principibus Geometris. Nonnulla præterea narrantur ad historiam horum problematum pertinentia.

Huius examinis ansam præbuit nobis Autor epistolæ ad Dettonuillæum quæ præmittitur eius de Cycloide seu de rotatrice, vel rotatricula Operi, ibi enim suam de hac quæstione mentem ita explicat. *Quamvis si ingenij magnitudinem æstimes, nullus fortasse Antiquiorum superari Archimedes; indubitatum tamen est, si difficultas problematum pendatur, hodierna longè difficiliora esse antiquis. Ut manifestum erit comparanti figuras Vniusmodi, & ut ita dicam Vniuersales, quas Archimedes contemplatus est, cum figuris quæ hodie considerantur à Geometris, præcipuè Verò si conferantur cum cycloide & eius solidis, cum scalario, & cum aliis superficiebus solidisque, quorum omnium Tu solerter detexisti proprietates; ut nulla extiterit ætas adeo apta examinandis problematum difficillimis. Caterum nullius eorum quæ Tu ut difficilia proposueras vidimus adhuc solutionem, licet viderimus eorum quæ iam ante denuntiarias esse faciliora, nempe inuentionem centri gravitatis lineæ curvæ & dimensionem superficierum, quibus solida illa continentur, quam D. Wren misit ad nos literis datis 12. Octobris, & D. de Fermat suis etiam in literis, ubi methodum pulchram admodum & generalem pro dimensione superficierum periphericarum tradit. Sed nullam prorsus vidimus solutionem difficillimorum illorum Geometria anigmatum, videlicet centri gravitatis solidorum, & semisolidorum, eorumque superficierum. Aliis equidem potius quàm Tibi (tua enim modestia id vetat) sincerè dixerim quanta inde iudicata sit difficultas tuorum problematum, & quarum ingenij Virium is qui ea soluerit.*

Hactenus ille; ego tamen primò planè assentior Gregorio à S. Vincentio qui in propositione 18. lib. de progressionibus Geometricis ita scribit. *sed hæc in gratiam antiquitatis dicta sint, quam venerari omnes deberent: illius enim sæculi Virorum labores & ingeniorum parta hucusque non vidi à Recentioribus adæquata* Hæret enim menti memoria auiculæ illius quæ, ut sapienter fingitur, dorso æquilæ incumbens defertur ad nubes usque, inde verò nitu proprio vehementem se alitem superuolitat, quasi primas sublimis volatûs partes illi præreptura; sed merito pensandum est, num tanto superuolet, quanto ab ima terra fuit euecta.

Secundò fateor non pauca hac ætate reperta esse quæ Archimedis ævo ignota fuerunt, vel non ita elucidata. In hoc numero pono Algebram speciosam quam magni facio, ipsamque etiam, si placet, Geometriam indiuisibilem; dummodo ambæ stipendia mereantur sub Antiqua, solidaque Geometria, & illam ab Arabismo quodam inextricabili purissimam seruent. Sed quod mihi ad inuentionem multò potentiùs videtur, est libra instaurata: negari enim non potest quin illius vsus hoc nostro sæculo instauratus, & non pacum amplificatus fuerit; quod utique luculentiùs patebit, si inde prodeat quadratura illa circuli & hyperbolæ, quam diu parturit

parturit mens nostra, nec dum tamen aut parit, aut partem euulgat.

Tertiò non nego quin Cycloideos cogitatio pertineat tota ad præsens nostrum sæculum, & quin proposita circa illam problemata sint mirum in modum difficilia, etiam si tententur ab eo qui principiis libræ non vulgaribus sit instructus: sed an tanto interuallo nunc superes communem Geometrarum industriam promendo eorum solutionem, quanto Archimedes superauit suæ ætatis captum Geometricum, iure merito dubitetur: ut enim illa problemata fuerunt à Dettonuillæo totius Europæ Geometris summis proposita; statim ego qui longè absum ab eorum ordine, primum huius operis librum inueni, & intra præscriptos tres menses reliquorum omnium solutionem excogitavi. Quod autem exigui homo ingenij tam citò repererit, quis dicat in tanta Geometrarum nostræ ætatis luce abstrusum & reconditum, quam quod maximè?

Quartò postea quam primum librum in lucem dedimus, misimusque Romam, Parisios, Lugdunum &c. Anonymus, cum sine discrimine omnia problemata proposuisset *præstantissimis toto orbe Geometris*, nec distinxisset quæ à Tyronibus, quæ à Magistris illis & summè doctis Viris exigeret, mullitauit tamen per suos, istud quod nos primi dederamus carere difficultate: postquam verò fluxit tempus quod soluendis quæstionibus suis præscriperat, tresque alij insuper menses, in prima Dettonuillani libri fronte, hoc est, in epistola illa cuius fragmentum iam relatum est, exaratum conspeximus, *non fore necessarium ut Dettonuillæus fusius exponat problemata illa quæ tanquam facilia proposuisset, sed quæ ut difficilia, hoc est centra gravitatis solidorum & semisolidorum Cycloideos, eiusque partium tam circa axem quàm circa basim, quibus ipse in primis literis præmium pecuniarium annexum esse voluisset.* At ubinam, & quando tanquam facilia illa proposuit? & cur de facilibus atque obuiis interrogauit *præstantissimos toto orbe Geometras*? nempe illa omnia facilia illi fuerunt, ubi dubitare non potuit quin à nobis, qui magni Geometræ profectò non sumus, inuenta essent.

Quintò idem ille Autor (ut sub calcem quarti libri monuimus) initio huius anni quatuor primas pagellas suæ ad D. de Carcaui epistolæ adhuc è prælo madidas seorsum misit, monens reliquorum editione prælum distineri. Ibi cum legissemus omnium casuum calculum primo quoque die ex Typographi officina proditutum, vnus verò numeros interim exhiberi, promptissimus ex tempore nostros casuum omnium calculos, & typis cufos ad Geometras insignes misimus Parisios, Romam, Lugdunum & ad alias Europæ Vrbes primarias: miramur verò etiam nunc calculos illos ex illa officina tunc non prodiiisse, cum integer liber inde emissus est. Nec satisfecit Dettonuillæus in tractatu generali *rotatricis vel rotatricula* (quam nos cycloidem magnam hætenus appellauimus) dum, ubi visus sibi ipse est tradidisse methodum soluendi problemata à se anno superiore proposita, tractatum clausit his verbis. *Facile erit toti orbi per methodum iam traditam inuenire calculum omnium casuum.* Ego certè id facile non reperi vn-

H h

quam ex quo ille liber venit in manus meas, quod totum adscribi mearum ingenij virium imbecillitati velim: & hanc esse causam cur ab illius laude cumulata abstineam. Hoc certò affirmo, magnam lucem ex illo calculo, si omissus non fuisset, deriuandam fuisse in ipsam Autoris methodum; plurimùmque dolere me subreptam mihi facultatem esse comparandi mei calculi pro singulis casibus cum Dettonuillano; id enim sine vilo dubio præstitissem in reliquis, sicuti in vno illo quem dedit, iam ab huius anni initio præstiti.

Sextò tacere non debeo Antimum Farbium; euulgato nostro calculo, suum de Cycloide Opusculum edidisse Romæ, quod è prælo recens R.P. Bauguillius quarto mensis Martij anni labentis 1659. ad nos beneuolè misit, redditumque fuit vno post mense, nempe tertio Aprilis. Suspexi subtilitatem ingenij illius eximam, ægreque tuli non licuisse illi impendere inquisitioni centrorum grauitatis pro solidis omnibus & semisfoliis: ex animo autem complexus sum & veneratus singularem illam Viri humanitatem, qua & viginti nostras propositiones superiore anno Romam missas, & calculum initio præsentis postea transmissum legere non solum non contempsit, sed iam lecta sibi etiam mirificè probari testatus perurbanè sæpiusque est nostro Bauguillio.

Decimò ne actum agam, plura ad hanc historiam attinentia si te iuuant, vide scholia apposita sub finem primi libri; decimæ propositionis libri secundi; vltimæ propositionis libri tertij & quarti; vicesimæ tertiæ libri quinti; & quæ in duodecima præsentis scripsimus.

DEFINITIONES.

SIt (Fig. 70.) circulus, $b e d f$ cuius diametri $b d$, & $e f$ secant se ad normam in centro c ; in axe $d b$ producto sumptum sit quoduis punctum a , & per a ducta sit $a h$ parallela axi $e f$. Circa axem $a h$ manentem intelligatur moueri planum $h a d$ in quo est peripheria circuli $b e d f$; superficies quam peripheria $b e d f$ motu suo describit vocatur à nobis *corona annularis*, vel *annulus*. Si loco circuli $b e d f$ ponatur ellipsis, gignetur corona elliptica, si parabolæ segmentum sint $e b f$, & $d f$, appellanda erit *parabolica*; si segmenta sint hyperbolica, vel cuiuscunque alterius figuræ, inde nomen aduocandum illi erit; methodus enim huius quadraturæ est generalis, vt patebit. *Semicoronam interiorem* voco eam quæ describitur motu figuræ $e b f c$; *exterio-rem* verò, quæ gignitur motu figuræ $e d f$. Posuimus autem rectam $a h$ nec secare nec tangere figuram $e b d f$, ad hoc vt corona internè *aperta* gignatur: nam si tangat illam, fiet corona sine foramine, quam *clausam* appellamus. Quod verò circuli vel annuli nomen magnam habeant in significando affinitatem liquet ex eo quod ad illam allu-

dendo Poëta scripserit, *Maiore quisquam circulo coronetur*. Cæterum hæc corona si rectè attendatur nihil est aliud, quàm differentia duorum periphericorum circa manentem rectam a h descriptorum motu figurarum h e d f X, h e b f X, quarum latera h e, X f æquidistant rectæ b. d, & constituunt parallelogrammum h e f X; periphericorum illud vocetur *maius*; istud *minus*. Itaque cum ex methodo tradita in tertio huius Operis libro obtineamus calculos singulorum periphericorum; indidem constabit eorum differentia, quam nominamus *coronam*.

PROPOSITIO XVIII.

Pono (*Fig. 70.*) r d s esse superiorem partem semicycloideos parvæ, cuius basis r c, axis c d, & illi ad partes oppositas super eadem basi respondere alteram superiorem partem semicycloideos parvæ r b s, cuius axis b c erit æqualis axi c d. Pono præterea rectam a c habere rationem numeri ad numerum, & rectam a c non esse minorem ipsa b c. Ex puncto c excitata sit c l perpendicularis ad planum e c d, æqualis ipsi c d.

Ostendendum est coronam integram esse æqualem cylindræo altitudinis c l, baseos æquantis tot octonarios circulorum descriptorum diametro b d, quot unitates continet numerus respondens rectæ a c. Ita ut si ex recta b c auferantur b o, o p, p q, q a, & ita deinceps in infinitum, corona clausa, nempe quando a congruit puncto b, æquet cylindræum altitudinis c l, baseos æquantis vnum octonarium circulorum; si a congruat puncto o, duos octonarios; si puncto p, tres; si puncto q, quatuor, & ita consequenter secundum progressionem arithmeticam.

Per b, d, o, p agantur b i, d x, o u, p z parallelæ ad rectam a h vel c r; ponatur circa rectam b i generari corona clausa motu figuræ d r b s. Libræ planæ axe c r sustentaculo b i æquiponderans cycloidi parvæ r d s est quadrans circuli genitoris b e d f per primi libri decimam sextam; ergo per decimam secundi tetragonismicorum si axis c r mutetur in b i, & sustentaculum b i in o u, æquiponderans eidem suspenso erit ipsum suspensum semel sumptum, sed auctum æquiponderante prioris suspensionis. Ratio verò cur semel sumatur est quia recessus b e intervallum æquat longitudinem brachij b o, quapropter cum recessus erit c o, sumetur bis; cum c p, ter; cum c q, quater &c. semper verò augebitur æquiponderante primæ suspensionis. Similiter semicycloidi parvæ r b s axe r s, sustentaculo d x, æquiponderans est quadrans circuli genitoris; ergo per nonam secundi tetragonismicorum, si axis c s mutetur in b i, & sustentaculum d x in o u, æquiponderans semicycloidi parvæ r b s erit ipsa semicycloi-

H h 2

des rbs semel sumpta, sed imminuta parte æquiponderante; perpendicularo autem ou erit eadem rbs bis sumpta, detracto æquiponderante eodem; perpendicularo autem pz , ter sumpta, dempto eodem &c. ipsa verò semicycloides æquat bis quadratum bc per duodecimam primi libri.

Rursus completis parallelogrammis bci , bct , itm , $umnz$, quoniam axe it , sustentaculo um , æquiponderans parallelogrammo $rfti$ est dimidium ipsius parallelogrammi; ipsum verò dimidium æquat, per tertiam libri primi, dimidium circuli genitoris; æquiponderans toti figuræ $irdst$ erit tres quadrantes circuli genitoris aucti duobus quadratis semidiametri bc ; vel si progressionis perspectæ ponatur primus terminus quadratum bc ; secundus verò terminus sit $bedf$ circulus, æquiponderans istud erit tres quadrantes secundi termini perspectæ progressionis, & insuper bis primus terminus. Æquiponderans autem figuræ $irbst$ erit tres quadrantes secundi termini, deducto bis primo.

Ad rectam cl æqualem radio cd recta cy sit vt circulus ad quadratum suæ diametri, vel, sicut initio tertij libri ostendimus, vt quadrans secundi termini perspectæ progressionis ad primum terminum. Igitur per methodum decimæ octauæ primi libri, periphericum maius est cylindraceum altitudinis cy , baseos æquantis octuplum eius quod æquiponderat figuræ $irdst$, axe it , sustentaculo um : periphericum verò minus est cylindraceum altitudinis eiusdem cy , baseos æquantis octuplum æquiponderantis figuræ $irbst$, iisdem positis. Quoniam igitur corona est differentia periphericorum, si ex basi cylindracei maioris auferatur basis cylindracei minoris, residua fiet basis cylindracei æquantis coronam, & præditi eadem altitudine cy . Leges porrò subductionis postulant vt quoniam in basi minoris cylindracei sunt quadrantes additij tres secundi termini, & in basi maioris totidem etiam additij, se se elidant & nihil remaneat ex æquiponderante primæ suspensionis factæ axe rs ; quod, vt patet, est generalissimum, quæcunque sit figura $rdfb$, modo parallelæ ad rectam bd , secentur bifariam occurso rectæ rs , ac proinde sint ordinatim applicatæ ad ipsam rs . Quia verò basis cylindracei minoris habet duplum primi termini sed ablatium, basis autem maioris habet illud ipsum sed additium, patet ex subductionis Algebricæ præscripto, relinqui quatuor primos terminos additios, hoc est, suspensum $brds$, quod æquale per primi duodecimam est quadruplo quadrati bc , hoc est, quadruplo primi termini. Igitur cum si ex æquiponderante totius $irdst$ auferatur æquiponderans partis $irbst$ relinquatur æquiponderans alterius partis $rdfb$; patet compendiosius (quæcunque sit figura $rdfb$, habens proprietatem suprâ dictam) obtineri basim cylindracei æquantis coronam, si inueniatur æquiponderans figuræ $rdfb$; quæ cum habeat grauitatis centrum in recta rs , æquiponderans illius, axe bi , erit semel suspensum; axe ou , bis; axe zp ter &c. octuplum autem istius æquiponderantis erit basis quæ sita.

Habemus ergo ex ista libræ nostræ methodo coronam genitam figura qualibet $r d f t$, esse æqualem cylindræo altitudinis $c y$, baseos quæ ad octuplum figura $r d f b$ suspensæ sit vt $c o$ distantia axis cuiuslibet $u o$, ad $o p$ distantiam axis & sustentaculi, quæ in istis omnibus ponitur esse æqualis dimidio rectæ $b d$. Quoniam igitur in causa præsentis figura $r b f d$ est quadrupla quadrati $b c$, vel est quater primus terminus, patet coronam clausam genitam reuolutione figuræ $b r d s$ esse æqualem cylindræo altitudinis $c y$, baseos æquantis triginta duos primos terminos; genitam deinde circa $o u$ & apertam vtrinque interuallo rectæ $o b$, bis triginta duos; genitam deinde circa $p z$ & apertam vtrinque interuallo rectæ $p b$, ter triginta duos; & sic deinceps.

Denique quoniam vt est $l c$ recta ad $c y$, hoc est, vt primus terminus progressionis perspectæ ad quadrantem secundi, ita sunt triginta duo primi termini ad octo secundos patet ex reciprocationis lege cylindræo altitudinis $c l$ vel $c d$, baseos æquantis octo secundos terminos, vel circulos genitores, esse æquale cylindræo altitudinis $c y$, baseos æquantis triginta duo primos terminos: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Propositionis methodum esse generalissimam patet; concordiam autem esse omnimodam cum demonstratis à R. P. Andrea Tacquet, examinatori cuiuslibet planum erit. Vnde confirmatur principiorum libræ veritas, eorumque compendiosa methodus admirationem perito cuique Geometræ non vulgarem facit.

COROLLARIUM II.

Si $b e d f$ sit circulus, coronæ clausæ æquale erit cylindræo altitudinis $c y$, baseos æquantis ipsum circulum siue secundum progressionis perspectæ terminum octies sumptum; ergo per reciprocationis leges ista corona clausa erit æqualis cylindræo altitudinis $c l$, baseos æquantis octo quadrantes tertij termini, siue duos terminos tertios perspectæ progressionis: & si gignatur circa manentem $o u$, bis duos illos terminos; si circa $p z$, ter; &c.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus pro parua cycloide (*Fig. 70.*) periphericum maius genitum motu figuræ $i r d f t$ circa manentem $b i$, intelligatur diuisum bifariam à plano incedente per rectam $b t$, & parallelo ad planum $l c r$; in præsens verò consideretur pars illa quæ ad partes d iacet, & esto A grauitatis centrum partis illius; quod, vt patet, iacebit in recta $b d$. Intelligatur præterea progressio perspectæ cuius primus terminus sit, vt supra, quadratum $b c$, secundus, circulus $b e d f$.

Hh 3

Ostendendum est, ut tres decimæ sextæ partes tertij termini perspectæ progressionis, auctæ dimidio secundi, sunt ad vndecim nouenas primi, auctas secundi quinq; vnciis, ita esse rectâ bc vel bo , ad bA .

Quoniam ex decima nona tertij libri axe bi , perpendiculo plano per bi ducto, æquidistanter plano lcr , sustentaculo mu , æquiponderans portioni peripherici, quæ super basi $irdb$ & infra ipsam insistit, est cylindraceum altitudinis cl , baseos æquantis quatuor nouenas quadrati cd ; æquiponderans soli portioni quæ insistit super basi $irdb$ erit cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis duas nouenas quadrati bc : ergo ex sexta eiusdem libri, æquiponderans dicylindraceo, cuius sectio sit quadratum habens pro latere ordinatim applicatam ad basim cr , est tres semisses prioris æquiponderantis; ac proinde est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis tres nouenas, vel trientem quadrati cd . Igitur ex corollario quarto octauæ libri eiusdem, duplum huius baseos, nempe bes quadrati cd , est ad positionem rectæ bc quartus gradus, quorum primus est parallelogrammum dimetientis bc , secundus figura cdr . Præterea si in alia serie primus gradus ponatur parallelogrammum dimetientis bc ; secundus verò componatur ex primo & ex figura cdr , ex corollariis postremis decimæ tertix tertij libri liquet tertium gradum huius secundæ seriei esse primum, auctum bis secundo primæ seriei, & semel tertio eiusdem & seriei: quartum verò secundæ seriei esse primum, auctum ter secundo primæ, ter tertio primæ, & semel quarto eiusdem primæ.

Rursus primæ seriei primus terminus, est rectangulum $ibcr$, siue dimidium circuli $bddf$; secundus $irdb$ est æqualis quadrato cd ratione portionis rdc , ex duodecima primi; & dimidio circuli bcd , ratione parallelogrammi $ibcr$; tertius est æqualis quadranti circuli $bddf$, nempe duplo æquiponderantis reperti in decima sexta primi; quartus denique est bes quadrati bc . Igitur in secunda serie quartus gradus est vndecim trientes primi termini progressionis perspectæ, quam in superiore assumpsimus, & simul quinque quadrantes secundi termini. Ergo axe it , sustentaculo um , perpendiculo plano per ci ducto æquidistanter plano lcr , æquiponderans dicylindraceo genito ex figura $irdb$ ad positionem plani ldc genito, est per corollarium quartum octauæ tertij libri, æquale cylindraceo altitudinis bc , baseos æquantis dimidium istius quarti gradus, nempe baseos æquantis vndecim sextantes primi termini, auctos quinque octauis secundi progressionis perspectæ. Ergo per sextam eiusdem tertij, cylindraceum altitudinis bc , vel cl , baseos æquantis bessem baseos postremò consignatæ, est æquale spatio quod iisdem manentibus æquiponderat peripherici parti super basi $irdb$ insistenti; eiusmodi autem bes est vndecim nouenæ primi termini, auctæ quinque vnciis secundi perspectæ progressionis.

Præterea per methodum traditam habemus tertium gradum in secunda serie esse primum primæ seriei auctum bis secundo & semel tertio eiusdem seriei: ergo tertius in secunda serie gradus est tres quadrantes secundi termini, aucti duplo primi: igitur figuræ $i r d b$ iisdem positæ æquiponderat dimidium eiusdem spatij; ergo ex methodo decimæ nonæ primi libri, portio peripherici insistent super basi $i r d b$ est æqualis cylindræo altitudinis $c y$, baseos æquantis duplum æquiponderantis vltimò collecti. Igitur dicylindræum istud est æquale cylindræo altitudinis $c y$, baseos æquantis tres quadrantes secundi termini auctos duplo primi; & cum ex demonstratis initio vigesimæ quintæ libri tertij recta $l c$ ad $c y$ sit vt secundus terminus perspectæ ad primi quadrantem, per reciprocatonem legem est æquale cylindræo altitudinis $c l$, baseos æquantis tres decimas sextas tertij termini, auctas dimidio secundi. Suspensum igitur ad æquiponderans est, vt basis cylindræi istius ad basim cylindræi illius, quod ostendimus esse eiusdem altitudinis $c l$, & æquale spatio æquiponderanti.

Quoniam igitur vt suspensum ad suum æquiponderans, ita ex lege libræ est brachium $o b$ ad $b A$; patet $o b$ ad $b A$ esse vt sunt tres decimæ sextæ partes tertij termini auctæ dimidio secundi, ad quinque vncias secundi auctas vndecim nouenis primi: sed quod accidit in suspensio assumpto, nempe in quadrante totius suspensio propositi, contingit quoque in quatuor quadrantibus siue in toto, vt patet: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Compleatur iisdem manentibus pro circulo (*Fig. 70.*) parallelogrammum $e f H D$, & intelligatur circa $D H$ manentem circumnolui figura $D e d f H$, gigniue periphericum, cuius dimidium vt in superiore contemplamur: planum per A ductum æquidistanter plano $l c r$, transeat per grauitatis centrum dimidij illius peripherici.

Ostendendum est rectam $o b$ vel $b c$ ad $b A$ esse, vt decima sexta pars tertij termini progressionis perspectæ suprâ expositæ, aucta quinque semunciis secundi termini, est ad primum, auctum quinque decimis sextis secundi.

Istud ostenditur methodò eadem, qua superior: nam figuræ $D e d b$ libræ planæ axe $b D$, sustentaculo $o u$ æquiponderant quinque vnciæ primi termini, & insuper semiquadrans secundi: ergo cylindræum altitudinis $c y$, baseos duplæ, nempe æquantis quinque sextantes primi, auctos quadrante secundi, æquat dicylindræum genitum ex figura $D e b d$ ad positionem plani $l c d$: ergo peripherici portio quæ insistit super basi $D e d b$ est cylindræum altitudinis $c y$, baseos eiusdem; vel per reciprocatonem le-

ges, altitudinis cl , vel cd , baseos æquantis decimam sextam partem tertij termini, auctam quinque semunciis secundi.

Rursus in prima serie primus terminus est æqualis quadrato $bceD$; ac proinde est æqualis primo progressionis perspectæ termino; secundus est edc , nempe quadrans secundi termini progressionis eiusdem; tertius ex secunda quarti tetragonismicorum est bes primi; quartus ex corollario vigesimæ octauæ quarti libri præsentis Operis est tres vigesimæ quartæ partes secundi; igitur quartus gradus in secunda serie mixta, erit ter primus, auctus quindecim decimis sextis secundi. Quoniam igitur quarti dimidium est tres semisses termini primi progressionis perspectæ, aucti quindecim trigesimis secundis secundi: huius verò dimidij bes est primus auctus quinque decimis sextis secundi, patet id in quadrante suspensi propositi verum esse quod probandum suscepimus: ergo id pariter verum est in toto, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Iisdem manentibus pro cycloide parua (*Fig. 70.*) circa axem it manentem intelligatur circumuolui figura $irbst$, & gigni periphericum, cuius dimidium ad partes diacens contemplamur in præsens; esto A grauitatis centrum eiusdem.

Ostendendum est rectam ob vel bc esse ad bA , vt tres decimæ sextæ partes tertij termini progressionis eiusdem perspectæ, deducto dimidio secundi, sunt ad quinque secundi vncias, subductis vndecim nouenis primi.

Istud ostenditur eodem pacto quo decima nona superior, posita semel doctrina quam in corollariis decimæ tertix tertij libri tradidimus; quia enim in secunda serie primus gradus ponitur parallelogrammum $ibcr$, secundus verò figura irb , hoc est \dagger primus terminus primæ seriei — secundus eiusdem seriei; tertius in secunda serie erit \dagger primus primæ seriei — bis secundus eiusdem primæ \dagger tertius semel: quartus verò \dagger primus — ter secundus \dagger ter tertius — semel quartus eiusdem primæ seriei. Igitur cum in decima nona superiore ostenderimus hos gradus primæ seriei, methodumq; eos transferendi in calculum præsentem, si quis illi insistens supputet casum propositum, inueniet suspensum esse cylindraceum altitudinis cl , vel bc , baseos æquantis tres decimas sextas partes tertij termini progressionis suprâ constitutæ, deducto dimidio secundi: æquiponderans autem esse cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis quinque vncias secundi, subductis vndecim nouenis primi: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Iisdem manentibus pro circulo (*Fig. 70.*) circa axem DH manentem intelligatur circumuolui figura $DebfH$, & gigni periphericum,

phericum, cuius dimidium ad partes d iacens contemplamur in præsens: esto A grauitatis centrum eiusdem.

Ostendendum est rectam ob vel bc esse ad b A, vt quinque semunciae secundi termini, imminutæ parte decima sexta tertij termini progressionis perspectæ sunt ad primum imminutum quinque decimis sextis secundi.

Præsens propositio eodem prorsus pacto ostenditur, positâ semel vigesima, quo superior est demonstrata ex decima nona; itaque ne longum sit referre superuacanea; missa ea facimus, & vsitata clausula inferimus id esse demonstratum, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Iisdem manentibus pro cycloide parua (Fig. 70.) intelligatur duci planum per ti æquidistanter plano lcr, & per illud diuidi corona cycloidica in duas partes, quarum quæ ad partes d spectat, habeat centrum grauitatis in puncto A; eiusmodi enim centrum patet esse in recta bd.

Ostendendum est rectam bo vel bc ad b A esse, vt terminus secundus progressionis eiusdem perspectæ est ad viginti duas nouenas primi.

Quoniam ex methodo decimæ octauæ hæc corona est periphericum maius subducto minore, coronæ dimidio illi æquiponderans erit ipsum maioris æquiponderans deducto æquiponderante minoris. Rursus quoniam in propositionibus proximè antecedentibus, secundus terminus proportionalis est basis æquiponderantis parti quartæ totius suspensi peripherici, ille terminus quater sumptus dabit basim cylindracei altitudinis cl præditi, & æquantis spatium æquiponderans toti suspensio peripherico. Cum igitur pro cycloide propositio decima nona det vndecim nouenas primi termini auctas quinque vncias secundi, & propositio vigesima prima det illas easdem quinque vncias secundi imminutas illis iisdem vndecim nouenis primi; & cum ex decimæ nonæ basi debeat auferri vigesima primæ basis, residua fiet basis æquans viginti duas nouenas primi termini, cuius quadruplum erit basis quæsitâ nempe octoginta octo nouenæ primi termini. Cum igitur, per decimam octauam, coronæ dimidium quod contemplamur sit æquale cylindraceo altitudinis cl vel cd, baseos æquantis quater secundum terminum, vel viginti quatuor sextantes termini secundi; & cum suspensum ad æquiponderans sit vt basis ista, ad basim illam; vt autem suspensum ad æquiponderans, ita sit brachium bo ad b A, patet rectam bo vel bc ad b A esse vt quadruplum secundi termini ad octoginta octo nouenas primi: vel vt est terminus secundus ad viginti duas nouenas primi; quod erat demonstrandum.

DE CYCLOIDE

COROLLARIUM.

Notandum est in quocunque cuiuslibet figuræ casu partes desumptas ex propositionibus 19. & 21. quæ additiâ notâ præditæ sunt per subtractionem se se consumere; nec residuum fieri nisi duplum alterius partis addititium.

PROPOSITIO XXIV.

Iisdem manentibus (*Fig. 70.*) pro circulo intelligatur planum per ti-
duci ut suprâ, & diuidere coronam ex circulo genitam in duas par-
tes, quarum quæ ad d spectat, consideretur in hac propositione:
punctum A sit gravitatis centrum partis eiusmodi.

Ostendendum est rectam ob vel bc ad b A esse ut est tertius ter-
minus perspectæ progressionis ad quatuor terminos primos.

Methodus superioris propositionis inseruit demonstrationi præsentis.
Si igitur ex basi reperta in vigesimâ pro æquiponderante maioris peri-
pherici auferatur basis vigesimæ secundæ pro æquiponderante peripheri-
ci minoris, relinquitur duplum primi termini progressionis perspectæ;
quadruplum huius residui sunt quatuor termini primi. Sed ex corollario
decimæ octauæ tota corona habet pro basi duos tertios terminos; ergo
dimidio coronæ tribui debet vnus tertius terminus: ut igitur vnus tertius
terminus ad quatuor terminos primos, ita est recta bc ad b A, quod erat
demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

Iisdem manentibus (*Fig. 70.*) superficies coronæ genitæ ex supe-
riore parte cycloideos magnæ est æqualis spatio quod ad sexde-
cim circulos genitores sit ut diameter quadrati ad latus eiusdem.

Recta rs ponatur basis superioris partis cycloideos magnæ rds, & in
ea sumptum sit quoduis punctum V, per quod ducta sit PT complens pa-
rallelogrammum PbdT, occurrens limbis br, dr in R, S. Patet ordi-
natim applicatas VR, VS esse æquales; æquales igitur sunt PR, ST, ac
proinde duæ simul PR, PS æquant totam PT, vel bd. Cum igitur PS
sit semidiameter sectionis peripherici maioris factæ per planum paralle-
lum plano lcd incedens per rectam PT; PR verò sit semidiameter se-
ctionis factæ in peripherico minore, patet duorum istorum circularum
peripherias simul esse æquales peripheriæ circuli semidiametro PT de-
scripti. Ergo superficies coronæ non tantum cycloidicæ, sed cuiuslibet al-
terius nominis, est ad parallelogrammum mixtum altitudinis bd insi-
stens super curuâ rds, ut peripheria circuli ad semidiametrum.

Quoniam igitur curua rSd in superiore parte cycloideos magnæ est
per trigessimam sextam superioris libri, æqualis rectæ, quæ media sit in-
ter cd & octuplam ipsius cd; tota linea rds erit media inter cd & re-
ctam quæ ad ipsam cd sit longitudine ut 32. ad 1. vel quæ ad quadruplam

recta cd sit, vt diameter quadrati ad eiusdem latus. Rectangulum igitur sub bd & sub curua rd s, (hoc est parallelogrammum mixtum) est æquale rectangulo sub cd & sub recta quæ ad octuplam recta cd sit, vt diameter quadrati ad latus eiusdem.

Quoniam igitur hoc spatium est ad superficiem periphericam vt semidiameter circuli ad peripheriam eiusdem, vel vt primus terminus adiunctæ ad bis secundum, patet periphericam superficiem huius coronæ esse æqualem spatio quod ad sexdecim circulos genitores sit vt diameter quadrati ad latus eiusdem, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Cum in antecedentibus supputauerim coronam genitam ex parua cycloideos parte superiore, hinc magnam partem superiorem computare coactus fui, nempe quia parallelogrammum mixtum in parua cognitum non habeo, sicuti in magna; neque qui me id doceat adhuc inueni ullum.

PROPOSITIO XXVI.

Iisdem vt in proximè superiore, pro circulo manentibus (*Fig. 70.*) superficies coronæ circularis est æqualis quadruplo termini tertij progressionis perspectæ.

Per superioris methodum, inueniri debet parallelogrammum mixtum, cuius basis sit ed altitudo bd ; illud verò ex tertia primi libri est bis circulus $edfb$, siue bis terminus secundus progressionis perspectæ. Secundo ex eadem methodo vt est primus terminus adiunctæ progressionis ad bis secundum, ita est parallelogrammum mixtum ad superficiem quæ sitam; ergo cum parallelogrammum mixtum æquet duos terminos progressionis perspectæ, & perspectæ ratio sit eadem cum ratione adiunctæ, patet superficiem illam coronalem æquare quatuor terminos tertios progressionis perspectæ, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam in priore propositione ostendimus si superficies coronalis secetur quocunque plano ad planum lcd parallelo, sectionem esse æqualem peripheriæ circuli semidiametro bd descripti; liquet eiusmodi superficiæ centrum grauitatis ad positionem plani lcd iacere in plano ducto per centrum grauitatis parallelogrammi mixti. Est enim hæc superficies, quod ad istud pertinet, simillima superficiæ parallelogrammi mixti intercepti inter eadem plana ad positionem eandem intercipientia portionem superficiæ illius, cuius centrum grauitatis quæritur.

PROPOSITIO XXVII.

Reuocetur (*Fig. 65.*) schema propositionis quinquagesimæ septimæ libri prioris, & in eo punctum g bifariam secet rectam ab , ita vt g congruat centro e , & figura dag sit semicycloideos magnæ pars superior. Intelligatur circa axem cb manentem circumuo-

hui figura $t d a b$, & superficiei quam describit curua da consideretur ea portio quam ad partes a relinquit planum $T b c$: Ponatur autem similis & æqualis superficies ad rectæ $a b$ partes z , vt eius centrum grauitatis iaceat in recta $a b$.

Ostendendum est, si ex $b a$ abscindatur $b E$, quæ contineat octoginta sex centesimas partes rectæ ad quam radius $b a$ sit sicut quadrās peripheriæ circularis ad suum radium, punctum E esse grauitatis centrum superficiei illius compositæ.

Libræ planæ axe $g h$, sustentaculo $b z$, patet ex methodo quinquagesimæ septimæ suprâ laudatæ æquiponderans figuræ parabolicæ $a g h$ esse duas quintas partes ipsius, quæ cum sit bes rectanguli $a g h$, eiusmodi æquiponderans erit quatuor decimæ quintæ partes rectanguli $a g h$. Ergo si $b u$ secetur bifariam in μ , per recessum axe $t b$, sustentaculo μG , parallelo ad axem $b t$, æquiponderans eidem figuræ parabolicæ erit quatuor decimæ quintæ partes rectanguli $a g h$, auctæ suspensi siue rectanguli eiusdem besse, hoc est, erit quatuordecim decimæ quintæ rectanguli $a g h$. Rursus rectangulo $b g h r$, iisdem positis, æquiponderat dimidium ipsius, cum $b \mu$, $b g$ rectæ ponantur æquales: ergo toti figuræ $b a h r$ axe br , sustentaculo $u l$ æquiponderat dimidium illius æquiponderantis ex octaua secundi tetragonismicorum: primo igitur gradu posito parallelogrammo $t H u b$ ad positionem rectæ $u b$; secundo, figurâ $b a h r$; tertius æqualis erit duplo æquiponderantis aptati sustentaculo $u l$; ac proinde erit ipsum æquiponderans aptatum sustentaculo μG , videlicet octoginta sex sexagesimæ rectanguli $a e h$. Præterea quoniam figura $a b r h$, ratione partis $a g h$ continet bessem rectanguli $a g h$, vel $g b r h$; addita altera parte $g b r h$, tota figura $a b r h$ continet quinque trientes rectanguli $a g h$, vel centum sexagesimas partes illius rectanguli.

Quoniam igitur ex methodo illius quinquagesimæ septimæ, figura $a b r h$ est certo quodam modo ibi præscripto æqualis portioni cuneatæ superficiei insistenti super arcu da ; & æquiponderans illi ita insistenti est idem cum tertio gradu suprâ relato; insistens figura ad æquiponderans axe $b t$, sustentaculo $u l$ erit vt centum sexagesimæ partes rectanguli $a g h$, ad octoginta sex easdem partes; erit ergo vt 100. ad 86. Per methodum igitur eiusdem propositionis si recta $b E$ contineat octoginta sex centesimas partes rectæ, quæ ad $b a$ sit vt radius ad quadrantem peripheriæ circularis eodem radio descriptæ, erit E grauitatis centrum peripheriæ propositæ, prout erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam adiunctæ progressionis secundus terminus est, ex definitionibus traditis initio tertij libri, dimidium totius peripheriæ circularis, quadrans totius peripheriæ erit dimidium secundi termini adiunctæ, & primus erit radius $b a$: ergo cum vt secundus adiunctæ ad primum, ita

fit primus ad secundum subadiunctæ, patet rectam ad quam radius $b a$ fit vt dimidium secundi adiunctæ ad primum, esse duplam secundi termini subadiunctæ, posito primo $b a$; ergo $b E$ est 172. centesimæ partes secundi termini subadiunctæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) recta $t d$ producta occurrat tangenti $a o$ in λ ; circa axem $a o$ manentem figura $a d \lambda$ comprehensa arcu $d a$, & rectis $a \lambda$, $d \lambda$, intelligatur volui, & describere superficiem cuius dimidium hîc spectamus, illud scilicet quod planum per $a \lambda$ ductum æquidistans plano $T b c$, relinquit ad partes b . Intelligatur altera superficies similis, æqualis & similiter posita ad axis $b a$ partes z , vt grauitatis centrum superficiei compositæ sit in recta $a b$.

Ostendendum est, si ex recta $a b$ resecetur $a \theta$ æqualis sexaginta centesimis partibus secundi termini subadiunctæ, punctum θ esse grauitatis centrum superficiei periphericæ.

Figuram $a h n$ esse æqualem vngulari superficiei quam planum per $a o$ ductum abscindit ex cylindracea superficie quam lineæ $d s$ æquidistans descripsit incedendo per limbum $d a$, patet ex corollario primo decimæ octauæ quinti libri, vbi ostendimus duas cuneatas subcontrarias esse simul æquales parallelogrammo mixto: ergo cum parallelogrammo mixto æquale sit expansum $a b r n$, & cuneatarum vni æqualis sit expansa $a h r b$; alteri cuneatæ æqualis erit expansa $a g h n$. Ex methodo autem quinquagesimæ septimæ libri superioris liquet si ex $b a$ abscindatur $a Q$ ipsi æqualis, & agatur $Q S$ æquidistans rectæ $a n$, bis æquiponderans figuræ $a h n$ vt iacet manenti, axe $a n$, sustentaculo $Q S$, esse æquale spatio quod cuneatæ isti figuræ æquiponderat iisdem positis. Cum igitur $a h n$ sit triens rectanguli $a g h$, vt ex quadratura parabolæ liquet, cuneata superficies erit æqualis trienti rectanguli $a g h$. Rursus quoniam ad positionem rectæ $a b$ si primus gradus ponatur rectangulum $a g h$, & secundus triangulum rectilineum $a h n$, tertius est figura parabolica $a h n$, vt patet ex libri prioris quadragesimæ primæ propositionis methodo; ex quadragesima quarta eiusdem libri quintus gradus erit æqualis quintæ parti rectanguli $a g h$, & dimidium quinti gradûs æquiponderabit tertio, axe $a n$, sustentaculo ducto per dimidium rectæ $a Q$: ergo dimidium huius dimidij æquiponderabit eidem tertio, sustentaculo $Q S$; ergo dimidium quinti gradûs, siue decima pars rectanguli $a g h$ æquiponderat cuneatæ figuræ. Igitur suspensa figura ad æquiponderans spatium est vt triens ad decimam partem, vel vt 100. ad 30. & si vt 100. ad 30. ita dupla secundi termini subadiunctæ de quo agit corollarium superioris, fit ad $a \theta$; erit, per similem methodum superioris, θ centrum grauitatis superficiei propositæ. Igitur cum vt 50. ad 30. vel vt 100. ad 60. ita ex constructione sit se-

secundus terminus subadiunctæ ad rectam a θ ; patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam figura b a h r est æqualis quinque trientibus rectanguli a g h, & ceratoides parabolica a h n est æqualis vni trienti; apertum est superficies superioris & præsentis propositionis esse vt quinarium & vnitatem; sunt enim æquales illis figuris, singulæ singulis.

PROPOSITIO XXIX.

ESto (Fig. 70.) r d s & r b s pars superior cycloideos magnæ, cuius circulus genitor b e d f; circa manentem it intelligatur motu figuræ r d l b descripta corona, cuius superficies secetur bifariam plano per i t ducto æquidistanter plano l c r; eius verò superficiei partem quæ ad d spectat, hoc loco contemplamur.

Ostendendum est si secundus terminus subadiunctæ progressionis, de quo egimus in superioris corollario, diuidatur in quindecim partes; ex recta autem b d refecetur b M continens vigintitres eiusdemmet modi, punctum M esse grauitatis centrum superficiei coronariæ, quam hîc spectamus.

Hanc superficiem coronalem, quam modo tractamus, componi ex duabus duarum priorum propositionum manifestum est. Sit ergo N grauitatis centrum repertum in vigesima septima pro maiore parte huius coronalis; sit A centrum in vigesima septima inuentum pro minore; ergo si M sit centrum totius, vt maior ad minorem, ita debet esse A M recta ad M N, ex lege reciproca libræ; Ergo per corollarium superioris recta A M ad M N est, vt quinarium ad vnitatem; ac proinde recta A N ad M N est vt senarius ad vnitatem.

Rursus quoniam ex vigesimæ septimæ corollario recta b N ad secundum subadiunctæ terminum, cuius primus sit b d, est longitudine sicut 172. ad 100. secundus verò iste terminus est, per superiorem, ad b A sicut 100. ad 60.: ergo ex æquo, vt 172. ad 60. ita longitudine est b N ad b A: ergo si secundus terminus diuidatur in centrum partes æquales, eiusmodi 172. conficiunt rectam b N; rectam b A 60. rectam A M 112. Si igitur secundus terminus tribuatur in 600. partes æquales; b N erit partium talium 1032. & M N partium 112. ergo b M erit partium 920. qualium secundus terminus est 600. Secundus igitur subadiunctæ terminus ad b M est longitudine vt 920. ad 600. vel contractius, vt 23. ad 15. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex corollario vigesimæ sextæ liquet planum ductum per centrum grauitatis cylindræ mixtæ, vel, quod idem est, curuæ r d s parallelum plano l c r transire per grauitatis centrum superficiei istius coronalis quæ ad

plani l c d partes r iacet; ergo cum per quæsitum secundum quinquagesimæ nonæ superioris libri, eiusmodi planum obtineatur, habetur inde calculus centri grauitatis attinentis ad dimidium superficiæ illius, cuius centrum in præsentî propositione indagauimus.

COROLLARIUM II.

Hinc apertè constat methodus calculi pro aliis casibus coronæ cycloïdicæ, siue clausa fuerit, siue aperta; & siue sumatur integra, siue quæ libuerit eius portio ad positionem plani l c d. Calculus enim istorum omnium ita pendet ex demonstratis in superiore libro; vt illa falsa esse necessarium sit, si calculus iste ruinoso nitatur fundamento. Sed vt finis initio cohereat, centrum semisuperficiæ coronalis clausæ ex circulo genitæ, restat computandum.

PROPOSITIO XXX.

Circularis coronæ (*Fig. 70.*) clausæ semisuperficiæ proposita habet centrum M in recta b d ita collocatum, vt si quadratum b c ponatur primus perspectæ progressionis terminus, secundus verò sit circulus b e d f; & consequenter si adiunctæ illi progressionis primus terminus sit radius b c; secundus, dimidium peripheriæ b e d f; recta b M sit tripla secundi termini progressionis subadiunctæ.

Istud demonstratur methodo nonnihil diuersa à superiore, quia calculus rotundiùs exit per hanc quam per illam viam; alterutra enim utrobique iniri potest. Ex corollario vigesimæ sextæ liquet vtramque simul superficiem maiorem & minorem esse æquales parallelogrammo mixto cuius altitudo æquet peripheriam circuli semidiametro b d descripti. Præterea ex communibus libré principiis constat duo simul æquiponderantia duarum istarum superficiærum esse ipsum æquiponderans superficiæ propositæ. Vnde vltra fit vt parallelogrammum mixtum ad duo simul æquiponderantia, ita esse rectam b d vel b p ad b M.

Præterea ex methodo quinquagesimæ septimæ superioris libri habemus, (*Fig. 65*) duplum æquiponderantis figuræ b a h r (ponimus iam a h z b esse semicycloïdem paruam circulo b q a genitam) axe b z, sustentaculo u l; vel æquiponderans eidem axe μ G, esse æquale spatio quod æquiponderat cuneali superficiæ insistenti super arcu q a, & abscissæ à plano obliquo incedente per b c rectam; rectæ autem e q, g h iacent in directum in hypothesi præsentæ. Eo autem ita constituto, æquiponderans figuræ g a h, (quæ est pars superior parvæ semicycloïdeos) est axe b r, sustentaculo μ G, vt ex decima septima & decima octaua primi libri liquet, tres octauæ parces secundi termini progressionis perspectæ, cuius primus sit quadratum b c, auctæ primo. Pari pacto inuenitur æquiponderans figuræ a h g axe a n, sustentaculo bifariam secante rectam A Q, tres octauæ secundi termini primo imminutæ; summa igitur ex duobus istis

æquiponderantibus collecta est dodrans secundi termini progressionis iam dictæ. Suspensum autem, siue parallelogrammum mixtum altitudinis bd insitens super $e d$ curuâ est æquale secundo termino, vt ex tertia primi libri colligitur. Vt igitur (*Fig. 70.*) suspensum siue secundus terminus progressionis perspectæ ad summam illam siue ad dodrantem perspectæ progressionis, ita est $p b$ vel bd , vel bis primus adiunctæ terminus, ad tres semisses primi termini subadiunctæ progressionis. Rursus vt dimidium secundi perspectæ ad primum, ita tres semisses primi subadiunctæ se habent ad triplum secundi subadiunctæ, progressionis. Atqui ex methodo quinquagesimæ septimæ libri superioris, hæc est magnitudo rectæ $b M$; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam ex corollario primo vigesimæ propositionis libri quinti habemus calculum centri grauitatis pro arcu $e d$, patet ex corollario superioris, inde obtineri centrum grauitatis pro dimidio superficiæ coronalis illius, cuius hîc grauitatis centrum inquisiuimus.

COROLLARIUM II.

Potest superioris propositionis calculus tractari methode præsentis in hunc modum. Spatium æquiponderans propositionis vigesimæ septimæ continet (*Fig. 65.*) 86. sexagesimas rectanguli $a g h$; æquiponderans propositionis vigesimæ octauæ complectitur 6. sexagesimas eiusdem modi: summa est 92. sexagesimæ. Suspensum est 120. sexagesimæ: ergo suspensum ad æquiponderans est vt 120. ad 92. ergo ex præsentis methode (*Fig. 70.*) recta $b M$ ad secundum gradum subadiunctæ progressionis, cuius primus est $b c$, se habet longitudine sicut 184. ad 120. vel compendiosius sicut 23. ad 15. quod aptissimè quadrat demonstratis in vigesima nona.

PROPOSITIO XXXI.

Explicatur generatio cycloideon aliarum, & quæ sit in illis specialis difficultas.

Initio primi libri generationem dedimus cycloideos magnæ, quam hætenus semper eo nomine designauimus: Nunc de aliarum, quas *productas* & *contractas* vocant Recentiores, genesi aliquid nobis censemus antè dicendum, quàm præsentî libro finem imponamus. Tunc igitur ibi (*Fig. 1.*) cycloidis magnæ ortum traximus à duabus lationibus, vna circuli $c e f o$ per parallelogrammum $c f a x$, ita vt diameter $f c$ quamdiu fertur, vsque maneat parallela lateri $a x$, quoad ipsi congruat in termino lationis; altera, puncti A per peripheriam $c e f$; ita vt eodem tempore pars arcûs decursa sit ad totum arcum $c e f$, sicut erit pars rectæ $f a$ æquantis peripheriam ad ipsam $f a$. Nunc verò si maneant duæ illæ lationes, illaque proportio partis quam punctum A decurrit in peripheriâ $c e f$, ad partem quam punctum f decurrit in semibasi $f a$; nempe vt pars arcûs diuersa perpetuo

perpetuò sit ad partem semibaseos decursam, sicut arcus ce esse habet ad semibasim fa ; si peripheria cef sit maior semibasi fa , vocatur *cycloides contracta*; si minor, dicitur *producta*. Quando autem est æqualis, dicitur absolutè *cycloides magna*, vel *cycloides magna primaria*. Certum est figuram ex differentiis, cuius dimetientes ad positionem baseos ad sunt zp , be , rs esse ad figuram ex differentiis primariam, ut est recta af ad arcum fec ; idque probari potest, illa ipsa methodo, qua vñ sumus in prima illa primi libri: quapropter si illa proportio detur, problemata tertij & quarti libri solutionem suam consequentur ex methodo illorum librorum. At problemata quinti libri solui omnia non poterunt nisi habeantur parallelogramma mixta, vngulares superficies, quæ sunt eorum quadratrices, ut in corollario quinquagesimæ nonæ monuimus, & insuper istarum vngularium aliæ quadratrices, quas secundas appellauimus. Nemo autem quem sciam dedit istas superficies; vnde liquet methodos illas quæ generales esse iactantur, indigere plurimis aliis admodum abstrusis, ut per illas ad exitum deducantur problemata proposita; quod sæpius dici debet, quia sæpius videmus multos istis amplis titulis subicere longè plurima, quæ penitus illis non subsunt. Cùm ad soluenda problemata quinti libri in cycloidibus secundariis nota esse debeant tria (datâ cùm opus erit circuli quadraturâ) nempe dimensio mixti rectanguli, superficie cuneatæ, & alterius quam secundam quadratricem mixtam appellauimus; ne primum quidem eorum licet reliquis facilius videatur, adhuc cognitum extat. Dettonuillæus in epistolâ ad D. Hugguens de Zulichem contendit arcum dcz a esse æqualem dimidio perimetri ellipseos, cuius maior & minor axes inueniantur hac methodo. *Vt circumferentia circuli generatoris ad compositam ex ipsa circumferentia & ex basi cycloideos, ita est diameter circuli eiusdem ad maiorem semiaxem ellipseos quæsitum. Vt autem eadem composita se habet ad differentiam duarum partium ipsam componentium, ita est semiaxis maior ad semiaxem minorem quæsitum.* Istud, ut concedatur esse verum, non tamen adhuc satis est ad inueniendum rectangulum mixtum: cùm nesciatur ratio quam illa ellipseos perimeter habet ad peripheriam circuli, vel ad rectam, quod tamen opus est ad conuersionem illius rectanguli mixti in rectilineum, vel in circulum. Ut, inquam, verum esse concedatur; noui enim huius artis peritissimos, qui contendunt demonstrationem adductam à Dettonuillæo vim non inferre, nec cogere ad assensum. En ut modus iste demonstrandi ab antiquo discrepans non semper extorqueat consensum; superfluum igitur non fuisset si veterum ineluctabili methodo istud demonstrasset; poterat enim id ita facere; *facile mihi* (inquit pag. 7.) *foret præsentem methodum ad antiquam reducere, & asserre demonstrationem illi similem, quam protuli de æqualitate linearum spiralis & parabolicæ. Sed illam quamvis iam exarata apud me sit, quia paulo longior foret & superuacanea, prætermitto, contentus in spirali & parabolica specimen huius conuersionis dedisse.*

Isti porrò acres ac diligentes Iudices, hoc tantum pronuntiant, intellegit

K k

ctum non cōgi adductis à Dettonuillæo rationibus; expectandūque esse vt maiorem quadam insuper machina vim faciat. Id verò non est refellere tanquam falsum, quod ille ad probandum sibi proposuit, sed solum probandi modum rejicere hoc edicto, *nondum id esse demonstratum, quod erat demonstrandum*. Explicuimus igitur generationem aliarum cycloideon, earūque specialem difficultatem, prout nobis propositum fuerat.

COROLLARIUM I.

Hinc patet si virtutes motrices punctorum A & f non sint inter se vt lineæ c e f, f a percurrendæ; siue, si spatia decursa in lineis c e f, f a non sint perpetuò sicut ipsæ lineæ c e f, f a; tramitem puncti A non esse vllius generis cycloidem; sed aliam quamdam lineam. Itaque cycloides est trames puncti A, quoties in hypothesi facta spatia decursa in lineis c e f, f a sunt perpetuò sicut ipsæ lineæ. Vel breuius, quoties vti spatia c e f, f a ita sunt virtutes motrices. Intelligimus autem virtutes motrices non impeditas ab effectūs sui plena consecutione.

COROLLARIUM II.

Quamuis ponamus puncta A & f moueri per lineas c e f, f a æquabiliter; hoc est, punctum A in percurrendis æqualibus partibus peripheriæ c e f, impendere æquales temporis partes: punctum item f in decurrendis partibus rectæ c f æqualibus consumere partes temporis æquales. Non propterea existimandum est idem euenire in percurrendis partibus curuæ c z a æqualibus. Si enim sumantur quocunque æquales a r, r b, b z, tempus quo percurritur a r est maius tempore partis r b; & istius, tempore partis b z.

PROPOSITIO XXXII.

Proponitur difficultas quædam physica, quæ ex generatione illarum cycloideon oritur.

Posuimus in propositione superiore (*Fig. I.*) cycloidem generari ex duplici latione, quarum vna deferatur circulus c e f o intra parallelas c x, f a, ita vt diameter c f æquidistet semper lateri a x; altera deferatur punctum A per peripheriam c e f. Intelligatur secunda superficies plana congruere primæ superficiæ a f c, & in illa iacere punctum A, atque ex centro g, describi circulus secundus semidiametro g A; ergo huius circuli secundi peripheria congruet peripheriæ c e f o. Intelligatur punctum A fixum in illa peripheriâ secundâ, ita vt dum ipsum mouetur latione suâ per peripheriam c e f primi circuli, peripheria cui affixum est vertatur circa centrum g radio g A circumducta. Hoc posito istud accidit vt circuli secundi diameter alia ex alia succedat in locum diametri c f, attinentis ed circulum primum; ac proinde vt peripheriæ secundæ aliud & aliud punctum congruat puncto f per rectam f a delato. Hinc igitur fit vt peripheria secundi circuli æqualis peripheriæ c e f applicetur tota rectæ f a, ita vt quodlibet eiusmodi peripheriæ punctum reperiat in recta f a pun-

Stum cui durante motu congruat diuersum à punctis quibus congruunt reliqua peripheriæ puncta. Non enim in idem lineæ $f a$ punctum conueniunt duo peripheriæ puncta, nec idem peripheriæ punctum vindicat sibi duo puncta in linea $f a$: cum vt istud fieret, deberet cessare motus puncti A , & vt illud accideret, cohibendus esset motus puncti f per rectam $f a$: neutrum autem fit, salua hypothefi, & generatione ista cycloideos.

Difficultas verò physica statim occurrit; nam circuli secundi peripheria vnica & eadem applicatur rectæ $f a$, & successiuè congruit illi: atqui recta $f a$ est nunc æqualis peripheriæ $f e c$, nunc maior, nunc minor, prout in superiore ostendimus: ergo eadem recta coextenditur modo longiori, modo breuiori rectæ: ergo est æqualis modo maiori, modo minori rectæ; quod repugnat, cum vtrobique maneat eadem, eiusedmque longitudinis. Coextensio enim illa videtur commensurationem & æqualitatem inferre; sicuti si filum puncto c figas, & illud rotæ $c e f o$ curuaturæ eo vsque applices successiuè dum redeas ad punctum c ; omnes intelligunt longitudinem fili esse æqualem peripheriæ $c e f o$. At, inquires, filum applicatur quidem successiuè, sed quod applicatum semel fuit, manet interea applicatum & coherens curuaturæ, dum alię fili partes admouentur consequentibus peripheriæ partibus. Verùm istud nondum satisfacit; quid enim ad æqualitatem probandam facit quod quæ successiuè admotæ fuerunt, maneant applicatæ? certè nihil, si rem præcisè expendamus. Fac enim eo modo quo filum applicatur, erigi & extendi in rectam versus c , & non manere arcuatum; perinde erit curuatura illi æqualis ex vi præcisè illius applicationis. Quid igitur, inquires, confert alligatio fili in puncto c ? respondeo id vnicum, vt virtus fili motrix & (vt ita dixerim) applicatiua, eo pacto attemperetur, quo debet, vt peripheriæ non admoueat nisi æqualis longitudo fili. Potest enim talis esse virtus qua longius peripheriâ filum applicetur; potest & talis, qua breuius. Totum igitur id referri debet in virtutis motricis diuersitatem quandam. Sicuti si virtus motrix puncti f ad a eodem tempore deferat illud per lineam breuiorem arcu illo per quem virtus motrix puncti A defert ipsum A ; maior arcus applicatur minori lineæ rectæ; sin eadem virtus motrix puncti f deferat per longiorem, minor arcus applicatur maiori rectæ lineæ. Vnde liquet explicatione adhuc maiori egere solutionem R.P. Tacquet p.234. *Cylindricorum & annularium*. Respondeo, inquit, *quāuis tota successiuè circumferentia, totam successiuè in plano lineam se maiorem, minoremve tetigeris; non tamen ei commensurata seu coextensa fuit; quod ad commensurationem successiuam totius cum toto requiratur, vt partes partibus successiuè applicentur & congruant. Hic autem nulla circumferentia pars vlli parti lineæ, in plano peragrata applicata fuit; sed continuus fuit contactus indivisibilis, siue non quantus*. Ex hæcenus enim dictis liquet ex continuo illo contactu rectè inferri æqualitatē, & ex modo quo contactus ille perficitur; quando nimirum virtutes illæ motrices tales sunt vt singulæ æqualibus temporibus puncta f & A deferant per spatia æqualia.

Respondeo itaque illud quod assumitur *quæ sibi coaptantur inter se sunt æqualia*, falsum esse in vniuersum: verum esse tamen in iis quæ sibi coaptata quietè manent, quia causa inæqualitatis prouenit ex varia virtute motrice quæ in quiete deest; hoc autem sensu assumitur ab Euclide initio Elementorum. Quæ verò in motu sibi per tactum coaptantur, ea sunt æqualia quoties vno manente, aliud admouetur per duplicem virtutem quarum quælibet seorsum moueret per æquale spatium. Quando autem audis duplicem virtutem, intellige vel duas re ipsa diuersas, vel vnicam quæ duabus æquiualeat, & ita attemperet applicationem, vt pares extensiones paribus aptentur. Proposuius igitur difficultatem physicam ex generatione cycloideon ortam, prout nobis propositum fuit.

COROLLARIUM I.

Ex superioribus liquet non posse affirmari peripheriam *c e f* componi ex certo quodam numero punctorum. Si enim componeretur ex mille verbi causa, intelligi non potest quo pacto posset applicari rectæ compositæ ex bis mille punctis, vel etiam rectæ compositæ ex quingentis tantum; ita vt diuersa peripheriæ puncta sortirentur diuersa rectæ lineæ puncta, & singula singulis congruerent. Cum autem quod infinitum est excedat humani ingenij limites, mirum non esse si ista planè & perspicuè non intelligamus, vbi coacti sumus admittere partes in magnitudine qualibet infinitas.

COROLLARIUM II.

Patet ex iisdem parem difficultatem intelligi in ellipsis, parabola, & hyperbolæ perimetris, & vno verbo, in applicatione successiuâ cuiuscunque curuæ ad rectam. Quapropter qui, vt fugiat laborem soluendi istius nodi, negauerit circulum, cylindrum & sphæram esse possibile; debet etiam negare omnem lineam curuam esse possibilem; solumque rectam affirmare esse possibilem; solum corpus planis circumscriptum, esse possibile; omnia demum quæ nobis apparent sphærica & conuexa, esse terminata planis exiguis & minutulis. Sed hoc dicto incidet, vt reor, in aliquid absurdius; nulliusque assensum obtinebit; esto fortasse dimoueri inde scholastica nequeat disputatione. Porro in rectis etiam lineis ista successiuâ applicatio maioris ad minorem objici potest. Pone enim (*Fig. 66.*) in parallelogrammo quolibet rectangulo *f a b e* diametrum *a e* ductam, & latus *a b* moueri ad latus *f e*, ita vt quamdiu mouetur, parallelum maneat ipsi *f e*. In hac hypothese latus *b a* ita percurrit totam diametrum *a e*, vt singula lateris *b a* puncta inueniant singula quibus aptentur in diametro; nullumque assignari possit in diametro maiore, cui suum non responderit & aptatum fuerit ex latere *a b*. Id verò accidit semper cuiuscunque longitudinis sit *f a*. Igitur coaptationis successiuæ difficultas non tollitur, sublatiis curuis lineis, si rectis pareatur.

LIBER SEXTVS.

261

COROLLARIUM III.

Si quis semel admiserit corpora curua & plana; non poterit, vt patet, euadere difficultatem admittendo quietis morulas in motu. Nam curua cylindri superficies, exempli causa, non potest admoueri plano; nisi aliqua, esto exigua pars illius, successiue & absque mora vlla applicetur superfici planæ.

COROLLARIUM IV.

Nonnulli sunt qui id vnum inter respondendum curant, nempe vt ibi (sive in Veri, sive in Falsi solo perinde id habent) pedem figant, quo instantis aduersarij tela creduntur non esse peruentura. Audiui ego nonnullum, qui elusum iri à se iactitaret difficultatem, negando posse conuenire duas illas virtutes motrices ad efformandam cycloidem longiorem, vel breuiorem. Sed vbi hoc dixit, statim obieci illi, dum cycloides primaria gignitur motu circuli secundi: in eodem eiusdem circuli plano designari posse innumeros circulos inæquales, quorum peripheriæ admouentur ad rectam æquantem spatium fa (Fig. 1.) idque iam olim vidisse Aristotelem in Mechanicis, 24. alias 25. quæstione à nobis laudata §. 5. prolegomenon ad elementa tetragonismica; nec id non vidisse Recentiores, quorum vnus Galilæus mirè se torquet, vt nodum istum physicum iuxta sua physices principia dissoluat. Euidens verò est innumeras generari cycloides vno eodemque tempore quo principalis cz a gignitur, habentes basin æqualem rectæ fa , illam nimirum rectam, quæ tanget vnumquemque concentricum, & æquidistabit rectæ fa . Intelligatur concentricus quilibet diametro yt descriptus; quem t u latus parallelogrammi uaf tangat in t , occurratque rectæ lh in B . Quando centrum g secundi circuli in quo sunt A & t delatum fuerit in m , circulum diametri yt tanget recta bu in B , sicut circulum bzl tangit recta fa in l ; & cum recta gy sit portio radij gA , radiusque gA ponatur migrasse in radium mz ; punctum quoque y circellum concentricum circulo hzl describens, erit in radio mz , & radius gy translatus erit in radium mD ipsi gy æqualem. Eodem igitur tempore puncta A & y decurrerunt arcus hz , ED similes, habentes inter se rationem rectarum mh , mE , vel gA gy ; sed arcus hz est æqualis rectæ fl , ex generatione primariæ cycloideos cz a; ergo arcus DE est perpetuò ad rectam fl , vel tB decursam, vt est recta gA ad gy : ergo per corollarium primum superioris, linea quam describit punctum y est cycloides non primaria; sed, si punctum t cadat extra g & f , contracta; vel producta, si cadat inter g , & f . Æqualibus igitur rectis tu , fa , eodem tempore aptantur successiue peripheriæ circulorum semidiametris gf , gt inæqualibus descriptorum; ac proinde & ipsæ quoque inter se inæquales.

COROLLARIUM V.

Quoniam negari non potest quin idem arcus successiue admoueatur &

KK 3

aptetur lineæ rectæ, prout suprâ explicuimus, modo maiori, modo minori; non debet explodi illa physicorum longè plurimorum sententia, quæ rarefactionem & condensationem explicat dicendo eandem magnitudinem esse aptam ratione diuersæ virtutis à qua mouetur, occupare modo maius, modo minus spatium; quasi aliquid dicant inauditum in aliis quæstionibus physicis. Patet enim ex superioribus simile quid omnibuse esse concedendum.

COROLLARIUM VI.

Aristoteles eo loci quæstionem soluit dicendo attendendum esse quis circularum concentricorum moueatur per se, quis per accidens. Si enim maior moueatur per se, minoris peripheria applicabitur, & successiuè coextendetur maiori rectæ: sin minor feratur per accidens, maioris ipsius rotunditas percurrat minorem lineam. Vnde liquet Philosophum ita explicandum esse, vt per se moueri is dicatur circulus cuius duæ lationes seorsum sumptæ æquali temporis spatio, per æquales lineas ferunt puncta f, & A. Galilæi solutionem referre supersedeo, quia minimè satisfacit, cum ipsa re proposita multò obscurior videatur; nec miror reiectam eam, veluti inanem, fuisse à P. Tacquet pag. 240.

PROPOSITIO XXXIII.

AN sphæra, siue circulus, dum per commune planum materiale liberè voluitur, lineam percurrat suæ circumferentiæ æqualem; & cur, si hoc experientia docet, ita fieri debeat.

Reuerendus Pater Tacquet in propositione octaua dissertationis physico-mathematicæ pag. 247. primam huius propositionis partem esse veram ponit; inquirendam enim proponit tantum huius euentus causam. Vnde statim rem aggreditur his verbis, *Hoc ita euenire qui aliter quam ab experientia probet; & cur ita eueniat, causam qui aperiat, non inuenio.* Planum materiale commune definit definitione 6. esse illud quod non caret omni inæqualitate, ac scabritie, cuiusmodi nostra sunt omnia. Ego verò nonnullos circa ista patior scrupulos. Primò quidem non satis intelligo quid sit circulus aut sphæram liberè volui. An sponte sua & ex virtute ingenitâ? at in plano horizontali quiescit. An in plano decliui, ita vt nihil obstat velocitatis incrementa quæ fiunt, ea prout certis probat fieri experimentis accuratissimus P. Ricciolus lib. 2. Almagesti eruditissimi cap. 16. n. 23. pag. 392. An liberè volui tunc dicetur sphæra cum semel à motoris externi contactu discesserit? Certè ipse in propositione nona contendit (Fig. 1.) euenire posse vt successiuè percurrat lineam maiorem aut minorem, si nempe vnus imprimat motum magnitudini A, circumagendo circulum secundum circa centrum g, alter verò circulum primum cui affixus hæret secundus agat præscripto modo super tangente f a. At numquid poterit imprimi virtus circulo vel solidò quæ æquiualeat duobus illis motoribus, & quæ tantisper vigeat semotis motoribus iisdem? Fateor itaque hære

mihi animum, nec videre satis quo sensu dicatur hîc planum liberè volui.

Præterealicer Autorum qui ita rem euenire statuunt nomina non referat, non est dubium quin hæc opinio in animis hominum iam olim inoleuerit. Ille ex recentioribus, cuius in prolegomenis suprâ laudatis, memini, ita sentiebat; cûm, vt recta æqualis perimetro circuli haberetur, rotæ per planum semel volutæ vestigium assumi vellet. Sed Vitruuius inter Veteres scriptores hoc ipsum apertè velut à maioribus profectum assentitur libri decimi capite duodecimo, alibi decimo quarto; ibi enim edoturus *qua ratione rheda vel naui vestî peractum iter dimetiamur. Transferatur, inquit, nunc cogitatus scripturæ ad rationem non inutilem; sed summa solertia à maioribus traditam; qua in via rheda sedentes, vel mari nauigantes, scire possumus quot milliaria numero itineris fecerimus. Hoc autem erit sic. Rota quæ erunt in rheda sint lata per mediam diametron pedum quaternum & sextantis; vt cûm finitum locum habeat in se rota, ab eoque incipiat progrediens in solo via facere versationem, perueniendo ad eam finitionem, à qua ceperit versari, certum modum spatij habeat peractum pedes duodecim.* In eodem capite docet quadringentenas versationes rotæ efficere spatia passuum mille; quod esse nequit nisi curuatura rotæ sit pedum duodecim & semissis. Vnde vt 22. ad 7. iuxta computationem Archimedeam, ita fient 25. semisses pedis vnus ad diametrum rotæ quaternorum pedum, quadragesimâ quartâ parte pedis vnus demptâ. Manifestum igitur est mendosum esse textum: corrigique debere iuxta numeros iam positos.

Porro naui similem rotam adiungi solitam testatur, sed eius curuaturâ pinnis instructâ, vt ita illarum incurfu in vndas extimas, versatio fieret. Vtrobique autem patet versationem rotæ euenire ex eo quod allisio rotæ ad solum vel ad aquas curuaturam cohibeat ne motum centro impulsus sequatur, ac proinde illam cohibendæ curuaturæ vim æquualere virtuti rotatrici circa centrum. Cûm itaque hæc vis cohibens possit esse maior & minor, manente eadem virtute vel equorum, vel ventorum trahentium centrum rotæ: non video qua ratione hæc methodus possit esse certa & constans. Fernelius tamen ea se vsus narrat in Cosmotheoria sua ad dimensionem Globi terrestris, & vt refert Furnerius noster lib. 12. Hydrographiæ cap. 35. pag. 609. Claudius Flamingus Machinis Ducis Vvitembergenfis præfectus, non alio utebatur instrumento in dimittendis agris. Fernelij methodum refert P. Ricciolus Almagesti lib. 10. sect. 5. prob. 15. aitq; à loco primæ obseruationis ad locum secundæ, vno gradu dissitum à primo, reuolutiones fuisse 17024. rotæ ambitum fuisse pedum 20. diametrum pedum 6. ac digitorum 6. vnde conficitur gradui vni terrestri competere milliaria 68. Idem verò Ricciolus lib. 2. cap. 7. schol. 4. vocat istud Fernelij experimentum *valde lubricum*, idque libro Geographico se ostensurum prænuntiat. Profectò tam lubricum est, quàm quod maximè, vel ob solam istam incertitudinem vtrum resistentia orta ex collisione rotæ

cum solo, æquiualeat virtuti qua centrum rotæ trahitur ab equis; potest enim ita contingere, potest & aliter, vt supra aduertimus. Itaque de constanti huius experimenti veritate non possum non vsque dubitare, dum certius aliquid de eo mihi constet.

Sed faciamus ita rem se habere, vt possimus ad examen reuocare causam à R. P. Tacquet assignatam, ait enim ex illo principio *natura, cum nihil agit frustra, quemadmodum breuissima agit via, ita modo etiam facillimo, fieri vt circulus in plano communi materiali volutus lineam percurrat suæ circumferentiæ æqualē. Cum enim planum sit asperum & scabrum, circulus in minutas inæqualitates incurret, iis verò vt quàm minimè offendatur, oportet vt pari celeritate se circa centrum suum circumagat versus punctum à quo incepit motus volutationis; illa enim subductione pari, quàm minima euadet offensio. Hic ego duo præsertim subdubito. Primò cum tota causa huius euentus dicantur esse minutulæ inæqualitates, & quasi monticuli interpositi, vbi cessabunt isti monticuli, ibi quoque cessabit causa effectus eiusmodi: ergo quis dicat quota sit illa pars itineris quæ subductis offendiculis est plana? quis asserat hanc asperitatem esse vbique & constantissimè æqualem? numquid etiam ipsa rota habet suas inæqualitates; quis autem dicat illas esse constanter & vbique easdem & simillimas? nam si tam in plani, quàm in circuli materialis communis superficie, nulla seruetur lex harum inæqualitatum, sed sint veluti insulæ in mari sparsæ, modo, denso agmine, sporadum in morem, modo raræ; modo altiores, modo depressiores; quis aliquid constans inde inferat, quantum ad modum offensionis mutux attinet? quid verò si manente eadem viæ difficultate, assumatur multò grauior aut multo leuior rota, lex eadem an inuariata perstabit? Præterea idem quærendum restat de superficie istarum quasi insularum aut verrucarum, vtrum sit læuis & sine asperitatibus: an potius & ipsa suas habeat valliculas, monticulósque. Neque dixeris istas quæstiones esse superfluas, cum asperitates & tubercula ista non cadant sub oculos, aut tactum. Nam cum exiguitas istarum rerum non obstat quo minus tu illi istum effectum sensilem de quo instituta est controuersia, attribuas; ita neque impedire debet, quin ego vtiliter de illis quæram ea quæ vel faciunt contrarios effectus sensiles, vel tui effectus constantiam tollunt. Itaque de ista secunda propositionis parte idem affirmo, nempe non satis explicatam mihi videri rationem illam ex asperitatibus petitam, vt repugnantem intellectum vineat. ergo &c. quod erat propositum.*

PROPOSITIO XXXIV.

DVm verus & perfectus globus vel circulus, grauis tamen, solum perfectè planum contingendo premit, si compressio illa in tactu ponatur æquiualeere cuidam nexui, quo fiat vt absque vi aliqua speciali raptari circulus nequeat super illo plano; reddi potest ratio
cur super

cur super perfectè plano, circulus perfectè rotundus volutari debeat, dum per centrum secundum rectam plano parallelam trahitur.

Ponamus rectam fa (*Fig. 1.*) esse perfectè rectam, & perfectè curuam esse peripheriam $cefo$, attamen grauem, & premere punctum f . Dico compressionē illam esse causam vt dum g trahitur vi equorum, ad partes b per rectam bg , peripheriæ punctum f , vergat ad partes o , & succedat punctum s . Dum enim centrum g virtute equorum trahitur, peripheriæ punctum f quasi agglutinatum lineæ rectæ af puncto f , non tam facile trahi se finit quam punctum g : inclinaretur ergo semidiameter gf , vt si g arbor foret radicata in f ; quia verò propter figuram circularem non potest simul hære fixa in f & inclinari; cum tamen vis motrix simul & viatrix transferat centrum g ad partes b ; figuræ natura se se virtuti impressæ accommodando suggerit aliud punctum in quo fiat contactus; hoc enim minus violentum ipsi propterea est, quia connexio puncti f peripherici cum puncto f pertinente ad rectam ab , orta à compressionē impositi grauis, magis resistit raptationi circuli versus a , quàm inclinationi eiusdem circuli versus eundem terminum a . Nam si raptaretur, connexioni illius illi vis fieret maior, quàm dum inclinatur, eo quod dum inclinatur punctum f leuatur pondere centri g , quod incumbit iam alteri puncto, illi videlicet in quo fit tactus: ergo diuulsio puncti f in periphæria positi à puncto f in recta af iacente, facilius fit per volutationem circuli prementis, quam per raptionem. At verò in conscensu montis, centrum grauitatis non est in recta à centro g ducta ad punctum tactus in decliui positum; vnde etiam accidit vt non tam sponte voluatur rota. Assignata est igitur ratio physica eius quod propositum fuerat.

COROLLARIUM.

Hinc patet, quoties connexio & cohærentia peripheriæ cum recta af tanta est, quanta est vis trahens per lineam bg ; toties peripheriam cef incumbere successione motus in rectam fa ipsi æqualem: quoties verò fuerit minor vel maior, toties peripheriam admoueri rectæ maiori vel minori. Quapropter si experientia comprobet rotæ ita tractæ peripheriam successu motus componi vt plurimum cum æquali rectâ; dicendum erit vt plurimum inesse hanc virtutum æqualitatem. Sed hæc omnia, vt vides, physica cum sint, disputationi obnoxia sunt.

PROPOSITIO XXXV.

AN in reflexione generetur cycloides aliqua, expenditur; & per occasionē aliquid dicitur de causa æqualitatis angulorum incidentiæ, & reflexionis.

R. P. Maignan in Perspectiua sua horaria pag. 305. explicaturus reflexionem, obliquam lucis è speculo plano, postquam posuit radium esse cuius sectio per axem est parallelogrammum rectangulum, statuit huius rectanguli

LI

latus ita incurrere in planum obliquo ictu, ut illud contingat vna tantum sui extremitate, statimque repulsum resiliat non sine aliquo motu vertiginis. Vnde ait sequi utrumque huius lateris ita reperiuntur extremum describere cycloidis cuiusdam, si non primaria, ut vocant, saltem alterius in alia specie, ut facile possem demonstrare. Vellem ut id demonstrasset; ego enim non ita obuiam experior eiusmodi demonstrationem: ostendendum enim est non solum illam lineam esse curuam, sed esse de genere cycloideon definitarum in corollario primo trigesimæ primæ. Id verò si quis mathematicè mihi demonstraret, curiosè illum audiam. Quod autem idem R.P. ibid. pag. 300. demonstrandam suscipit causam cur radius obliquus reflectatur angulo æquante angulum incidentiæ, indiscussum præterire nolim.

Primò quidem pag. 289. repudiens causam quam Vitello & alij Primarij Optices Magistri tradunt, quod natura agat per breuissimam viam. Clavius, inquit, in eadem breuia & ipse impegit lib. 8. Geometr. pract. propos. 7. Mitto alios qui in hoc excusationem habere posse viderentur, quod post tot & tam celebres autores errauerint; nisi errorem fecissent suum. Referre placet ipsa Clauij verba in scholio illius propositionis; quia, inquit, natura non impedita, agit per lineas breuissimas, sit ut radius solis vel visualis cadens in planum tersum, cadat necessario in punctum ubi angulus quem Perspectiuus angulum incidentiæ dicunt, æqualis efficitur angulo quem reflexionis appellant. Quod Clavius ibi affirmat verissimum esse contendo, nimirum naturam, si non impediatur, agere breuissima via; impeditur autem quoties via breuissima nulla datur, sed quauis datâ potest dari breuior; ut accidit in quodam speculorum concauorum casu: at in casu de quo Clavius agit & datur breuissima via, & illa designatur à solis incidentiæ & reflexionis rectis angulos æquales constituentibus: nulla ergo Clavius impegit in breuia. Sed neque Vitello, ut alibi ostendimus fuisse; licet enim in propositionis 18. lib. 5. affirmet rem visam per speculum quodcumq; sub breuissimis lineis comprehendi à visu, idipsumque inculcet mentione etiam speculi concaui facta sub initium vigesimæ: sensus illius est iste, quoties à puncto viso ad centrum visus possibiles sunt lineæ reflexionis & incidentiæ breuissimæ, res visa in quocunque speculo comprehenditur sub illis lineis. Sed non est sensus, in quocunque speculo, pro quolibet casu, à puncto viso ad rem visam dari viam omnium reflexam breuissimam. Quando verò non datur breuissima, cum non sit potior ratio cur inter breuiiores innumeras eligat hanc potius quàm illam, accipit longissimam ut pote determinatam: fugit enim quod indeterminatum est.

Secundò examinanda nunc est physica causa quam ipse P. Maignan tradit in iis quæ loco mouentur, & appulsu ad aliud corpus repelluntur, vnde & pilam lusoriam assumit in exemplum; sub isto tamen exemplo pag. 292. rationem reflexionis vult reddi ab eo qui radium ita concipere voluerit, quasi sit fluxus & emissio continua globulorum lucis à lucido. Inter illos verò locum sibi ipse statuit pag. 624. Esto itaque (Fig. 2.) circulus c e f o centri g; & ex puncto p per lineam p g emittatur pila in-

cidens in g , & retrocedens per lineam gQ ad punctum s . Experientia constat angulos pge incidentiæ, & sgo reflexionis esse æquales, rectamque ps esse parallelam rectæ bg ; huius verò æqualitatis causa assignatur in hunc modum. Ex puncto g excitetur ad rectam ps perpendicularis gy , quæ bifariam secabit ipsam ps , ut ex Euclidis Elementis liquet. Præterea virtus directa impellens per rectam pg æquualet duabus iuxta Aristotelis demonstrata in Mechanicis cap. 1. quarum una impellat per rectam py , de qua supra, & vocetur *horizontalis*; altera per parallelam rectæ gy , vocetur *perpendicularis*: illa verò erit ad istam ut trianguli gyp , latus py ad yg . Virtus horizontalis non pugnat cum plano reperiiente, cui *ἀδιάφορον* est, quod emissum corpus horizontaliter feratur; at verò virtus perpendicularis illi prorsus repugnat; eo enim illa virtus spectat, ut in corpus quod percutit, penitus ingrediatur, quod fieri naturaliter nequit vel sine diuisione illius, vel sine expulsionem e loco, quorum utrūque vim infert percussio. Itaque in hac quasi pugna, percussum ferienti non reluctabitur nisi quatenus feriens ipsi erit contrarium; cum ergo non sit contrarium nisi per virtutem perpendicularem, eiusmodi virtutem infringet contraria virtute perpendiculari, & quidem æquè vehementi ac intensa: nam ut asserit pag. 297. lemme 3. quantum à pila incidente patitur planum percussum, tantumdem in pilam reagit planum reperiens. Cum igitur pila ex puncto g reiecta versus rectam ps duplicem virtutem habeat horizontalem & perpendicularem pares horizontali & perpendiculari quas habebat quando ex puncto p emissa est in lineam eo ; manifestum est angulos pge , sgo debere esse æquales.

Duo sunt quæ maximè dubiam mihi faciunt istam causam. Primum non video unde probetur vis perpendicularis repellens esse æqualis virtuti pariter perpendiculari, sed impellenti. Planum $bzLq$ esto veluti mensa lusoria inter parallelas zL , bq comprehensa, & ipsis zL , bq insistant plana veluti tabulæ ad repellendos globos compactæ. Intelligatur ex p incipere iactus globi lusorij per rectam pg , & ex g reflecti per rectam gs ita ut anguli pge , sgo sint æquales: ex s rursus ab occurrente tabula zy remitti in oppositam, & sic deinceps in infinitum. Si pari vi globus repellitur ex g , qua ex p emissus primo fuit; pari etiam vi reflectetur ex s , & ita in infinitum globus æqua velocitate perpetuo feretur per angulos hinc & inde æquales; ponimus enim extrinseca quæ hunc effectum impedire possent submoueri. At hoc incredibile mihi videtur; nam experientia suadet minori semper velocitate & virtute fieri istas reflexiones; gratisque dicitur totum id prouenire ab extrinseco aëre, vel à defectu quodam tabulæ, globi &c. Præterea ponamus, quod fieri potest, globum à puncto p ad g ferri à motore per velocitatem decrescentem; ergo ut fiat angulorum pge , sgo æqualitas, tabula bg imprimet globo velocitatem contrario prorsus modo crescentem vsque ad punctum s ; à puncto verò s tabula zy eodem pacto imprimet decrescentem, tabula verò bg rursus imprimet hac

ipsa lege crescentem, & sic alternis ludus continuabitur, qui creditu mihi difficillimus est. Vnde enim potest habere tabula $b g$, vt quò longius distat globus, eò fortius illum impellat? & cur hæc virtus negatur tabulæ $z y$ simillimæ.

Altera dubitandi ratio est illud, *virtutem horizontatem non esse contrariam percusso*. Vel enim eius motus pilæ impressus consideratur fieri extra corpus percutiendum, vel intra ipsum; si extra fieri intelligatur, nec illi etiam contrarius est perpendicularis; sin intelligatur ille motus fieri intra, vterque est contrarius; nam vis infertur percusso, siue scindatur in profundum, siue in latum; imo motus ille ipse qui dicitur horizontalis & parallelus rectæ $e g$, fiet solido percusso perpendicularis, ac proinde etiam per principia sententiæ Maignanianæ contrarius, si missile feratur in faciem solidi eiusdem parallelam rectæ $g y$.

Claudo igitur examen causæ allatæ affirmando mihi videri id & obscurius & incertius esse, eo quod erat demonstrandum; angulos scilicet incidentiæ & reflexionis esse æquales in proiectu pilæ. Vt omittam causam non esse vniuersalem pro quacunque reflexione; cum detur reflexio qualitatum, quæ non sunt substantialiter corpus, vt lucis. Nam lucem non esse corpus in Academiis publicè & constanter docetur cum Aristotele, & probatur longè grauioris momenti rationibus. Vt mirum mihi plane sit Reuerendum P. Maignan indubitanter affirmare illam qualitatem à lucidi ipsius substantia distinctam, esse superfluum & nullatenus probari. Expendimus igitur id, quod fuit propositum.

COROLLARIUM.

Aduertendum est illud Opticæ principium de æqualitate eiusmodi angulorum potissimum fundari in experimentis opera Organorū ad id constructorum ab Alhazeno & Vitellone Optices Principibus; vnde quamuis id demonstrari per causam non posset, non desineret esse principium illius artis. Istud rectè aduertit Vitello libri 5. propositione decima septima his verbis *angulum incidentiæ esse æqualem angulo reflexionis per rationalem sensus experientiam inuento, semper vt vniuersali principio deinceps in omnibus his speculis vtemur. Et licet hoc, vt quidem huius scientiæ principium, sit experimentaliter declaratum; potest tamen per aliquem demonstrationis modum ad ipsius scientiam perueniri: vnde nos ipsum prout diligentius poterimus tentabimus demonstrare*. Optarem vt R. P. Cabæus contra istud principium nihil scripsisset in suis Meteorologicis alioqui perdoctis.

SCHOLIUM.

Propositiones de motu grauium accelerato hic Appendicis loco censui adscribendas, cum vt exoluam fidem semel datam illas edendi; tum vt hæc etiam proprietas globi per decliue labentis, intacta non remaneat. In illo enim lapsu accelerari motum, etiam iuxta illam rationem qua augetur dum liberè per aërem cadit, experimentis accuratè sumptis testatur R. P. Ricciolus supra laudatus in propositione trigesima tertia.

Porro dum globus ita in declivi per volutationes labitur, potest fieri ut describat cycloidem aliquam; quamvis enim velocitas acceleretur, si cum proportione eadem acceleretur rotatio circa centrum, prodibit tamen cycloides, ut ex corollario primo trigesima prima manifestum fit.

POSTVLATA.

I. In magnitudine graui ante casum & discessionem à puncto quietis dari virtutem motricem ingenitam, quam sensu percipimus omnes, dum ipsam sustinemus pendulam: siue illa virtus sit à generante, siue à terra attrahente, siue à natura ipsius magnitudinis, siue aliunde; & siue illa virtus sit qualitas, siue quiduis aliud. II. cadentis motum esse acceleratum, saltem si comparetur ad eam lineam, quam perpendicularum vocamus; experimento enim certissimo constat perpendiculari partes æquales à graui cadente decurri non æqualibus temporis spatiis, sed in vicinioribus termino discessionis infumi plus temporis, quam in remotioribus. III. Lineam esse in infinitum diuisibilem, eo saltem sensu, siue quo stare non possent Euclidis Elementa. IV. motum esse continuum, diuisibilemque, ut spatium per quod fit.

DEFINITIONES.

I. Velocitas est in actu primo ea virtus motrix quæ ad alteram comparata deferre nata est idem mobile pari tempore per spatium longius, & per idem spatium breuiore tempore; in actu autem secundo, est executio illius virtutis. II. accelerationē voco velocitatis gradum superadditum gradui velocitatis natiuæ. III. velocitatem totalem voco illam, quæ ex vtraque conflatur. IV. Mensuram velocitatis, vel accelerationis voco magnitudinem in qua sectiones ad certam positionem inter se parallelæ, sunt ut velocitates, vel accelerationes.

PROPOSITIO XXXVI.

Sint duæ figuræ quæcunque $fghba$, $eildc$ (Fig. 71.) similes & similiter positæ, ita ut si rectæ ab , cd secentur proportionaliter vtrunque in q , f ; & per q , f ducantur ordinatim applicatæ qg , fi æquidistantes rectis fa , ec ; sicut ab ad cd , ita sit qg ad fi .

Ostendendum est si magnitudo A intelligatur deferri per rectas dc , ba , ita ut mensura velocitatum sint figuræ $eildc$, $fghba$, tempus quo deferretur per spatium dc esse æquale tempori quo deferretur per spatium ba .

Quoniam enim ut sunt spatia fd , qb , ita ad positionem rectæ fa sunt velocitates fi , qg , vbicunque sumantur puncta f , q , dummodo rectæ ab , cd secentur proportionaliter; patet tempora quibus decurruntur ds , qb esse æqualia, cum ut spatia decurrenda ita perpetuò sint vires cursus, siue velocitates: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

IDipsum aliter demonstrare (Fig. 71.)

Istud quoque demonstrari potest per parallelogramma deficientia vel excedentia descripta: si enim proportionaliter diuidantur ab , cd in segmenta quocunque, numero utrinque æqualia aq , qr , rb , & cs , st , td ; ut est quadratum ab ad cd , ita erit parallelogrammum $amgq$ ad $cois$, & parallelogrammum $qnhr$ ad parallelogrammum $spit$, & ita de aliis: ergo ut quadratum ab ad cd ita omnia simul parallelogramma priora, ad omnia simul consequentia. Quoniam verò proportio rectæ ab ad ipsam ab componitur ex proportione rectæ ab ad cd , & ex proportione ipsius cd ad ab ; tempus autem parallelogrammorum priorum ad tempus consequentium habet proportionem compositam ex iisdem proportionibus, patet tempus parallelogrammorum priorum esse æquale tempori posteriorum.

Cum igitur tempus parallelogrammorum priorum sit perpetuò idem cum tempore posteriorum, & quò plura utrinque sunt parallelogramma, eò fiat minus tempus parallelogrammorum priorum deficientium, minusque etiam posteriorum, semperque accedant decrecendo propius ad tempus figurarum similium: accederent autem propius crescendo si parallelogramma priora forent excedentia $afyq$, $qgzr$, $rhDb$ & posteriora $ceus$, $sixt$, $tled$. Hoc autem posito patet per reductionem ad impossibile ostendi tempora figurarum æqualium, adhibita videlicet methodo usurpata sæpius ab antiquis Geometris, cuius compendium extat apud Bullialdum libelli de inscriptis figuris in septima propositione si assumantur deficientia; vel in sexta si excedentia: nam deficientium tempus est maius, excedentium minus: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex demonstrandi ratione iam usurpata liquet virtutem figuræ alicuius non ita intelligi debere, ut sicut omnes partes illius sunt simul, ita omnes velocitates repræsentatæ per illius dimetientes parallelas rectis fa , ce existant aliquando simul; id enim & alienissimum à mente nostra, & absurdissimum est. Sensus itaque noster est, successivè esse inter se velocitates, ut dimetientes figuræ: non autem sicuti dimetientes illæ existunt simul, ita existere simul omnes velocitates, quæ per illas repræsentantur. Quæ verò anno superiore de hoc argumento edidimus, ad ista debent reduci sicubi fortè discrepent. Incredibile dictum est quam cautè incedere debeat quisquis tempora, velocitates & spatia inter se geometricè comparat.

PROPOSITIO XXXVIII.

DVæ figuræ (Fig. 72.) $fghra$, $eiltc$ insistant rectis ar , ct & ita sint inter se ut si ar , ct secantur proportionaliter utcumque

in q, f, sitque vt, a q ad q r, ita c s ad f t; vt f a ad c e ita sit ordinatim applicata q g ad ordinatim applicatam f i.

Ostendendum est si vt c t recta ad a r, ita fiat e c recta ad a x, tempus respondens uelocitati figuræ f a r h g ad tempus figuræ c e i l t esse vt rectam x a ad f a.

Super rectâ a r construatür figura a x d r similis figuræ e c t l. Ergo per superiorem tempus figuræ x a r d est æquale tempori figuræ e c t l. Præterea quoniam vt f a ad e c, ita ponitur q g ad f i, & vt e c ad x a, ita f i ad q b, ergo ex æquo vt f a ad x a, ita q g ad q b. Quoniam igitur duæ figuræ x a r d b, f a r h g ad positionem rectæ x a sunt condicta ratione vt rectæ x a ad f a, tempus uelocitatis figuræ x a r d b ad tempus figuræ f a r h g erit vicissim vt recta f a ad a x. Istud enim ex eo patet quod perpetua lege sint in illa ratione quam habet recta x a ad a f, ac proinde vt uelocitates ita reciprocè debent esse tempora. Quod si cui istud non videatur satis demonstratum, poterit aliam sumere demonstrationem ex methodo qua in 37. propositione vsi sumus ad probandam trigessimam sextam more Antiquorum Geometrarum.

Quoniam ergo vt f a recta ad f a, ita per 35. prop. est tempus uelocitatis e c t l ad tempus uelocitatis a x b d r, vt autem f a ad a x, ita per præsentem est tempus uelocitatis a x b d r ad tempus uelocitatis a f g h r: ergo ex æquo vt recta a f ad a x, ita est tempus uelocitatis e c t l, ad tempus uelocitatis a f g h r: & inuertendo tempus figuræ f a r h g ad tempus figuræ c e i l t est vt recta a x ad f a, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam proportio rectæ f a ad a x componitur ex duabus nempe rectæ f a ad c e, & rectæ c t ad a r, vel e c ad a x: si vt f a ad c e, ita fiat a r ad a y proportio rectæ c t ad a y componetur ex iisdem duabus nempe ex ratione rectæ c t ad a r & rectæ f a ad c e: ergo vt a f ad a x, ita c t ad a y: ergo tempus figuræ f a r h g ad tempus figuræ c t l i e est vt recta a y ad c t.

PROPOSITIO XXXIX.

SI iisdem manentibus (Fig. 72.) figuræ f a r h, e c t l sint trapezia; & vt recta f a ad h r, ita sit recta e c ad t l, ostendendum est si a r, c t secantur utcumque proportionaliter in q, f, rectam q g ad f i esse vt rectam a f ad c e, ac proinde habere proprietatem quam superior propositio assumit adesse in figuris f a r h, e c t l.

Rectæ f h, e l productæ occurrant rectis a r, c t in m, n. Quoniam vt f a ad h r, ita est e c ad t l, & vt f a ad h r ita etiam est m a ad m r; atque vt e c ad l t, ita n e ad n t; erit vt m a ad m r ita n e ad n t, & per conuersionem rationis vt m a ad a r, ita n e ad c t; & alternando vt m a ad n e, ita a r ad c t: sed vt a r ad c t, ita est a q ad c s: ergo vt m a ad c n, ita a q ad c s, & alternando vt m a ad a q, ita n e ad c s, & per conuersionem ratio-

nis vt ma ad mq , ita nc ad ns ; sed vt ma ad mq , ita fa ad qg : & vt nc ad ns , ita ec ad fi : ergo vt fa ad gq , ita ce ad fi ; & alternando vt fa ad ce ita qg ad fi , quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XL.

L Ineæ $fg h$, eil sint parabolicæ (*Fig. 73.*) easque tangant rectæ ar , ct in punctis m , n .

Ostendendum est idem quod in superiore.

Ducantur rectæ mf , ne , occurrantque rectis qg , rh , fi , tl in punctis b , x , y , z . Quoniam per superiorem vt fa ad ec , ita est qb ad sy ; erit alternando vt fa ad qb , ita ec ad sy ; sed vt quadratum fa ad qb , vel vt quadratum ma ad mq , ita per duodecimam tertij tetragonismi-
corum est recta fa ad qg , & ita etiam est recta ce ad fi : ergo vt recta fa ad qg ita est recta ce ad fi , & alternando vt recta fa ad ce , ita recta qg ad fi , quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

L Ineæ $fg h$, eil maneant parabolicæ (*Fig. 74.*) sed earum diametri sint ma , nc , & ordinatim applicatæ fa , ce .

Ostendendum est idem quod in superiore & in trigesima octava.

Ducantur vt in superiore rectæ mf , ne , occurrantque rectis qg , rh , fi , tl in b , x , y , z . Quoniam per trigessimam nonam vt fa ad ce , ita est qb ad sy ; erit alternando vt fa ad qb , ita ec ad sy : sed vt recta fa ad qb , vel vt recta ma ad mq , ita ex generatione parabolæ est quadratum fa ad qg , & ita etiam est quadratum ce ad fi : ergo vt quadratum fa ad quadratum qg , ita est quadratum ce ad fi ; & alternando vt quadratum fa ad ce , ita quadratum qg ad fi ; ac proinde vt recta fa ad ce , ita recta qg ad fi ; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLII.

R Eccta bd (*Fig. 75.*) secta sit bifariam in c , & super basibus bc , cd , insistant trapezia $abcn$, $icdm$ æqualia, similia, & similiter posita: iungatur recta am occurrens rectæ ci in l : ponatur magnitudo A ferri per rectam dc , primò quidem ita vt velocitatis mensura sint trapezia æqualia & similia; secundò verò ita vt velocitatis mensura sit trapezium $abdm$.

Ostendendum est tempus trapezij $abdm$ esse duplum temporis trapezij $icdm$ vel $abcn$, & quantum tempus additur tempori trapezij $icdm$ propter ablationem velocitatis triangularis ilm , tantum demi tempori trapezij $abcn$ propter additionem velocitatis triangularis lan subcontrariè posite triangulo mli .

Quoniam

Quoniam trapezia $abdm$, $icdm$ habent latera ab , dm , & ic , dm proportionalia; per trigessimam nonam propositionem habebunt proprietatem assumptam in figuris trigessimæ octauæ. Si igitur ut cd ad bd hoc est ut unitas ad binarium, ita fiat ci ad bo ; ut est recta bo ad ba æqualem rectæ ci , hoc est ut binarius ad unitatem, ita per trigessimam octauam erit tempus trapezij $abdm$ ad tempus trapezij $icdm$, quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam tempus trapezij $abdm$ est duplum temporis trapezij $icdm$, quod est æquale tempori trapezij $abcm$; erit tempus trapezij $abdm$ æquale temporibus simul æqualibus inter se trapeziorum $icdm$, $abcm$: ergo quantum additur propter ablationem velocitatis triangularis ilm , tantumdem demitur propter additionem velocitatis anl : ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIII.

ESto (*Fig. 76.*) quæcunque figura $fami$ comprehensa sub rectis ma , af & sub linea curua, vel recta mi . Intelligatur magnitudo A per lineam fa deferri ea totali velocitate, cuius mensura sit figura $fami$ ad positionem rectæ am , ut sicut ci parallela rectæ am se habet ad gh eidem parallelam, ita sit velocitas integra magnitudinis A positæ in quocunque puncto c , ad velocitatem totalem eiusdem considerata in quolibet alio puncto g . Tempus eiusmodi lationis sit B .

Ostendendum est si intelligatur eadem magnitudo A retro ferri à puncto a ad f , manente eadem totalis velocitatis mensura $fami$, moram huius lationis esse æqualem tempori B .

Istud pro axioma haberi potest, nec apparet vlla diuersitatis moræ causa, cum eadem sit velocitatis mensura, nisi quod retrogrado ordine sumitur in regressu; sed nihil id obstat, ut patet, quo minus verissimum sit in casu præsentis, quod dici solet, eandem reipsa esse *Viam Athenis Thebas, & Thebis Athenas*: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

ESto $fami$ triangulum rectilineum (*Fig. 76.*) cuius latus ab diuisum sit bifariam in c ; rectaque fc in g , & fg in e . Intelligatur magnitudo A ferri à puncto quietis f ad a terminum lationis manente eadem velocitatis integræ mensurâ fa . Tempus quod in latione cg impenditur sit B .

Ostendendum est, tempus quod in latione ca consumitur esse æquale tempori eidem B .

Recta ac diuidatur bifariam in d & compleantur parallelogramma ic
 Mm

do, ma dn ; recta do secet rectam mi in l , & puncta n , i iungatur recta ni . Patet triangulo mnl simile esse triangulum iol & æquale, itemque triangulum fgh , cum latera homologa mn , oi , gf sint æqualia & parallela, itemque latera homologa nl , lo , hg . Patet quoque cum ol , l n sint æquales, quæcunque in triangulo omn agatur parallela basi on , eam bifariam secari occurſu rectæ ml . Idem quoque liquet de triangulo ni o cuius basis on bifariam secatur occurſu rectæ il . Ad positionem igitur rectæ am condita ratione æqualia sunt triangu-
la mlo , mln inter ſe, itemque triangu-
la oli , lni . Id verò habent triangu-
la oli , nlm cum
ad verticem l ſint conſtituta, vt ſubcontrariè iaceant. Ergo ſi per rectam
 oi deferatur magnitudo A factio lationis initio in i , & fiat triangulum iol ,
vel iln menſura velocitatis: eadem verò magnitudo feratur per re-
ctam mn poſito lationis initio in n , & menſurâ velocitatis triangulo ml
n vel mlo , tempus lationis io erit per ſuperiorem æquale toti moræ la-
tionis nm .

Compleatur parallelogrammum $hg ar$ cuius latus hr occurrat rectis
 dl ci in q , s , recta verò io producta occurrat rectæ am in p ; agantur
rectæ pq , os . Patet igitur trapezio $icgh$ eſſe æquale, ſimile & ſimili-
ter poſitum trapezium $padq$, & trapezium $odcs$: patet quoque trape-
zium $ma do$ ad poſitionem rectæ am eſſe duplum condita ratione trape-
zij $padq$, hoc eſt rectæ ma parallelas trapezij illius eſſe duplas paralle-
larum trapezij iſtius: eademque de cauſa parallelas trapezij $ndci$ eſſe
duplas trapezij $odcs$.

Si igitur magnitudo A feratur à puncto d ad punctum a , & menſura
totius velocitatis ſit trapezium $dqpa$; magnitudo verò C eidem A pror-
ſus æqualis feratur per eandem $d a$, ſed menſura velocitatis ponatur tra-
pezium $doma$; tempus quod impendit C in decurrendâ ad erit dimi-
dium temporis quod inſumet A in eadem rectâ ad percurrendâ; nam ve-
locitates ad poſitionem rectæ am ſumptæ in trapezio maiore ſunt ſingu-
læ duplæ velocitatum ſumptarum in trapezio minore: ergo vt veloci-
tates ita reciprocè tempora. Similiter tempus quod impendit C in per-
currendo ſpatio cd erit dimidium temporis impenſi corrente magnitudi-
ne A per idem ſpatium cd . Si igitur magnitudo A feratur per gc velo-
citate totali notata trapezio $hgci$, tempus illius lationis erit æquale tem-
pori quo ferretur per rectam ca lationibus cd , da quarum menſura fo-
rent $cin d$, $doma$. Quoniam verò per 42. prop. quantum tempus addi-
tur tempori trapezij $ndci$ propter ablationem velocitatis triangularis
 nl , tantum demitur tempori trapezij $amod$ propter additionem velo-
citatis triangularis mol ſubcontrariè poſitæ triangulo nl ; patet tem-
pus quo fertur per gc eſſe æquale tempori quo fertur per ca : ergo tem-
pus quod in latione ca conſumitur eſt æquale tempori B , quod erat de-
monſtrandum.

COROLLARIUM I.

Sicuti ostendimus tempus quo percurritur secunda pars $c g$ esse æquale tempori partis primæ $a c$, ita prorsus ostendetur tempus tertiæ $g e$ esse æquale tempori secundæ, & sic de aliis vt patet: singularum igitur partium $a c$, $c g$, $g e$ &c. tempora sunt inter se æqualia. Istud porrò alia via generaliore ostendetur in propositione quinquagesima.

COROLLARIUM II.

Anonymus hoc ipsum per reductionem, vt vulgò dicunt, ad impossibile primus demonstraui eximia ingenij subtilitate in epistola ad Gassendum missa & inserta sub calcem tomi sexti. Porro ex demonstrationis progressu liquet ad hoc vt intra finitum tempus percurrantur partes illæ omnes spatij proportionales, tempus quod in percurrenda maiore impenditur debere esse maius tempore quod insumitur in percurrenda minore subsequente, non autem æquale vel minus.

PROPOSITIO XLV.

Iisdem manentibus (*Fig. 76.*) in percurrendo spatio $g f$ plus impenditur temporis quam in percurrendo spatio $c g$.

Quoniam enim velocitas designata triangulo $h g f$ habet tempus æquale tempori velocitatis notatæ triangulo $i s h$ æquali, simili, & similiter posito; cum tempus velocitatis $h s i$ minuatur additione velocitatis $h s c g$, patet velocitati $h g c i$ respondere tempus breuius tempore velocitatis $h g f$, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Ex $g h$ producta (*Fig. 76.*) abscindatur in schemate superiore recta $h t$ æqualis ipsi $g h$ & ducatur recta $f t$ occurrens rectæ $c i$ in u ; ponatur magnitudo B habere velocitatis suæ totalis mensuram triangulum $f u c$, sicuti magnitudo A triangulum $f h g$; ac proinde magnitudo B duplo sit velocior magnitudine A , & incipiant eodem momento moueri à puncto f .

Ostendendum est tempus quo magnitudo B deferetur ad punctum c esse minus tempore quo magnitudo A deferetur ad punctum g .

Quando enim magnitudo B peruenerit ad g , cum velocitas illius $t g f$ sit dupla velocitatis $h g f$ pertinentis ad magnitudinem A , insumpserit tempus æquale dimidio moræ quam insumit A in percurrenda linea $f g$: sed tempus quod B impendit in percurrenda parte $g c$ est per superiorem breuius tempore quod insumpsit in decurrenda parte $f g$; est ergo breuius dimidio temporis quod A ponit in decursu rectæ $f g$. Cum igitur B in motu per $f g$ consumat dimidium temporis competentis magnitudini A pro decursu spatii $f g$, & in motu per $g c$ impendat minus dimidio, patet totum tempus lationis $f c$ pro magnitudine B esse minus tempore lationis $f g$ pro magnitudine A , quod erat demonstrandum.

Mm 2

DE CYCLOIDE

COROLLARIUM.

Ex modò demonstratis patet quid responderi oporteat Gassendo dum tomo 3. pag. 568. n. 10. Lugdunensis Editionis ita interrogat. *Quaeso quid impediatur quominus illud (nempe B) perveniat in c eodem tempore quo istud (videlicet A) in g?* Responderi enim debet præsentem demonstrationem illi rei obstare; eandemque obstituram si ingenita virtus motrix & proportionalis addatur utrique magnitudini motæ.

PROPOSITIO XLVII.

Iisdem manentibus (Fig. 76.) ostendendum est magnitudinem A ex puncto f ad partes g deferri non posse si totius velocitatis mensura ponatur esse triangulum fma, & si certum quo incipiat moveri temporis initium statuatur.

Lata enim si fieri potest sit ad punctum a intra tempus B; recta fa secetur bifariam in c; tempus autem quo percurrit spatium ca sit C; erit B maius tempore C; poteritque C toties repeti, ut multiplex ipsius sit maius tempore B, illud multiplex sit D; numerus verò denominator eiusdem multiplicis vel binarius, vel ternarius, vel quaternarius &c. sit E. Quot habet unitates E, tot sumantur, ac, cg, ge, eb continuè proportionales in ratione rectæ fa ad fc; hoc est in ratione duplâ: sumi enim possunt cum sint infinitæ numero. Quoniam temporis spatia quæ in decurrendis rectis eb, eg, gc, ca impenduntur sunt per 44. prop. singula æqualia tempori C, erunt illa simul spatia æqualia tempori D, cum illa simul sumpta ex vna parte, & D ex alia sint æque multiplicia spatij C. Magnitudo igitur A delata ex puncto b ad a insumpserit tempus D maius tempore B quo percurri ponitur tota fa: atqui B totius lationis tempus esse maius quàm D tempus partis patet: erit ergo maius & minus, quod est absurdum. Non ergo moveri potest ad quodcunque punctum a designatum in linea fg ad partes g, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Magnitudo A incipiat moveri à puncto g virtute motrice ingenitâ gh, quæ in motu augeatur iuxta rationem rectarum parallelarum is, ql, mr inclusarum inter rectas mh, hr; ita ut idem eveniat in isto casu in percurrente linea g a quod in alio, solumque discrimen in eo sit quod virtus gh hîc sit ingenita, ibi aduentitia. Ex demonstrationis propositæ methodo liquet non sequi ex hac hypothese absurdum demonstratû in præsentî propositione. Cum enim ad punctum h non sint nisi numerò finiti termini progressionis duplæ cuius primus terminus sit ac, non poterunt sumi post primum terminum ac tot termini quot unitates continentur in numero E: demonstrationis enim ratio ostendit tot posse sumi, quia sunt quotcunque post ac, ita ut nullo numero finito exhaustiri possint.

LIBER SEXTVS.
PROPOSITIO XLVIII.

277

IN casu primi postulati (*Fig. 76.*) dari videlicet virtutem motricem nativam graui descendentem, non rectè obijcitur ex demonstratione superioris propositionis motum fore impossibilem, vel in instanti, si vt contraria opinio vult, acceleratio velocitatis fiat iuxta rationem spatiorum quæ decurruntur.

Ista propositio planè aperta est ex corollario proximè superioris propositionis, virtus enim motrix nativa repræsentatur parallelogrammo $ghra$, cum punctum g possit vbique designari inter a & f pro modo virtutis nativæ designatæ latere ar parallelogrammi $arhg$. Igitur si incrementa velocitatis fiant iuxta rationem rectarum si , lq vel quod idem est hs , hq aut gc , gd , ratio illa quæ motum fieri non posse probat in superioris propositionis casu, cessat in præsentis casu, quem asserit opinio illa quam Gassendus impugnandam suscepit: ergo &c.

COROLLARIUM.

Ex demonstratis patet licet isti finem adhuc impositum non esse verissimam illà demonstratione quam subtilissimus Anonymus Gassendo proposuit, cum quantumvis vera sit, non vrgeat in casu controuersie quem ille, vt patet, aliter se habere assumit. Ponit enim corpus decidens ex se esse *ἀσάπης*, cum tamen re ipsa sit *βάρος ἔχων* quem vtrumque casum distinguit Aristoteles l. 3. de cælo text. 26. & 27.

PROPOSITIO XLIX.

MAneat (*Fig. 77.*) mensura velocitatis triangulum mfa , & magnitudo A intelligatur ferri per rectam fa ita diuisam vt fg sit dupla rectæ fe , ipsiusque fg dupla sit fc , istiusque fa , & ita deinceps in infinitum: vt segmenta eg , gc , ca sint in proportionem continua numerorum 1. 2. 4. &c. Si ergo gc diuidatur bifariam in l , erunt tres eg , gl , lc æquales; & si ca diuidatur quadrifariam in i , h , r erunt illius segmenta æqualia prioribus. Sunt ergo æqualia fe , eg , gl , lc , ci , ih , hr , ra .

Ostendendum est tempora quæ impenduntur in decurrendis partibus æqualibus fe , eg , gl &c. posito motus initio in f , non decrescere secundum proportionem subduplam, ita vt tempus partis fe sit duplum temporis convenientis parti eg , & istud duplum temporis competentis parti gl , &c.

Parti fe tempus competens est constat ex infinitis quorum singula æquant tempus partis eg vt ex quadragesima quarta liquet: ergo in isto primo pari non seruatur illa proportio. Rursus parti eg idem competit spatium quod duabus simul gl , lc per quadragesimam quartam eandem: atqui non conueniret iuxta illam rationem nisi dimidium & quadrans ip-

Mm 3

fius e g: ergo in isto pari non seruatur proportio-subdupla. Præterea partibus g c, c a per eandem quadragesimam quartam compētunt æqualia tempora: atqui iuxta illam rationem non conuenirēt nisi dodrans & quindecim sexagesimæ quartæ partes ipsius g e: ergo non seruatur illa proportio: eodemque prorsus modo ostenditur de aliis; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex simili demonstrandi methodo ostendetur neque in vlla alia proportionē decreſcere eiſmodi tempora. Vnde patet paralogiſmo laborare Gaſſendi diſſertationem tomi 3. pag. 629. n. 8. vbi contendit aſtruere eiſmodi proportionem in decrementis temporum, vt inde colligat *motum fore in inſtanti*, ſi vera foret hypotheſis de acceleratōne grauium deſcendentium, facta in ratione ſpatorum decurſorum.

PROPOSITIO L.

Reuocetur ſchema propoſitionis quadrageſimæ tertiæ (*Fig. 76.*) & in eo rectæ fa proportio ad fc ſit ad libitum data, maneatque proportionales fa, fc, fg, fe.

Oſtendendum eſt tempora partium a c, c g, g e &c. habentium proportionem rectæ a f ad c f vt ex octogefima ſecunda libri progreſſionum Gregorij à S. Vincentio conſtat, eſſe inter ſe æqualia.

Quoniam triangula f g h, i c f, m a f ſunt ſimilia, & eorum baſes f g, c f, a f ſunt continuè proportionales, duæ earum fa, fc ſecabuntur proportionaliter in c, g ideòque triangulorum differentiæ effectæ per rectas d l, c i, g h erunt ſimiles, nempe trapezium m a c i erit ſimile ſimilitérque poſitū trapezio i c g h. Rurſus quoniam ſimilia iſta trapezia ſunt meſura velocitatis quam ſucceſſiuè acquirit magnitudo delata A, tempora illis reſpondentia erunt æqualia per 36. & ſic de aliis; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

En tibi vno ferme verbo demonſtratum: illud egregium theoremæ Anonymi, quod nos in quadrageſima quarta demonſtrare tentauimus in vno præcipuè caſu, ſed longiore anfractu. Hic verò ſtatim ſe ſe offert veritas conſpicienda, quæ tam abdita latuerat ante primam doctiſſimi Anonymi eiſ inuentionem, cui ſine dubio huius theorematis laus primaria debetur.

COROLLARIUM II.

Pone per f duci f x parallelam rectæ a m, & rectas à f, f x fieri aſymptotas cuiuſlibet hyperbolæ; cū fa, fc, fg, fe &c. ſint proportionales, ſi per a, c, g, e &c. agantur æquidistantes aſymptoto f x; ſpatia inſiſtentia rectis a c, c g, g e &c. comprehenſa ſub arcu hyperbolæ & ſub parallelis aſymptoto f x eſſe æqualia inter ſe demonſtrauit Gregorius à S. Vincentio propoſitione 109. de hyperbola. Hinc verò liquet mira ſimilitudo in-

ter tempora quibus percurruntur partes $a c$, $c g$, $g c$, & inter spatia hyperbolica insistentia iisdem partibus; sicuti enim tempora sunt æqualia inter se, ita & spatia.

PROPOSITIO LI.

Sit parabola $m o f f$ (*Fig. 78.*) quam recta $a f$ tangat in f , & cuius diameter æquidistet rectæ $a m$; recta $f a$ sit dupla rectæ $f c$, ipsaque $f c$ rectæ $f g$. Intelligatur mobile A deferri per rectam $f a$ initio lationis constituto in f , ita ut mensura velocitatum sit figura $m f f a$.

Ostendendum est tempus quod impenditur in decurrenda prima & maxima parte $a c$ esse dimidium temporis quod impenditur in secunda consequente $g c$, & ita deinceps de reliquis ad partes f constitutis.

Quoniam tres rectæ $f a$, $f d$, $f c$ sunt proportionales, & ut ex quadragesima liquet rectæ $a m$, $c s$, $g q$ sunt ut quadrata $f a$, $f c$, $f g$, erunt quoque ipsæ rectæ proportionales; ergo ut figuræ $m a c s$ o latera $a m$, $c s$, ita figuræ $f c g q$ latera $f c$, $g q$. Si igitur ut $c g$ ad $c a$, hoc est ut vnitas ad binarium, ita fiat $c s$ ad quartam $f u$, ut est $f u$ recta ad $a m$ ita per quadragesimam & trigesimam octauam erit tempus velocitatis $m a c s$, ad tempus velocitatis $f c g q$. Quoniam igitur recta $c g$ ad $c a$ rectam est ut vnitas ad binarium; erit $f u$ dupla rectæ $c s$. Præterea quoniam quadratum $f a$ est quadruplum quadrati $f c$, erit $a m$ quadrupla rectæ $c s$; sed $f u$ est dupla eiusdem $c s$: ergo recta $f u$ ad $a m$ est ut binarius ad quaternarium vel ut vnitas ad binarium: ergo tempus quod impenditur in percurrenda parte $a c$ est dimidium temporis quod impenditur in decursu consequentis. Methodi verò ratio idem ostendit de antecedente $c g$ respectu tertiæ consequentis, & ita deinceps: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex demonstratis liquet proportionem rectæ $m a$ ad $c s$ esse maiorem rectæ $m a$ ad $c i$, vel rectæ $f a$ ad $f c$. Cum autem tempus maioris sit minus tempore minoris, patet ex corollario secundo quadragesimæ quartæ, motum à puncto f ad a esse multò magis impossibilem. Cæterum si $f a$, $f c$ sint in alia quauis proportionem casus definitur simili methodo, ut patet.

COROLLARIUM II.

Sicuti in corollario quadragesimæ septimæ remedium huic incommodo factum est, ita hîc quoque fiet, si $f n$ ponatur mensura grauitatis naturæ, & initium motûs statuatur in g , versus a : infinitudo enim partium quibus decurrendis opus foret infinitum tempus, relinquetur ad partes f rectæ $g f$, positâ mensurâ velocitatis totalis figurâ $m o i q f a$.

Istud theorema planè nouum est, atque mihi ipsi illius inuentori incredibile adhuc foret, nisi vi demonstrationis penitus cogerer non resilire ab assensu: hæc eadem assentiendi difficultas contigit mihi audito quinquagesimæ propositionis theoremate illo. Ex istis verò & ex sequentibus liquidò constat quanti intersit geometriam admiscere motui, dum de proportionè accelerationum agitur; sine illa enim nihil certò statuitur, sæpiusque itur in scopulos; illa autem adhibita inueniuntur res quæ admirationi sint diligentissimo naturæ perscrutatori. Absit tamen vt de illa laude tantillum cogitemus, quam doctissimus Vendelinus in epistola ad Gasfendum (habetur in tomo 6. Gasfendarum epistolarum pag. 428.) sibi tribuit his verbis. *Merfennus tuus à me ante annum querebat quid sentirem de casu grauium? addebat lapidem casurum in centrum vsque telluris spatio 6. horarum. At ego longè aliud inuenio, ac certus sum peruenturum ad centrum intra minuta horaria 12. Demonstratio longa est & pulcherrima, quæque de motu grauium multa hætenus ignorata patefaciet aliquando. Sed dum eam elucubro inchoatam à Nouembri postremo, interim hoc habeto, signum vnius vncie sphericum nihilo cadere lentius, quàm ferreum globum 1000. librarum. si miramur Archimedem in quadratura paraboles, mirabimur & huius demonstrationem problematis pulcherrimi, & verè non inuile in commune bonum. Hercà Kal. Maij 1633.* Hanc ego demonstrationem non vidi vnquam; sed nec eius amicus Ricciolus de illa quicquam audiuit; meminisset enim illius, tom. 2 pag. 387. n. 13 & pag. 400. n. 11. vbi euidentissimis experimentis coram multis testibus fide dignissimis contrarium constare asserit; nempe sphæram vnius vnciæ longè tardius ferri sphæra mille pond.

PROPOSITIO LII.

SIt vt in schemate quadragesimæ primæ (Fig. 74.) parabole f h m scuius diameter m a, ordinatim applicata a f. Intelligatur mobile A deferri per rectam m a initio lationis constituto in m, ita vt mensura totius velocitatis sit f h m a ad positionem rectæ f a: sit autem m a dupla rectæ m q, & ipsa m q rectæ m r, & ita deinceps.

Ostendendū est tempus quod impenditur in decurrenda prima & maxima parte q a esse ad tempus secundæ q r, vt est quadrati diameter ad eiusdem latus, & ita deinceps de reliquis ad partes f iacētibus.

Quoniam tres rectæ m a, m q, m r sunt proportionales, & vt ex quadragesima prima liquet quadrata f a, g q, h r sunt vt iam dictæ rectæ, erunt ipsa quadrata f a, g q, h r proportionalia, & inter se vt binarius ad vnitatem; ergo recta f a ad q g est vt quadrati diameter ad latus eiusdem: ergo vt figuræ f a q g latera f a, q g, ita erunt figuræ g q r h latera g q, r h: si igitur vt r q ad q a, hoc est vt vnitatis ad binarium, ita fiat q g ad m z; vt est m z recta ad a f, ita erit per quadragesimam primam & per trigesimam

erigesimam octauam, tempus velocitatis fa qg ad tempus velocitatis q r h . Quoniam igitur recta qr ad qa est vt vnitas ad binarium, erit mz dupla rectæ qg , & ipsa mz ad qg erit potestate vt quaternarius ad vnitatem. Quoniam verò recta fa ad qg est potestate vt binarius ad vnitatem: erit mz ad fa potestate vt quaternarius ad binarium vel vt binarius ad vnitatem; ergo mz ad fa est longitudine sicut diameter quadrati ad eiusdem latus: ergo tempus lationis a q est ad tempus lationis q r , vt diameter quadrati ad latus eiusdem quadrati. Methodi verò ratio idem ostendit de consequentibus: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam tempus partis maioris a q est maius tempore minoris qr , patet absurdum in quod deducit quadragesima octaua propositio hinc non habere vllum locum. Patet quoque proportionem rectæ fa ad q b dimittentem trianguli esse maiorem proportionem rectæ fa ad q g .

PROPOSITIO LIII.

Idem vt in proximè superiore manentibus (*Fig. 74.*) velocitates sunt vt tempora à puncto m initio lationis computata.

Compleantur parallelogramma $afpm$, $qgom$, $rhdm$. Quoniam in superiore ostendimus tres rectas af , qg , rh esse proportionales, & rectam af ad qg esse vt diametrum quadrati ad eiusdem latus, erunt tres rectæ pm , om , dm in eadem ratione diametri ad latus: ac proinde per octogesimam secundam libri Progressionum Gregorij à S. Vincentio recta po ad od erit vt mp ad mo , hoc est vt diameter ad latus quadrati. Rursus quoniam in superiore ostendimus tempus partis a q esse ad tempus partis q r vt est diameter quadrati ad eiusdem latus; erit tempus partis a q ad tempus partis q r , vt est recta po ad od . Pari verò ratione si continuentur a q , q r , ry , & compleatur parallelogrammum yum , tres rectæ om , dm , mm erunt proportionales, ergo vt od recta ad d M , ita erit tempus velocitatis g q r h ad tempus velocitatis h ry u . In recta igitur pm sunt mensuræ omnium temporum respondentium omnibus terminis progressionis a q , q r , ry &c. vt ex 82. illa propositione Gregorij à S. Vincentio liquet. Cum igitur recta om æquet rectam qg , erit velocitas qg mensura temporis quo defertur A per rectam mq ; & ita etiam rh velocitas ostendetur mensura temporis quo defertur A per rectam mr : ergo tempora totalia ab initio lationis computata sunt vt ordinatim applicatæ ad diametrum ma parabolæ mu f ; sed illæ ordinatim applicatæ ponuntur esse velocitates; ergo in progressionem spatiorum ma , mq , mr &c. tempora sunt vt velocitates. Perinde verò idem ostendetur in qualibet alia progressionem, hoc est, quamcunque rationem habeat recta ma ad mq : ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Cum ista hypothesis assumatur ad explicanda experimenta varia circa

Nn

grauium descendendum accelerationem, patet in illa esse geometricè verum illud *tempora totalia esse vt Velocitates etiam totales*. Et velocitates siue virtutem motuam debere crescere secundum incrementa ordinatim applicatarum ad parabolæ diametrum ma : & spatia mq , mr , my &c. esse vt quadrata temporum vel velocitatum.

PROPOSITIO LIV.

Iisdem manentibus (*Fig. 79.*) magnitudo A intra tempus B per velocitatem vniformem af ponatur percurrere posse spatium ma : datum sit quodcunque aliud tempus C maius ipso B quantuscunque sit excessus, etiam si plures annos contineat quam sint scrupula horaria in ipso anno. Vt est C ad B ita fiat fa velocitas ad a x velocitatem; per x ducatur xo complens parallelogrammum $xamo$, occurrens parabolæ mgf in g ; per ipsum g ducta sit gq complens parallelogrammum $omqg$.

Ostendendum est velocitatem quam haberet magnitudo A in puncto q , inchoando motum à puncto m ad a , & posita mensurâ velocitatis acceleratæ figurâ $fgma$; si sola & sine vlllo alio incremento deferret magnitudinem A per lineam ma , peruenturam esse ab extremo m ad extremum a intra tempus C , & non citiùs aut tardiùs.

Quoniam enim completo parallelogrammo $fahm$, vt est magnitudinis A constitutæ in puncto a velocitas fa ad velocitatem xa , ita est tempus velocitatis vniformis designatæ per parallelogrammum $xamo$, ad tempus velocitatis vniformis designatæ per parallelogrammum $fahm$: tempus autem velocitatis $afhm$ ponitur B : ergo vt est velocitas xa ad velocitatem af , ita est tempus B ad tempus velocitatis ax : sed ita est tempus B ad C : ergo tempus velocitatis ax vniformis est C , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Apertum est magnitudinem A carere debere omni virtute natiuâ dum motu accelerato ponitur percurrere rectam ma assumptâ mensurâ velocitatis figurâ $fgma$. Nam si tantillam habeat vt mz latus parallelogrammi $zmay$, manifestum est tempus C ad tempus B debere habere proportionem non maiorem proportionem rectæ fa ad ay : si enim fuerit maior, recta ax erit minor quam ay ; ac proinde in toto motu accelerato semper adfuerit velocitas mz vel ay maior velocitate ax .

COROLLARIUM II.

Gassendus tom. 3. pag. 550. n. 29. & 629. n. 8. ponit lapidem ex laqueari ad tabulatum interuallo duarum orgyiarum distitum peruenire motu vniformi per virtutem æqualem, æi quam initio descensus accelerati habuisset; & computando demonstrat annos 5322381. & ampliùs interlabi

oportere ab initio illius motus ad finem usque. Hanc verò lapidis in descendendo segnitiam vocat *incredibilem*, vera tamen est si lapis ponatur non habere illam virtutem deorsum vergentem quam experimur, siue à tellure attrahente vt ipse Gassendus vult, siue à Generante, siue aliunde inditam. Imò vt ex præsentī demonstratione liquet, posset quocunque myriadibus augeri annorum eiusmodi cumulus. Falsa tamen omninò & incredibile verè est, si lapis habeat virtutem illam quam natiuam dicimus, & quam dum manu illum è summo laqueari sustinent pendulum, sentiunt omnes. In ista igitur hypothēsi virtutis nativæ, examinanda nobis restant nonnulla, vt quæ vulgò dicuntur, scribuntur & creduntur nouerimus quatenus geometra concedere debeat. Is enim sola veritatis regula vititur, alienissimus à partium studio quo mens temere ita excæcatur, vt partium suarum omnia probet, aduersantium omnia improbet. Quod quidem malum etiam in Heterodoxis locum habet, vt de se ipso Augustinus testatur libro de duabus animis c. 9. *Ex quo accidebat vt quicquid Manichei dicerent, miris quibusdam modis, non quia sciebam, sed quia optabam verum esse, pro vero approbarem.*

PROPOSITIO LV.

Maneat parabola $fgma$ (*Fig. 80.*) cuius tangens om , & ordinatim applicata fa : magnitudo A intelligatur habere virtutem natiuam designatam parallelogrammo $qgxa$, & intelligatur moueri per rectam qa , ita vt totius velocitatis mensura sit figura $qglfa$. Recta xo occurrat parabolæ in g , sumatur quæcunque recta qB quæ ita diuidatur in s , vt quadratum qs ad quadratum qB sit sicut recta mq ad rectam ma . Ponatur recta fB mensura temporis quo percurritur tota qa , & diuidatur in quocunque tempora Bz , zc , fc æqualia vel inæqualia. Ex recta fq abscindatur qy ipsi fq æqualis, & ponatur ys latus transversum hyperbolæ fE , cuius latus rectum sit fF habens quamlibet rationem ad transversum: ex punctis c , z , B agantur cd , zD , BE ordinatim applicatæ ad axem hyperbolæ fE .

Ostendendum est, si mobile iuxta velocitatis mensuram $qglfa$ inchoato motu à puncto q , & insumptis temporibus fc , sz , fB , ponatur reperiri in punctis n , e , a ; spatia decursa qn , qe , qa esse vt quadrata dc , Dz , EB .

Compleatur parallelogrammum $gxfr$, vt rectæ af , qr sint æquales, ac proinde quadratum qg ad qr sit vt recta mq ad ma : erunt igitur rectæ qr , qB sectæ proportionaliter in g & s . Intelligatur hyperbola gh cuius diameter transversa sit Tg dupla rectæ qg , diameter verò coniugata sit mR dupla rectæ mq : ducantur ordinatim applicatæ nl , eb , &

compleantur parallelogramma $qnlt$, $qebu$; rectæ verò fr , bu , lt productæ occurrant hyperbolæ in h , i , p .

Quoniam per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ mq , tp , tl sunt proportionales; itemque tres mq , ui , ub ; itemque tres aliæ mq , hr , rf : rectæ rf , ub , tl , hoc est rectæ qa , qe , qn erunt vt quadrata hr , iu , pt . Præterea rectæ gt , gu , gr erunt vt tempora quibus decurruntur spatia qn , qe , qa ; id enim constat ex quinquagesima tertiâ, cum $qglfa$ portio parabolæ $mgfa$ ibi tractata, sit mensura velocitatis totalis: sed rectæ sc , sz , fb ponuntur esse vt eadem tempora: ergo vt rectæ gt , gu , gr , ita sc , sz , fb : ergo cum qs ad qB sit vt qg ad qr ; vt sunt qg , qt , qu , qr , ita erunt qs , qc , qz , qB . Cum igitur per vigesimam primam primi conicorum quadrata hr , iu , pt sint vt rectangula Trg , Tug , Ttg : quadrata verò BE , zD , cd sint vt rectangula yB , zs , ycs , trique illa rectangula sint inter se vt tria ista ob similem rectorum Tr , y b sectionem in punctis g , t , u , r & f , c , z , B , patet vt quadrata hr , ui , tp , ita esse quadrata EB , Dz , dc . Vt igitur quadrata EB , Dz , dc ita sunt spatia decursa qa , qe , qn , quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam spatia decursa qn , qe sunt vt quadrata tp , ui ; quadrata autem tp , ui sunt vt rectangula Ttg , Tug , vel vt ycs , yzs patet spatia qn , qe esse vt rectangula ycs , yzs .

COROLLARIUM II.

Si virtutis natiuæ mensura poneretur parallelogrammum $maMG$ quodcunque ad partes oppositas parallelogrammo $moxa$, & figura $GmIfM$ constitueretur mensura totius velocitatis; temporum, velocitatum, & spatiorum comparatio ita perturbaretur, vt nihil certum ex demonstratis hactenus quod colligerem, occurrerit. Hinc factum est vt natiuam virtutem, prout à nobis iuncta fuit cum parabola, crediderim iunctum iri ab iis qui Galilæi hypotheses reducere volent ad graua considerata cum grauitate illa natiua, quam re ipsa obtinent.

PROPOSITIO LVI.

Conferuntur duæ illæ hypotheses, & ostenduntur non tanto differre, vt vna refellatur apertè per obseruationes, quibus altera ad amussim quadret.

Esto (Fig. 81.) triangulum maf , cuius latus fa , ita diuisum sit in c , vt sicut est septenarius ad ternarium ita potestate sit fa ad fc , & fc ad fg , itémque fg ad ef , demumque fe ad fb . Erunt igitur per demonstrata in 82. progressionum apud Gregorium à S. Vincentio, vt fa ad fc , ita continuè ac , cg , ge , eb . Per b ducatur bn parallela rectæ am , complens triangulum fbn ; per n ducatur no latus parallelogrammi $noab$, quod ponatur mensura natiuæ velocitatis magnitudinis A ; trapezium ve-

rd nm a b statuatur mensura totius velocitatis magnitudinis A delata ex b in a per rectam ba. Quoniam a f recta ad f g ponitur longitudine vt septenarius ad ternarium, vel vt 63. ad 27. Si 63. ducatur in 27. gignetur numerus 1701. cuius radix quadrata est circiter 42. ac proinde numeri 63. 42. sunt vt longitudines a f, c f; vel vt a c, c g. Quatuor igitur rectæ ac, c g, g e, e b sunt vt numeri 27. 42. 63. 98. circiter, ita vt error non attingat unitatem integram: summa verò istorum quatuor numerorum erit 230. Talium igitur 230. erit tota b a, qualium a c, c g, g e, e b sunt 27. 42. 63. 98. Si igitur recta b a ponatur partium 240. erunt b e, e g, g c, c a partium circiter 28. 43. 65. 102. Ex propositione igitur quinquagesima tempora quatuor quibus percurruntur partes b e, g e, g c, c a sunt inter se æqualia.

Venio iam ad experimentum Reuerendi P. Riccioli lib. 9. Almagesti sect. 4. cap. 16. n. 11. quod in Bononiensi Asinellorum turri altâ pedes 280. sumpsisse se narrat. Is igitur cum ante annum 1640. planè acquiesceret proportioni illi à Galilæo traditæ, parauit globum argillaceum vñciarum octo, cumque ex summa illa turri demisit, & tempus delationis dimensus est per senas quasque vibrationes perpendiculi ad id destinati confidentes simul horæ minutum vnum secundum, vel horæ vnus particulam ter millesimam sexcentesimam. Expertus autem est globum confecisse pedes 15. post vnâ temporis mensuram, siue post sex vibrationes: post duas, 60. post tres, 135. post quatuor 240. Primum igitur interuallum inuenit pedum 15. secundum, 45. tertium, 75. quartum 105. qui numeri sunt vt 1. 3. 5. 7. prout Galilæus primus eos explorasse dicitur. Ista tamen interualla non exhauserunt, vt patet, totam altitudinem turris ad basim vsque, sicuti optandum erat, & sicuti optasse ipse Ricciolus satis intelligitur ex varia mutatione mensuræ temporis: nam in alio experimento sumpsit vibrationes sex cum vnus semisse in singulas temporis mensuras; attamen turris illa pedum 280. non fuit satis alta pro quatuor mensuris, & humilior pro quinque, vt idem Ricciolus exactè narrat.

Vt autem comparatio quam instituere paramus perspicuè intelligatur habenda sunt præ oculis duo subiecta latercula, quorum primo continetur istud Riccioli experimentum, cum quadratis vibrationum: alterum autem laterculorum repræsentat pedes in hypothesi altera decurrendos, intra temporis spatia æqualia; intra primum, 28. intra secundum 43. &c. adduntur etiam quadrata vibrationum necessariarum ad hoc vt iuxta Riccioli & Galilæi hypothesim percurreretur numerus pedum illi secundo laterculo adscriptus. Reperiuntur verò ista quadrata, si vt spatium 15. pedum laterculi primi ad spatium 28. pedum laterculi secundi, ita fiat vibrationum primi laterculi quadratum videlicet 36. ad 68. Iste enim quartus numerus est quadratum vibrationum 8. circiter, ad hoc vt in hypothesi Galilæi pedes 28. percurrerentur ab initio motûs designato. Ita pariter vt spatium laterculi primi 60. ad spatium 72. laterculi secundi, sic

Nn 3.

Vibrationum nu- meus.	Spacia confecta ab initio motus definita pedibus kom.	Spacia confecta in singulis tem- poribus.	Quadrata vibra- tionum.
--------------------------	--	---	----------------------------

I. Laterculum.

6.	15.	15.	36.
12.	60.	45.	144.
18.	135.	75.	324.
24.	240.	105.	576.

II. Laterculum.

8.	28.	28.	68.
13.	72.	43.	173.
18.	137.	65.	328.
24.	240.	102.	576.

est vibrationum quadratum 144. ad 173. Hoc quoque pacto vt 35. ad 137. ita fiant 324. ad 328. Radices verò quadratæ illorum numerorum dant vibrationes laterculi secundi nempe 8. 13. 18. 24. circum circa.

Porro ex conspectu & comparatione laterculorum liquet quæ in sententia secundi decurruntur æqualibus temporibus, in hypothesi laterculi Galilæana percurri debere non admodum diuersis temporibus, cum postremum postremo quadret, nec tertium à tertio discrepet: secundum verò à secundo differat vna vibratione; primum denique à primo duabus. Quæ certè satis leuia sunt, nec obstant quo minùs totum id vel refundatur in vitium Obseruatorū aliquod quamuis occultum, vel in aërem ambientem, vel in aliud simile. Gassendus accerimus huius hypotheseos assertor in dissertatione de motu impresso n. 35. pag. 556. tom. 3. edit. Lugdun. & in epistola ad P. Honoratum Fabrum Societatis nostræ pag. 167. tom. 6. candidè

fatetur circa ipsa initia obseruari non posse iuxta quam progressionem numerorum fiat ista acceleratio, idque omnem diligentiam superare. Attendi quoque hîc debet conditio experimenti à Ricciolo sumpti. Integrum tempus totius descensus fuit nongentesima particula vnius horæ; diuisa verò fuit in viginti quatuor alias particulas vibrationibus totidem respondentes. Illa breuissima temporis morula globus octo vnciarum argillaceus summa pernicitate præteruolauit ducentos quadraginta pedes romanos; interea verò annotatæ sunt vibrationes, designatæ sunt oculis partes muri quibus sphaera illa respondit inter cadendum. Hæc certè omnia suadent in pedibus numerandis & attribuendis breuiculis illis temporis momentulis posse committi errorem nonnullum ab exercitissimo quoque.

His ita perpenſis mihi nondum satis liquet cur P. Ricciolus istam Baliani & Cabæi, vt ipse testatur, sententiam de numero opinionum eximat, detrudatque inter errores. Neque enim satisfacere videtur dicendo *illius oppositum sibi & aliis qui testes adfuerunt observationibus suis, iam non esse probabile tantum, sed euidens ac certum infallibili scientiâ Physico-mathematicâ*. Nam non est adhuc euidens hæc experimenta, esto certa sint; opposita esse sententiæ illorum Autorum; nec Ricciolus ostendit si vera sit Baliani sententia; non posse esse vera illa experimenta. Adnotandum verò hîc censeo Balianum nobilem Genuensem deditissimum fuisse experimentis capiendis, &

cum initio Galilæi sententiam sequeretur, discessisse postea ab illa, ut ipse Ricciolus narrat lib. 9. sect. 4. cap. 16. n. 24. Nostram itaque hac de re sententiam concludimus hoc dicto, nondum allata esse experimenta quæ falsitatis conuincant Balianam opinionem: ergo &c. quod erat nobis constitutum.

COROLLARIUM I.

Aduertendum est quod in secundis & quartis spatiis laterculi vtriusque inuicem collatis nulla ferè sit discrepantia, maior verò existat in aliis, id oriri ex optione proportionis quam posui esse inter interualla $a f$, $a c$, & inter velocitates $a o$ natiuam, & $o m$ acquisitam, dum magnitudo A ponitur in puncto a . Cum enim obseruata à Ricciolo interualla narrentur esse ut 1. 3. 5. 7. (quod quidem mathematicè esse non potest saluà natiuà grauitate mobilis, si interualla sint ut quadrata temporum, ut in quinquagèsima quinta ostendimus) sumpsi proportionem rectæ $a f$ ad $f g$ eam ipsam esse, quæ numeri 7. ad 3. Quod si posuissem diuersam, hoc est, aut paulò maiorem, aut paulò minorem, inæqualitas spatiorum obtigisset dispensata aliter, nec tanta apparuisset in primis & tertiis spatiis. Istud itaque mihi adscribi debet; methodo tamen pari poterit seligi proportio rectæ $a f$ ad $f g$ quæ numeris illis aptius adhuc congruat: cumque proportio velocitatis $a o$ ad $m o$ ignota nobis aliunde sit quàm ab obseruationibus, ea deligenda erit quæ illis quàm optimè conueniat. Verum quidem est, si velocitas $b n$ vel $a o$ ad velocitatem $g h$ sit ut ternarius ad septenarium, non posse aliter diuidi illa quatuor spatia, quàm à nobis diuiduntur in secundo diagrammate: sed ad statuendam eiusmodi proportionem nihil inducere nos debet, nisi concordia illius cum experimentis. Quapropter cum non dubitem quin alia proportio rectæ $a f$ ad $a c$ melius adhuc responsura sit illis, eam eligendam relinquo studioso veritatis indagatori; methodus verò semper erit eadem.

COROLLARIUM II.

Si eadem magnitudo A ponatur ferri bis per idem spatium $b a$, semel quidem iuxta Galilæi sententiam, & tempus lationis sit B , iterum verò iuxta Baliani hypothèsim tempusque lationis sit C , methodus præsentis propositionis (ut patet) non assumit tempora B , C fore æqualia; sed tantum si spatium $b a$ diuidatur in quatuor partes iuxta numeros secundi laterculi 28. 43. 95. 102. quatuor partes temporis illis respondentis esse ferme inter se æquales in hypothèsi Galilæana, in Balianiana autem quatuor partes temporis C illis respondentes esse prorsus æquales inter se. Hoc enim semel constituto quatuor partes tam temporis B quàm C esse debere in vtraque hypothèsi, saltem quantum ad sensum attinet, æquales, nulla superest nobis ratio qua discernamus vtrum magnitudo A siue globus argillaceus ex summa turri Asinellorum demissus à P. Ricciolo insumpserit cadendo tempus B , potiùs quàm tempus C . Quæ enim?

Satisfit dubio occurrenti aduersus hætenus demonstrata de natiaua virtute.

Vnum prætermiffum videmus, quod ne labem aliquam illi de natiaua virtute opinioni inferre possit hîc nobis proponendum simul & dissoluedum censemus. Ostendimus in 48. propositione virtutem natiaua grauis impedire ne demonstratio Anonymi noceat hypothefi isti: atqui dum graue sursum proiectum incipit deorsum recidere, in puncto illo reflexionis virtus natiaua deorsum premens eliditur & quasi nulla redditur per æqualem vim sursum trahentem, & æquilibrium constituentem; graue igitur in hoc casu moueri non poterit. Respondeo isto argumento demonstrari sententiam nostram & Aristotelis l. 8. phys. c. 7. & 8. *dari nempe quietem in puncto reflexionis*. In isto igitur casu plures Philosophi secuti Aristotelem quem rectè explicant Conimbricenses in ca. 8. libri illius quæst. 1. contendunt dari morulam aliquam temporis qua proiectum quiescat ab omni motu, quia tunc perinde est ac si nulla illi esset virtus deorsum, nullaque sursum vergens; tantumque postea censetur acquirere virtutis deorsum quantum remittitur virtus sursum, quia verò ær subiectus resistit motui deorsum & illa resistentia debet vinci virtute aliqua determinata, tantum debet remitti virtus sursum, quanta est illa virtus sufficiens ad scindendum ærem: ergo quies tamdiu durat, quamdiu remittitur illa virtus, neque enim remittitur in instanti, sed successiuè. Propter istam rationem existimaui dari oportere quietem in puncto reflexionis, si ær vincendus subfit; si autem nihil subfit, sed vacuum ponatur medium, credidi quietem non fore necessariam: nunc verò propter illius demonstrationis rationem conuincor necessariam esse etiam in vacuo, sententiâ ista Baliani positâ, morulam, vt tantisper acquiratur virtus aliqua certa, cuius ope vitetur illud incommodum. Illa porrò morula determinanda erit à principio aliquo extrinseco, si intrinsecum nullum adfit exigens potius hanc quam illam: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam virtus natiaua mirum quantum turbat hypothefim Galilæi & Gassendi, posset aliquis cogitare virtutem natiaua gratis à nobis supponi habere proportionem rectæ oa (Fig. 81.) ad rectam am . Verum istud minimè gratis asseritur à nobis. Esto enim virtus aliqua quam denotet recta ma deferens vniformiter magnitudinem A intra tempus B : esto virtus natiaua D deferens vniformiter intra tempus C . Si enim virtus D non sit apta deferre vniformiter per spatium nihil resistens (hoc namque ponimus dum virtutem natiaua æstimamus) non est virtus vlla, nihilque nisi nomen virtutis habet; at verò virtus quàm experimur dum humeris graua tollimus, non est eiusmodi nomine tenus virtus. Vt est C ad B ita fiat ma ad ao ; patet virtutem ma conuenientem tempori B esse ad virtutem

tutem D conuenientem tempori C vt est a o ad a m : ergo virtus natua ad aliam virtutem denotatam rectâ a m habet proportionem rectâ a o ad a m.

PROPOSITIO LVIII.

SI magnitudo A (*Fig. 78.*) ponatur moueri à puncto a, ad f, & mensura velocitatis ponatur primo quidem triangulum vt in casu trigessimæ nonæ; secundo ceratoides parabolica, vt in casu quadragessimæ; tertio parabola, vt in casu quadragessimæ primæ.

Ostendendum est in prima & secunda hypothesi motum fieri posse, sed nunquam finem illius fore; in tertiâ verò, fore aliquando illius finem.

Ex quadragesima secunda huius liquet tempora partium decursarum esse eadem si incessu retrogrado eadem via relegatur, dummodo eadem mensura velocitatis maneat. Ergo cum post primam partem a c restent aliæ infinitæ c g, g e, e b, &c. percurrendæ, in quarum singulis pro primo casu impendi debeat par tempus tempori partis a c, vt in quinquagesima ostendimus, vel pro secundo casu maius, vt in quinquagesima prima monstratum est, patet in duplici isto casu finem nullum fore lationis. Quoniam verò ex quinquagesima secunda constat in tertio casu tempus minoris partis decrescere in certa quadam proportionē, apertum est infinitarum illarum partium tempora simul constare tempus aliquod finitum, id enim ostenditur in 82. libri progressionum apud Gregorium à S. Vincentio : ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ratio cur opus sit infinito tempore in primo & secundo casu non est quod magnitudo in motu transit per omnes tardioris motus differentias, vel vt ita dicam, per omnes tarditates; id enim competit quoque tertio casui; sed quod transit per omnes ita dispositas. Cæterum istud theorema non immeritò inter paradoxica reponi potest. Ex hac verò propositione liquet, quæ de motu accelerato demonstrata fuere, posse saltem plurima applicari motui retardato. In toto autem isto tractatu sumpsimus velocitates vniformes, id est, neque auctas neque imminutas tempore lationis, ac proinde deferentes vniformiter magnitudinem, intra idem tempus deferre per spatia quæ sint vt velocitates, itemque si deferant per idem spatium, earum tempora esse reciproce vt velocitates, quod etiam apud Galilæum libro de motu æquabili constans est.

PROPOSITIO LIX.

Mira varietas opinionum circa quæstiones physicas de grauium motu refertur, eiusque causa indagatur.

Vendelinus laudatus à nobis suprâ in corollario propositionis quin-

OO

quagesimæ primæ, horaria scrupula duodecim contendit sufficere ad lapidis in centrum terræ descensum. Ricciolus noster tom. 1. pag. 90. ait globum argillaceum vnciarum 8. confecturum intra horam passus romanos antiquos 38880000. cum igitur 12. horaria scrupula sint quinta pars vnius horæ, & spatia sint in hypothese Riccioli vt quadrata temporum, duodecim scrupula horaria vindicabunt sibi vigesimam quintam partem illorum passuum, nempe 1555200. qui conficiunt milliaria circiter 1555. Atqui idem Ricciolus eiusdem tom. pag. 63. asserit semidiametrum terræ continere milliaria 5174. ergo intra horaria scrupula duodecim triplo plus itineris confecerit globus descendendo iuxta Vendelini sententiam, quàm iuxta Riccioli. Vterque tamen vult in descensu seruari eandem proportionem. P. Mersennus exigit sex horas ad illud iter, vt refert Vendelinus; in quo sequitur Galilæum relatum & reiectum à Ricciolo tom. 2. pag. 399. nam ex hypothese quam ibi Galilæus struit ad explicandum istum motum, apertè sequitur sex horas esse necessarias ad istud iter. Hanc ipsam hypothese Galilæi Gassendus non improbat dissertatione de motu impresso n. 35. pag. 556. tomi tertij edit. Lugd. Ex istis igitur Autoribus lapis descendendo tricies plus temporis infumit, quàm Vendelini calculus ferat.

Præterea Vendelinus & Ricciolus asserunt lapidem ad centrum vsque iturum esse per maiora vsque & maiora incrementa velocitatis. At Galilæi hypothese incrementa non admittit nisi vsque ad itineris medium, inde verò decremenda ad centrum vsque, vbi cesset omnis motus. Hoc expressè docet Gassendus in illo dissertationis loco & in epistola ad R. P. Fabrum Societatis nostræ tom. 6. pag. 167. cui quidem decremento simile aliud agnoscit, probabilèque putat in sententia Bullialdi, quàm tamen refellit Ricciolus tom. 2. pag. 398. quamuis ipse Bullialdus constanter illam semper asseruerit vt patet ex literis ad Gassendum datis, & editis tom. 6. Operum Gassendianorum pag. 410.

Tertiò in illo ipso corollario propositionis quinquagesimæ primæ iam retuli discordiam inter Vendelinum & Ricciolum super quæstione anglobus octo vnciarum tardiùs descendat globo mille librarum: vtérque tamen demonstrationem se hac de re habere incunctanter affirmat.

Quartò circa perpendiculari reciprocos itus & reditus non concinunt planè inter se Recentiores. Vendelinus in epistola ad Gassendum inserta tom. 6. pag. 497. Operum Gassendianorum, ita scribit. *Quod autem Mersennus miratur asseri à me hibernas oscillationes horarias plures esse quàm æstivas, sciat (oro) me experimentis innumeris id deprehendisse.* Ricciolus istud non admittit l. 2. cap. 20. propos. 15. subditque nec placere Mersenno. l. 4. harmoniæ pag. 369. quod argumento est Vendelinum neque per literas, neque libris editis id potuisse vnquam probare Mersenno. Constantiam autem vibrationum in perpendicularis ante se vsurpatis nullam fuisse contendit asseueranter Caramuel in epistola quæ inter Gassendianas extat pag. 497.

Tanta verò in istis mensuris oscillationu indeterminandis extat varietas, vt Ricciolus illud refundat in aliquorum indiligenter obseruata. Quod autem in suo perpendiculo vnus Calignonus sibi visus est obseruasse, reijciunt vt inexpertum Ricciolus tom. 1. pag. 91. & Gassendus de motu impresso tom. 3. pag. 536. n. 15. post Merfennum suum.

Venio ad causam tantæ discordiæ. Prima eaque generalis est quod inter accuratos Obseruatores alij aliis sint accuratiores: quo in genere Ricciolum nostrum esse accuratissimum dubitari non potest, inspectis eius obseruationibus. Neque putes Tyrones tantum esse causam illius discordiæ quæ in omni genere obseruationum deprehenditur; inter viros enim peritos & longo suæ artis vsu consummatos hæc discordia sæpius interuenit. Hinc tanta varietas in capienda eleuatione poli Urbis alicuius etiam celeberrimæ; & in obseruandis momentis characteribusque deliqui cuiuslibet solaris vel lunaris. Aberraret verò toto veritatis ostio si quis inde statueret negligenda esse experimenta; cum inde potius inferre deberet diligentius incumbendum esse experimentis capiendis: illa enim sunt totius Physices basis; vnde Aristoteles in Ethicis pronuntiauit, puerum posse fieri Geometram, non tamen Physicum; quia Geometria non nititur experimentis, Physica verò in illis tota fundatur. Quapropter qui dicunt Peripateticorum Philosophiam spernere experimenta, quid dicant nesciunt, aut imperito illudere vulgo student, illique ingenerare odium melioris (vt equidem reor) Philosophorum sectæ. Nos tamen qui Peripatetici & dici & esse volumus, semper, quoties de sensuum iudicio vel experientia agitur, præ oculis habemus illud Augustini lib. 8. de Ciuitate Dei cap. 7. *absit vt his comparandi videantur qui posuerunt iudicium veritatis in sensibus corporis, eorumque infidis & fallacibus regulis omnia quæ discuntur metienda esse dixerunt, vt Epicurei, & quicunque alij tales, vt etiam ipsi Stoici. . . . Hi verò, quos merito ceteris anteponimus, discuerunt ea quæ mente conspiciuntur, ab iis quæ sensibus attinguntur; nec sensibus adimentes quod possunt, nec eis dantes, vltra quàm possunt.* Hic obiter aduerto iuxta Augustini sententiam Epicureorum, Stoicorumve philosophiam non esse omnium optimam: quæ duæ nominatim sectæ malè etiam audiunt Actorum cap. 17. v. 18. Quod autem quidam Epicurei hodièque Aristotelem maledictis onerant, in eo se genuinos probant sectatores Epicuri, qui (vt ait Tullius lib. 1. de nat. Deor.) *contumeliosissime Aristotelem vexarit.*

Altera discordiæ illius causa non iam sunt experimenta, sed vel rationes illis experimentis superstructæ; vel præiudicatæ aliunde opiniones. Ita Gassendus cum graui existimarit virtute terræ magneticâ attrahi, in eam sententiam ire coactus à Morino est, vt asseruerit grauium velocitatem non augeri nisi vsque ad dimidium putei, qui ad centrum vsque effusus foret. Vendelinus & Ricciolus naturam secuti sunt ducem, cumque omnibus experimentis illa doceat augeri velocitatem grauium, longè verosimilius scripserunt, istud augmentum continuatū iri etiam ad centrum.

vsque terræ. Cæterum, vt hoc in transitu dicam, caue putes eos qui suam philosophiam distant *experimentis sensatis passim comprobari*, nihil insuper addere, quod non ita comprobetur. Quibus experimentis atomi Epicureæ comprobentur prorsus me latet; sed multò magis ignoro quo sensûs experimento comprobetur quod Reuerendus P. Maignan tom. 2. Cursus sui pag. 685. n. 7. asserit, atomum esse solidæ extensionis, exempli causa, instar paruulæ tesserae, haberéque facies sex quadratas, angulos octo; sed istos sex angulos esse vnâ & eandem prorsus rem, ipsâque atomum quamuis corpoream, hoc habere commune cum Angelo & spiritu, vt sit *tota in toto & tota in qualibet parte*. Gassendus Principi suo Valesio, cui nihil suorum celatum esse vult, pag. 159. col. 2. sexti tomi, concedit vltro atomum præditam esse partibus; *eam tamen nulla vi esse secabilem*: existimauit quippe hoc sensatis experimentis aptius quadrare, vt corpus trinx dimensionis, quamuis exiguum, partes obtineat. An autem dum nulla vi secari posse scripsit, diuinam etiam intellexerit, inquit Mersennus per epistolam insertam tomo sexto Operum Gassendi pag. 430. sed quid ille responderit penitus ignoro. Exposita igitur est illa opinionum varietas, eiusque causa est indicata, prout fuit propositum.

COROLLARIUM.

Ex demonstratis liquiddò constat Physici nomen nondum esse tribuendum illi, qui sola experimenta, quantumuis plurima, perceperit: cum non sit adhuc nisi instructus apparatu ad Physicam addiscendam necessario: id verò inde apertè confici quòd ex eisdem experimentis alij vnum statuunt, alij oppositum. Ille igitur solus Physici nomen mereatur, qui ex physicis experimentis ea concludat quæ licet sub sensu non cadant, cohereant tamen iis quæ sensu percepta fuerint.

PROPOSITIO LX.

Indiculus præcipuorum quæ in hoc libro tractantur.

I. Methodus sine intricato illo arabismo explicandi summas simplices alicuius figuræ, & eiusdem summas quadratorum, cuborum &c. earumque vsum, extat in propositione prima & secunda. Figura autem curua huc reducitur, quandoquidem ad hoc vt maiori cum perspicuitate res intelligatur, debet expandi in planam, iuxta modum explicatum in quinto libro. Dum autem Arabismum hîc notamus, Diophanti Alexandrini numeros nolumus non summè probare.

II. Dettonuillæus mirabili casu incidisse in eandem cum Gregoriana quadraturam cycloideos superioris paruæ ostenditur in tertia propositione.

III. In quarta proponitur postulatum quod certissimum putamus, ex quo benè multis inductionibus, compertum habuimus illud consonare cum demonstratis via geometrica antiqua. Illius quidem Dettonuillæus mentionem non facit; sed eo subaudito & concesso ostenditur nonnullo-

rum huius Autoris problematum concordia cum nostris, in quarta & quinta propositionibus.

IV. Nostra quadratricum generatio & comparatio cum summis triangularibus & pyramidalibus Dettonuillæi proponitur, & ostenditur in sexta & quinque sequentibus, nec non in decima tertia, nouas tantum esse voces Dettonuillanas. Vngulletta, eorumque vsus primus qui inuenerit non esse Dettonuillæus monstratur in nona, & decima quinta. Vsus libræ planæ à nobis olim propositus quibus verbis significetur à Dettonuillæo, declaratur in decima quarta. Quid de methodo *indiuisibilium* sentiamus, narramus in decima septima; vbi omisimus dicere nonnullos in istam methodum conferre problemata plurima ex numeris traducta; quod quidem tam attinet ad communem Antiquorum Geometriam, quam ad nouam istam. Hoc verò licet permittatur, cum Arithmetica & Geometria sorores sint coniunctissimæ, iuxta illud ab Eutocio in vndecimam 1. Conicor. relatum, ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκῶν εἶμεν ἀδελφαί; attamen in eo summè religiosos fuisse Antiquos deprehendi. Etenim cum Pythagoras, vt plures volunt, ex numeris venatus esset problema illud celeberrimum, quod in primi Euclidis propos. 47. locum tenet; curauit illi demonstrationem geometricam inuenire; alienumque à cultu illius ætatis geometrico se facturum fore putauit, si problemate proposito, dixisset id ex numeris patere quoties latera trianguli reſtanguli habent ad basim rationem numeri ad numerum; nec aliter id posse euenire etiamsi non habuerint proportionem eam quam habet numerus ad numerum.

V. In decima septima declaramus quid sentiamus de difficultate problematum quæ hodierni scriptores soluunt, si conferantur cum iis quorum solutionem Antiqui nobis reliquerunt. Istud verò vberius explicandum hoc loco nobis est, cur videlicet nostræ summæ pyramidales duplo maiores sint Dettonuillanis, vt in vndecima statuimus, vbi tunc hæsimus in assignanda causâ; sed ea profectò perspicua erat, & ante à nobis scripta quàm de illo libro sexto cogitaremus. In propositione quinta libri tertij superioris (Fig. 24.) posuimus per figuræ b z c g limbum ad positionem inclinatæ b a describi superficiem inclinatam, cuiusmodi in corollario vltimo primæ eiusdem libri dicitur descripta fuisse in constructione illius eiusdem propositionis. Ostendimus autem si per eundem limbum b z c moueatur parallela perpendiculari g a, describatque superficiem super plano b g c rectam; solidi, cuius sectio est triangulum z t e vel z t y (sunt enim quantum ad istud idem) æquiponderans esse duplum æquiponderantis solidi cuius sectio est triangulum z y e, libræ planæ axe g c, perpendicularo a g c, sustentaculo d i. Atqui triangulum t y z est sectio nostri cunei effecti à plano per g c ducto, habente inclinationem t y z, super plano b g c; si autem triangulum t y z mutetur in æquale z e y, solidum sectionis z e y habebit, sicut ex 1. tertij patet, hanc proprietatem, si quolibet plano ad planum a g c parallelo secetur inter puncta z, y, & angulus t y z.

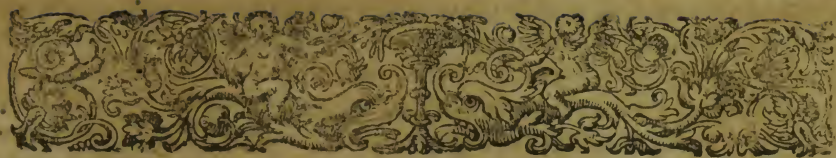
fit semirectus, ut sectio illa sit æqualis & similis portioni baseos bz eg interceptæ inter illud planum & punctum b: ergo istud solidum habet proprietatem summæ triangularis Dettonuillanæ, & solidum sectionis t y z habet proprietatem nostræ summæ triangularis, ut ex demonstratis in hoc libro patet: ergo necessarium est ut æquiponderans summæ nostræ triangulari sit duplum æquiponderatis summæ triangulari Dettonuillanæ: sed æquiponderans istis summis est summa pyramidalis, ergo necessarium est ut summa pyramidalis nostra, sit dupla summæ pyramidalis Dettonuillanæ. Id verò, ut patet, non probat quicquam contra hætenus asserta de Dettonuillanis inuentis. Nec existimare quisquam debet solidum sectionis z y e triangularis aliud esse quam cuneum vel vngulam abscissam ex cylindræo inclinato; sicut solidum sectionis triangularis z t y est vngula ex cylindræo recto abscissa: ambæ vngulæ sunt æquales: sed æquiponderans vngulæ inclinatæ non est nisi dimidium spatij quod vngulæ erectæ æquiponderat.

VI. Calculus sex problematum quæ de corona circulari & cycloidica proponi eodem pacto possunt quo de cycloide in libris tertio, quarto, & quinto proposita iacent, initur propositione decima octaua, & per duodecim sequentes absoluitur.

VII. In propositione trigesima prima, & in quatuor sequentibus proponuntur quædam difficultates physicæ, cum cycloideos generatione connexæ: ibique quædam PP. Maignan & Tacquet scita physico-mathematica examinantur.

VIII. Denique à trigesima sexta ad finem vsque nonnulla demonstratur de grauium descendendum acceleratione, quæ non paucis paradoxica iudicabuntur, cuiusmodi imprimis erunt quæ in quinquagesima & quinquagesima prima propositionibus demonstrantur. Ex corollariis autem quadragesimæ sextæ, quadragesimæ nonæ, quinquagesimæ quartæ, & ex quadragesima octaua patebit V. C. Gassendum non potuisse ista accuratè definire, quòd geometriam non coniunxerit cum principiis motus physicis. Optarunt imprimis Galilæus & Gassendus ut grauia decidentia & à recto casu impedita parabolam itinere suo describerent: Physico-geometra non tam quid illi summi viri optarint, quàm quid ratione valida probarent examinabit: ad hoc enim aliquando assumere videntur principia physica, quæ iure merito in dubium reuocentur.






DE CYCLOIDE

LIBER SEPTIMVS.

In quo accuratius examinantur principia Archimedeæ illius libræ, qua in Cycloide tractandâ potissimum vsi hætenus fuimus.

PRÆFATIO.

 Vm Geometriæ peramica Analysis, dicatur ἡ ἀπὸ τῆς τέλους ἀπὸ τοῦ ἑκπὸς ἔρχων, à fine ad principium regressus; non abs re erit vt post tam frequentem, etiam in istis de Cycloide libris, vsum libræ Archimedeæ, ad ipsius principia regrediamur; præcipuè cùm, vt Orator ait, *in Geometriâ prima si dederis, danda sint omnia.* Retro autem gradi iuuabit vt propius inspiciamus quænam & quàm probabilia sint ea quæ dedimus, & quæ huius artis præcipuus inuentor Archimedes sibi dari postulat: in quo quidem regressu occurrent nonnulla, quæ eò magis curiosum allicient Geometram, quò remotiora à vulgi opinione erunt.

ARCHIMEDIS POSTVLATA.

I. Petimus graua æqualia, æquali distantia posita, stare in æquilibrio. II. Graua item æqualia, ex inæqualibus longitudinibus suspensa, non stare in æquilibrio; sed ad id quod ex maiore pendet, vergere. III. Item si grauibz, quæcunque sint longitudines vnde pendent, stantibus in æquilibrio; alteri eorum adiciatur aliquod graue, tunc ea non stare amplius in æquilibrio, sed ad id inclinari, cui illud graue fuerit adiectum. IV. Similiter etiam, si ab altero eorum auferatur graue, tunc non amplius committere æquilibrio, sed ad id à quo nihil sit ablatum, vergere. V. Figuris planis, similibus & æqualibus inter se coaptis, centra quoque grauitatis earum erunt inter se coaptata. VI. Si verò figuræ similes fuerint, non autem æquales, centra grauitatis earum erunt similiter posita.

Similiter posita ad similes figuras dicimus esse puncta, à quibus lineæ rectæ secundum angulos æquales ductæ efficiant æquales ad latera homologa angulos. VII. Item si magnitudines quædam in quibusdam distantis posita stent in æquilibrio, & quæcunque eis æquales in eisdem distantis posita stabunt in æquilibrio. VIII. Cuiuscunque figuræ cuius perimenter fuerit in eandem partem caua, centrum gravitatis intra figuram esse oportet.

PROPOSITIO PRIMA.

Explicatur quid Antiquiores Geometræ velint esse centrum illud gravitatis in quo Archimedis Isorrhopicorum libri fundantur.

I. Initio præsentis libri statuendum est Archimedes agere in uniuersum de centro gravitatis planorum, solidorum, & quarumlibet magnitudinum; septemque primas propositiones libri primi æquiponderantium esse communes omnibus quæ suspendi possunt, siue lineæ, siue planæ figuræ, siue solidæ fuerint; ideoque *μεγέθη* ea dici, quod nomen generalissimum est. Quapropter, cum in vulgatis codicibus non extet quid Archimedes centrum gravitatis appellet, id nunc inquirendum est de omni centro, quamuis Eutocius commentariis in illum librum satis putauerit se fecisse, si explicaret tantum quid Archimedes vocaret centrum gravitatis in planis figuris.

II. Eutocius docet centrum gravitatis in planâ figurâ ex Archimede appellari id à quo suspensa, parallela manet horizonti. *Duarum autem aut plurium figurarum planarum, id à quo libra cum suspensa fueris, manet horizonti parallela.* Eius verba sunt hæc. *κέντρον ὅτις ἐπιπέδῳ κήματι, ἀπ' ἧς ἀρτάμενον παρέλληλον μένει τῷ ὀρίζοντι. Δύο δ' ἢ πλείονων ἐπιπέδων κέντρον ἐστὶν ἡ τοῦ βάρους, ἀπ' ἧς ἀρτάμενον ὁ ζογὸς παρέλληλος ἐστὶ τῷ ὀρίζοντι.*

III. Pappus Alexandinus in octavo mathematicarum collectionum libro ita definit, centrum gravitatis in solido. *Λέγεται δ' κέντρον βάρους ἐκείνου σώματος ἢ σημείον π κέντρον ἐνός, ἀπ' ἧς καὶ ἐπινοίαν ἀρτῆθ' ἢ πρὸς ἐξέρχον, καὶ φυλάττει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν ἢ μὴ μετατρέπονται ἐν τῇ φορᾷ.* *Centrum autem gravitatis uniuscuiusque corporis dicimus, punctum quoddam intra positum, quo ita librari pondus concipimus ut dum fertur deorsum non circumvoluatur, sed seruet quam in principio lationis habebat positionem.* Exposuimus igitur quid Archimedes ipse, Pappus, & Eutocius velint esse gravitatis centrum, quod erat propositum: in sequentibus verò paulò generaliorem huiusce rei trademus definitionem.

PROPOSITIO II.

Potest evenire ut centrum è quo suspensa figura plana manet horizonti parallela, sit extra ipsam figuram.

Sit figura plana $baedfc$ (Fig. 82.) comprehensa lateribus sex ba, ae, ed, df, fc, cb ; sintque anguli abc, aed æquales, item $fc b, f d e$; latera verò ab, bc sint æqualia lateribus ae, ed singula singulis; Manifestum

stum est, iuncta recta af , figuras $abcf$, $aedf$ esse æquales & similes, angulumque bae diuidi bifariam in duos baf , $ea f$. Cum ergo figura $abcf$, $aedf$ sint æquales & similes, habebunt centra grauitatis ita sibi respondentia ut si vna congruat alteri, centrum quoque vnus congruat centro alterius. Sit ergo centrum vnus h , & centrum alterius i ; iuncta sit recta hi occurrens rectæ af in g ; erunt hg , gi æquales; si enim super ag intelligatur circumvolui planum agh , congruet figura $abcf$ figuræ $aedf$, & punctum h puncto i ; ac proinde recta gh rectæ gi : sunt ergo gh , gi æquales: ergo per quartam primi æquiponderantium g est centrum grauitatis magnitudinis $cbaedf$ compositæ ex duabus $abcf$, $aedf$. Posse autem g cadere infra punctum f est apertum: si enim $abcf$ sit trapezium, diuisisque bifariam lateribus ba , cf in n & m , iungatur recta mn , erit per vltimam primi æquiponderantium centrum grauitatis figuræ $abcf$ in lineâ op , similiter diuisis lateribus ae , fd & iuncta recta op . Si ergo perpendicularis fl ad rectam af ex puncto f excitata non diuidat bifariam rectam ab in l , sed minor sit portio al portione lb (quod fieri posse apertum est, cum latera ab , ae , fc , fd possint produci ad quamcumque distantiam) cadet recta no infra rectam lu , ac multò magis recta hi ; punctum ergo g erit infra punctum f : potest ergo fieri ut centrum ex quo figura plana manet horizonti parallela sit extra ipsam figuram; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Potest euenire ut centrum, è quo suspensa manet figura solida, sit extra ipsam figuram.

Intelligatur (Fig. 82.) eadem figura $cbaedf$ esse communis sectio superficiei planæ & solidi, ita ut diuidatur per planum, cuius sectio af , in duo solida omnino æqualia & similia; eorum autem centra grauitatis sint h & i . Quoniam ergo recta hi connectit centra grauitatis h , i duarum magnitudinum æqualium, & bifariam secta est in g : erit punctum g centrum grauitatis totius magnitudinis compositæ; quod erat ostendendum. Quapropter Pappus dum voluit centrum esse intus non intellexerit id generaliter, sed iuxta mentem Archimedis in octauo postulato. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est cur Archimedes non postularit in vniuersum omnis figuræ planæ centrum grauitatis esse intra ipsam; sed omnis figuræ cuius perimenter & linea curua ambiens sit ad easdem partes caua. Ambitum enim, quo quælibet figura continetur vocat hic περιμετρον, siue ille ambitus constet lineis rectis, siue lineis partim rectis partim curuis, siue lineis curuis constituentibus aut non constituentibus angulum; ut ex initio libri primi de sphaerâ & cylindro constat.

Pp

EX demonstratis infertur generalis definitio centri grauitatis Archimedei.

Ex his apertè colligitur centri grauitatis definitio pro qualibet finita magnitudine, siue ea sit cuiuscunque generis linea, siue cuiuslibet modi superficies, siue solidum quodcunque. Si per vnum aliquod punctum & per magnitudinem aliquam finitam ducatur linea recta expers grauitatis, rigida & minimè flexibilis, illique lineæ intelligatur quasi agglutinari & cohærere magnitudo veluti manubrio quo in omnem partem agi possit; recta ista dicatur *perspecto modo* cohærere magnitudini. Hoc autem posito, ita definiri in vniuersum posse videtur centrum grauitatis.

Si per aliquam magnitudinem finitam, & per vnum aliquod punctum ducta intelligatur recta linea magnitudini *perspecto modo* cohærens, & si ex illo puncto vnico suspensa, persistet immota in omni situ qui illi ad libitum datus fuerit, tale punctum vocetur centrum grauitatis illius magnitudinis.

Magnitudo aliqua liberè vel sponte pendere ex puncto aliquo dicitur, quando ex modo pendendi non impeditur vergere quò natia inclinatio tulerit.

Cæterum planum siue lineam grauitate carere cum diximus, intelligi etiam volumus leuitate quoque destitui, & esse aliquid quantum ad *formam* indifferens. Eutocius in danda definitione centri grauitatis planæ superficiei posuit illam esse parallelam horizonti, & ex illo puncto quod centrum grauitatis dicitur, pendere immotam; non quod id sit necessarium, sed quod id sufficiat. Similiter Archimedes, vt ex libello de parabolæ quadratura liquet, libram semper horizonti parallelam constituit; sed id, vt reor, non fit nisi iuuandæ phantasie causa; nam iuxta libræ istius principia, si pondera vtrunque liberè pendeant, quamuis libra sit ad horizontem inclinata, perinde tamen manere debet in eo situ magnitudo composita ex vtraque illa quam libra sustinet. Fortasse linea illa recta connectens *perspecto modo* vtramque illam magnitudinis compositæ partem non appellabitur libra, nisi quando fuerit horizonti parallela; sed istud est quæstio de nomine nihili pendenda, dummodo constet magnitudinem ex illo puncto suspensam manere immotam quicumque illi situs circa illud punctum, vnde liberè pendet, designetur. Nos tamen in scribendis quæ consequuntur, illum sæpe modum loquendi & cogitandi vsurpabimus, vt quam minimè recedamus ab Antiquiorum loquendi etiam modo. Ergo &c. quod erat nobis constitutum.

COROLLARIUM.

De Archimedeâ libra ita, vt patet, loquimur, quasi aliam distinguamus diuersam; id verò perspicuum erit ex demonstrandis de libra curua, è

qua suspensæ magnitudines in idem omnino punctum vergere ponuntur: at in Archimedeæ lineæ *potius* intelligi debent parallelæ, & nunquam conuenientes; & si intelligantur in vnum concurrere peruertitur natura illius. Qui autem in Machinarum vsu, libram vulgarem quasi Archimedeæ proprietates haberet vsurpant, ij res valde discrepantes confundunt; in praxi tamen & calculo nullus error notabilis percipitur, quamdiu lineæ in centrum vergentes habebuntur sensuum iudicio pro parallelis; sicuti nullus alicuius momenti error accidit, quod radij solares ponantur paralleli dum in parabolicum speculum è terra oppositum incidunt. Peccant itaque qui libræ illi curæ (quæ sola in vsum hominum cadit) proprietates Archimedeæ & rectæ attribuunt, longè enim diuersas, vt postea patebit, obtinent; hosque crediderim notari apud Gregorium à S. Vincentio in in libri, de parabola, propositione 124.

S C H O L I V M.

Vt demonstremus Theorema illud quod tanti momenti est in librandis magnitudinibus, & quod Archimedes adhibet in propositione sexta quadratura paraboles, vnumquodque suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet; cum in lineâ perpendiculari fuerit punctum suspensionis & centrum grauitatis suspensi, præmittenda nobis sunt nonnullæ propositiones; demonstratio enim illius, vbi extet ignoro.

P R O P O S I T I O V.

CV M in plano grauitate destituto, finito, parallelo horizonri, & per centrum planæ magnitudinis ipsi cohærentis ducto, ipsa magnitudo manserit suspensa; & cum per idem centrum ducta fuerit in eodem plano recta sustinens magnitudinem cohærentem; si eiusmodi recta ex solo centro grauitatis suspendatur, nec ipsa, nec magnitudo ipsi cohærens mutabunt situm.

Sit (Fig. 83.) planum h g m finitum, grauitate destitutum, & horizonri parallelum; in eo verò sit magnitudo plana b a e d f c ipsi cohærens, eiusque centrum grauitatis sit g, per quod in eodem plano ducta sit vtunque recta i g l. Dico si recta i g l ex solo puncto g suspendatur, nec ipsam, nec magnitudinem ipsi cohærentem mutatum ire situm.

Quoniam enim magnitudinis b a e d f c centrum grauitatis est g, & planum h g m, in quo ipsa est, habet situm horizonri parallelum, si planum sustinens magnitudinem cohærentem suspendatur ex puncto g solo, manebit vt iacet per definitionem centri grauitatis suprâ traditam. Rursus quoniam recta i l diuidit magnitudinem planam in duas partes (si enim non diuideret illam, tota magnitudo existeret ad eandem lineâ i l partes, ac proinde ad illas deprimeretur, quod non ponimus) i a l u f h & i b c h u l e d, ex sibi inuicem æquiponderabunt, positæ vt iacent; si enim positæ vt iacent non æquiponderarent sibi, inclinatio plani fieret ad partes

gravioris, quod est contra definitionem centri grauitatis; ergo cum partes $i a l u f h$ & $i b c h u l e d$ sibi inuicē vt iacent æquiponderent, si linea $i l$ suspendatur ex g tantum, non fiet inclinatio ad partes m vel a , ex hypothesi quod linea $i l$ maneat horizonti parallela. Ipsam autem $i l$ manuram horizonti parallelam ostenditur eodem ferme pacto. Si enim fieri potest, ad alterutras partes i inclinetur, & ex g ad rectam $i l$ excitetur perpendicularis $n o p$; secans magnitudinem in duas partes æquē vt iacent ponderantes $b c o p$, $o p a e d f$: cum ergo duæ illæ partes sibi inuicem æquiponderent, magnitudo non inclinabitur ad partes i ; ergo neque recta $i g$ inclinabitur ad partes i . Tota igitur magnitudo plana $b a e d f c$ lineā $i g l$ horizonti parallelā sustentatā, & ex solo puncto g suspensā non mutabit situm; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si planum $i g m$ statuatur rectum ad horizontem, ita vt recta $p g$ sit perpendicularis ad eundem horizontem, & consequenter recta $i l$ parallela eidem horizonti, rectam $i l$ ex solo puncto g suspensam & sustentem graue $b a e d f c$ non mutaturam situm; partes enim $b c o p$, $o p a e d f$ in situ quem habent permanentes æquiponderabunt sibi inuicem vt ostensum fuit; non ergo fiet inclinatio rectæ $i l$ ad alterutras partes i vel l . Quod autem recta $i l$ sustinens magnitudinem $b a e d f c$ habeat partem $i a l u f$ ex superiori parte prementem incumbendo deorsum, id perinde est atque si ex inferiore pendendo traheret deorsum, vt apertum est.

PROPOSITIO VI.

CUM plano finito, non graui, parallelo horizonti, & per grauitatis centrum solidæ magnitudinis ipsi coherentis ducto, magnitudo solida manserit suspensa, & cum per centrum ductum fuerit aliud planum finitum & grauitate carens quod sit ad horizontem rectum, secetque magnitudinem, atque eam sibi connectat; si omnes aliæ solidi suspensiones soluantur, & illæ solæ retineantur per quas mediante plano recto suspenditur ex rectâ quæ est communis sectio vtriusque plani; ista verò recta ex solo puncto in quo est centrum grauitatis suspendatur; nec ipsa, nec solidum ab ipsâ sustentatum mutabunt positionem.

Sit retentâ figurâ prioris propositionis (Fig. 83.) solidi finiti centrum grauitatis g , & per illud ductum sit planum $h g m$, in quo $b a e d f c$ sit communis sectio plani $h g m$ & solidi. Ad planum $h g m$ erectum sit planum perpendiculariter cadens, transiens per g , & secans magnitudinem solidam, eamque sibi connectens; communis

autem sectio vtriusque plani finiti & gravitate spoliati sit recta il .

Ostendendum est si recta il toti solido mediante plano ad horizontem recto cohærens, ipsum solidum sustineat suspensa ex solo puncto g ; ipsam ig , ipsumque solidum retentura esse priorem situm.

Quoniam enim magnitudinis solidæ centrum gravitatis est g , & planum hgm finitum & gravitate carens cohæret ipsi magnitudini, si ex solo puncto g planum hgm suspendatur, servabit tam ipsum quàm magnitudo cohærens priorem situm per definitionem centri gravitatis traditam in quarta propositione. Rursus quoniam planum per il ductum perpendiculariter ad horizontem diuidit magnitudinem solidam in duas partes, quarum vnius communis sectio cum plano est $ialufh$; alterius, $ibchule d$, ex positæ ut iacent sibi inuicem æquiponderabunt; si enim positæ ut iacent non æquiponderarent sibi, inclinatio plani paralleli fieret ad partes grauioris, quod est contra definitionem centri gravitatis: ergo cum partes, quarum communis cum plano parallelo sectio est $ialufh$, $ibchule d$, sibi inuicem æquiponderent; si linea il suspendatur ex g tantum, non fiet inclinatio ad partes m vel a , ex hypothesi quod linea il maneat horizonti parallela. Ipsam autem il mansuram esse horizonti parallelam ostendemus eodem planè modo. Si enim fieri potest ad partes i alterutras inclinetur, & ex g ad rectam il excitetur perpendicularis nop , & per rectam nop ducatur gravitate carens planum erectum orthogonallyter ad horizontem, illud secabit magnitudinem solidam in duas partes, easque æquiponderantes inuicem, quarum communis sectio cum plano parallelo erit $bpo c, opa edf$: ergo si plano hgm parallelo intelligatur ut prius cohæreere solida magnitudo, inclinabitur superficies ad partes i ad quas solidi portio grauior iacet; quod est contra definitionem centri gravitatis. Tota igitur magnitudo solida linea igl horizonti parallelâ sustentata, & ex solo puncto g suspensa non mutabit situm, ipsaque etiam il manebit ut iacet horizonti parallela, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Cum planum aliquod super horizonte erectum perpendiculariter, finitum, & gravitate destitutum per alicuius magnitudinis centrum gravitatis transiens ipsi cohæserit magnitudini, existens in eodem cum ipsâ plano, si quidem ipsa sit plana; vel, si solida extiterit, ipsam secans, perque centrum ducta in eodem plano recta horizonti parallela fuerit; si huiusmodi recta ex solo centro suspendatur, nec ipsa nec graue mutabunt situm.

Ista propositio est quasi porissima præcedentium duarum: nam si magnitudo fuerit plana, redit casus primæ propositionis; sin fuerit solida, casus secundæ statim se se offert, si per rectam ductam agi intelligatur

planum erectum perpendiculariter ad prius planum; ipsumque planum erectum sit finitum, & gravitate nudatum, ponaturque coherere solidæ magnitudini & illam sustinere. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

CUm planum super horizonte perpendiculariter erectum, finitum, & non graue transferit per magnitudinis alicuius centrum gravitatis, eique magnitudini cohererit; & cum in illo ducta fuerit quævis recta horizonti parallela, non transiens per gravitatis centrum; ex isto autem centro demissa fuerit perpendicularis linea ad ipsam parallelam, si ex puncto in quo istæ duæ rectæ sese secuerint suspendatur eiusmodi parallela totam magnitudinem mediante plano erecto sustinens, nec recta, nec magnitudo mutabunt situm.

Planum iul (*Fig. 84.*) super horizonte perpendiculariter erectum, finitum, & non graue, transeat per g centrum magnitudinis planæ bcd , aut solidæ cuius bcd sit cum plano communis sectio; ipsi verò magnitudini cohereat planum iul . Quælibet recta ab horizonti parallela ita ducta sit in plano iul ut non transeat per e ; ex e ad rectam ab demissa sit perpendicularis ef occurrens rectæ ab in f . Dico si ex solo puncto f suspendatur recta ab sustinens mediante plano iul magnitudinem cuius centrum gravitatis est e , nec rectam, ipsam ab , nec ipsam magnitudinem mutatum ire positionem.

In plano iul ducatur per e recta heg parallela horizonti: ergo per præcedentem si linea hg sustinens magnitudinem suspendatur ex e , nec linea, nec ipsa magnitudo mutabunt situm; ergo cum recta ab sit parallela ipsi hg , ipsa quoque ab manebit parallela horizonti, ipsaque se ad ipsum perpendicularis. Cum ergo ex puncto e suspensa linea hg totaque magnitudo non mutet situm; & punctum e suspensum ex puncto f per lineam fe ad horizontem perpendicularem non mutet situm (si enim mutaret ascenderet, quod est contra naturam gravis) tota magnitudo ex f puncto fixo suspensa, totumque planum iul , ac proinde recta ab situm suum retinebunt, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO IX.

Sit (*Fig. 85.*) magnitudo cuius centrum gravitatis e , ut in præcedenti, atque per e ductum sit planum finitum, gravitate carens, ad horizontem perpendiculare, & ipsi magnitudini coherens; sit autem, ut in eadem præcedenti, f communis sectio rectæ $ainb$ eodem plano ductæ horizonti æquidistanter, punctumque idem sit communis sectio rectæ ab , & perpendicularis ef ad ipsam ab demissæ ex centro e . Rursus sit libra hmu parallela horizonti, cui alligata sit in h & g recta ab sustinens mediante plano magnitudinem

cuius centrum est e (in hac figurâ maioris lucis causâ rectam h posuimus extra rectam $a b$; concipi tamen ita debent ut punctum h puncto a congruat, punctumque g puncto b , punctumque f puncto i) ipsa autem libra suspensa intelligatur ex puncto m , ut ipsum m vel congruat puncto g , vel iaceat inter g & u ; unde intelligatur pendere magnitudo l ; & æquiponderare magnitudini, cuius centrum e , manenti ut iacet suspensâ.

Ostendendum est si magnitudo eadem alligetur ex puncto i , & duæ priores suspensiones in a & b factæ solvantur, æquilibrium permanensurum esse.

Quoniam enim magnitudo, cuius centrum e , suspensa ex f , manet in eodem situ, & recta $a b$ horizonti parallêla per præcedentem propositionem: ergo cum f & i sibi congruant, item a & h , itemque b & g , recta $a b$ manebit ut iacet intra rectam $g h$, suspensa ex puncto i : sed eadem grauitas, quamdiu in eodem situ manet sustentata à librâ, æquè illam premit deorsum (cùm enim eadem sit grauitas, & eadem grauitas non fiat magis vel minus ponderans nisi quia situm quem ad libram habebat mutauit, manebit immutato situ æquè ponderans) ergo libræ æquilibrium non mutabitur suspensione magnitudinis ex solo puncto i factâ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Istud est theorema quod in prop. 4. proposuimus ex Archimede desumptum, quodque demonstrandum susceperamus, cùm Archimedis demonstratio non extet, quod sciam. Commandinus quidem vir alioqui harum disciplinarum peritissimus commentariis in propositionem sextam de quadratura parabolæ, conatur illud demonstrare; sed præterquam quòd eius demonstratio non est de omnibus magnitudinibus tam planis quàm solidis; vitio, quod petitionem principij appellant, laborat, ut propius inspicienti apertum erit.

COROLLARIUM II.

Cum libra extiterit in plano finito, non graui, recto ad horizontem, & transeunte per grauitatis centrum magnitudinis alicuius ipsi cohærentis; & cùm eiusmodi magnitudo ex vnius brachij duobus punctis suspensa fuerit, per puncta plani ipsis intima libram perinde grauabit, atque si pondus ei æquale suspenderetur ex sola puncto in quod perpendicularis ex centro in libram, vel in lineam plani libræ congruentem, penderet. Istud theorema apertè eruitur ex præsentì propositione.

PROPOSITIO X.

SI recta connectat duarum magnitudinum centra grauitatis, & illas è solis centris pendentes sustineat; compositæ ex vtraque magnitudinis centrum grauitatis est in iam dictâ lineâ.

Sint a & b (fig. 86.) centra gravitatis duarum magnitudinum; recta ab connectat centra, & solis punctis a, b sustineat magnitudines. Dico centrum gravitatis compositæ ex utraque magnitudinis esse in rectâ ab .

Sint primò magnitudines planæ $cfe d, ghi u$; & in eodem plano quod horizonti parallelum fiat, existant. Si fieri potest, sit gravitatis centrum extra lineam ab in puncto l eiusdem plani; per l agatur mn parallela rectæ ab . Quoniam magnitudinis planæ centrum gravitatis ponitur esse punctum l , partes magnitudinis compositæ in quas diuiditur per rectam mn erunt æquiponderantes ut iacent, alioqui fieret inclinatio ad partem præponderantem, quod est contra definitionem centri gravitatis traditam in prima propositione. Magnitudinem autem compositam diuidi in duas partes æquiponderantes ut iacent est absurdum. Cum enim recta ab transeat per centra singularum magnitudinum, eas diuidet in duas portiones æquæ, ut iacent, ponderantes: ergo duæ $c d o p, g h r q$ æquiponderabunt, ut iacent, duabus $o e f p, r q u i$, ut iacent, permanentibus: ergo si duabus $c p o d, h r q g$ addatur ea pars magnitudinis quæ est inter parallelas ab, mn , & si eadem dematur ex magnitudinibus $p f o e, r i u q$: quod supererit non erit ut iacet æquiponderans, illi quod ex illâ additione conficietur ut iacet permanenti; & tamen ostensum est esse æquiponderans: erit ergo, & non erit, quod est impossibile. Non ergo centrum gravitatis est extra lineam ab , si magnitudines sint planæ & in eodem plano existentes.

Quod si magnitudines sint solidæ, sit earum cum plano horizonti parallelo finito, non graui, & ducto per centra a, b, l communi sectio $c d e f, ghi u$: si ergo per rectas ab, mn ducantur plana duo inuicem parallela, ostendentur partes per plana diuisæ eodem prorsus absurdo sibi æquiponderare, & non æquiponderare, quo ostensum est in priori casu de partibus planæ magnitudinis per lineas ab, mn factis: non ergo centrum gravitatis est extra lineam ab , si magnitudines sint solidæ. Si igitur recta & c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Si linea recta connectat duas magnitudines, transeatque per earum gravitatis centra, ipsisque magnitudinibus cohæreat, centrum gravitatis compositæ ex utraque magnitudine est in lineâ connectente.

Ista propositio sequitur apertè ex præcedentibus: cum enim magnitudines illæ perinde premant lineam connectentem centra gravitatis, atque si ipsæ penderent ex solis gravitatis centris; & cum centrum gravitatis magnitudinis compositæ ex duabus, quando duæ illæ pendent ex solis centris gravitatis, sit in lineâ connectente eiusmodi centra; patet centrum gravitatis de quo agit præsens propositio esse in lineâ illâ connectente centra gravitatis, & ipsis magnitudinibus cohærente, quod erat demonstrandum.

COROL.

Propositionem istam vt à se antè demonstratam, ἀποδεδειγμένην, adhibet Archimedes libri primi de æquiponderantibus propositione quæ in editis latinè codicibus numeratur quarta, in græcis secunda. Cùm autem eiusmodi propositio in antecedentibus non reperiatur, cùmque etiam definitiones centri gravitatis desint, suspicio non levis est eiusmodi librum non haberi nisi mutilatum; quapropter adducor vt credam in illis quæ perierunt, esse propositionem illam quam corollario primo non desiderauimus.

PROPOSITIO XII.

Proponuntur dubia aduersus postulata ab Archimede.

Quod Geminus apud Eutocium ait, propositiones quæ ob perspicuitatem inter *axiomata* iure debeant numerari, ab Archimede appellari *postulata*, licet in earum quibusdam apertum sit, in aliis tamen non satis liquet; imo nec apparet quo pacto absque vilo veritatis præiudicio admitti possint.

Primò etenim assumit planas figuras esse gravitate præditas, alterique æquiponderare spatio, vt inde demonstret veram illarum aream. Atqui plana figura, cùm non sit corpus sed superficies, non facilè à Physico concedetur habere quicquam ponderis. Cùm enim iuxta eos qui superficies corpori inserunt, eæ sint numero infinitæ, possintque esse æquales (vt in quouis cylindro, cubo, & parallelepipedo) euident est, si singulæ superficies essent certæ cuiusdam gravitatis, omnes simul conflaturas esse pondus verè immensum, quod est absurdum, & contra experientiam. Non igitur verum est figuras planas esse gravitate præditas.

Secundò assumit lineas per quas graua ex librâ (quam rectam esse ponit, & horisonti parallelam vt ex sexta de quadratura paraboles constat) liberè pendent, esse inuicem parallelas, & ad ipsam perpendiculares. Hoc autem sapit errorem Xenophanis Colophonij qui vt Aristoteles testatur libro 2. de cælo cap. 13. terram commentus est fundamentis suis peruadere quidquid sub ipsâ spatij animo concipi potest. Ex quo conficitur motus grauium deorsum tendentium parallelos esse inter se & ad horisontem perpendiculares. Sed istud reiciunt omnes, iamque diu Aristoteles cap. 14. libri citati pronuntiauit graua non ferri deorsum per lineas parallelas, sed per lineas ad vnum totius mundi centrum coeuntes. Quin & ipse Archimedes libro primo de iis quæ vehuntur super aquam ex hoc ipso principio illorum librorum demonstrationem pendere voluit. Cur ergo quod verum esse nouerat, noluit admittere in isto de æquiponderantibus tractatu, maluitque vsurpare id quod aperte falsum est? quo autem modo istud non obstat veritati & certitudini consequentium demonstrationum?

Tertiò Archimedes in 7.9.11. aliisque propositionibus quadraturæ paraboles, assumit lineas quibus è librâ pendent figuræ, nullius esse ponde-

Qq

ris; & figuram spatiumve eiusdem semper esse gravitatis siue brevioris siue longioris lineam pendeat, dummodo cætera non mutantur. Istud quidem non tam difficile creditu appareret: sed tamen, cum non probetur, iure merito inter *petitiones* computatur; præterquam quod non consequenter philosophari videtur, dum ipsam superficiem gravitate præditam esse vult, non tamen lineam.

Quartò in quinto postulato figuras inter se componit καὶ ἐκδομοσιν explicatam à nobis in paragrapho octavo prolegomenon tetragonismicorum pag. 66. qui quidem modus licet usurpatus fuerit ab Euclide, nunc tamen ut ἀνεκλέπητος passim reiiicitur à doctis huius ætatis Geometris.

Quintò ponit ut datum si gravia ferantur lineis parallelis, magnitudinem finitam, siue sit simplex superficies plana, siue corpus; & siue sit composita ex pluribus planis superficiebus, siue ex pluribus corporibus, habere centrum gravitatis. Vnde verò is qui se (ut Orator alicubi dixit) proficetur non persuadere, sed cogere, probat eiusmodi punctum dari in ea hypothese quæ non est, sed mente tantum fingitur esse; præcipue cum in eâ quæ est, non omnis magnitudo habeat gravitatis centrum, propterea demonstrabitur in sequentibus?

Sextò insuper ex doctrina illa conficitur spatium finitum è libræ brachio vno suspensum æquiponderare posse spatio immenso ex altera parte libræ certa quadam ratione suspensio; quod videtur absurdum, quia inter finitum & infinitum non datur proportio; daretur autem si æquiponderarent sibi mutuo: nam ut brachium libræ ad longitudinem unde pendet aliquod pondus, ita vicissim ipsum pondus ad æquiponderans. Pondus autem finitum posse ex istis principiis æquiponderare immenso, iam concessimus in secundæ appendicis adiectæ ad libros tetragonismicos pagina sexta.

Vnde etiam oritur aliud dubium contra postulatam quartum & consequentia reliqua; in illis enim assumi videtur non dari centrum gravitatis nisi in figura, quod nomen sonat spatium undique comprehensum & terminatum; atqui centrum gravitatis competere etiam figuris quæ non undecunque vallantur & circumscribuntur, ibidem astruimus.

Septimò denique illius causa inquirenda restat, cur ista quæ Archimedes de libra tradit, ut vera sint, adeò tamen difficilia comprobentur, ut pauci admodum sint qui illa intelligere possint? Nam geometrica esse captu facilia pronuntiavit Aristoteles, 6. Eth. cap. 8. cum ibi puerum posse fieri Mathematicum asseruerit, non autem sapientem, aut Physicum; sanctus quoque Thomas affirmavit 2. Metaph. lect. ultim. imaginatione potius quàm iudicio opus esse ad percipiendas has disciplinas. Ergo &c. quod erat propositum.

Ex his omnibus liquidò constat dubitationes istas aliqua solutione indigere, ne parum firmum & constans videatur tanti ingenij & utilitatis

Opus. Vt autem plenè satisficiamus, præmittenda duximus nonnulla de æquilibrio quod fit grauibz pendentibus per lineas non parallelas sed conuenientes in centrum mundi; quæ duo æquilibrij genera vulgò in vnum confunduntur, cum longè diuersa sint, vt ex sequentibus patebit.

DEFINITIONES ET POSTVLATA.

Libram curuam appello peripheriæ concentrici mundo semicirculi portionem ex puncto aliquo inter eius extrema posito suspensam. Eam in æquilibrio esse dico quamdiu eius puncta omnia æqualibus radiis à centro mundi distant.

Postulo graua in centrum mundi ferri. Item graua æqualia vno sui tantum puncto terminis peripheriarum æqualium alligata & liberè independentia, nec vltra centrum porrecta æqualiter inter se ponderare, siue facere æquilibrio. *Maiores explicationis causâ addidi non debere vltra centrum porrigi: id enim satis intelligi poterat, cum id quod vltra porrigitur non pendeat sed potius pendentibus obstat.*

Item graua æqualia peripheriis inæqualibus dicto modo suspensa non æqualiter ponderare; sed id quod in longiore peripheria pendet deorsum ferri.

Item si graua secundum quandam distantiam libræ dicto modo (quem & notum seu cognitum & perspectum appellabimus) affixa æquiponderent, & alteri eorum apponatur graue aliquod, tunc ea non æquiponderare, seu non esse æquilibria; sed illud deorsum ferri cui adiectio facta fuerit.

Similiter etiam si ab altero eorum auferatur graue, tunc æquilibrio cessare, & id à quo nihil est ablatum ferri deorsum. In sequentibus propositionibus pro eodem habeo distantias, peripherias, & angulos ad lationis centrum constitutos insistentesque ad eiusmodi peripherias.

PROPOSITIO XIII.

Graua quæ in distantiis æqualibus posita æqualiter ponderant æqualia sunt.

Si enim essent inæqualia, auferreturque à maiori excessus, reliqua non æqualiter ponderarent; cum ab altero æquiponderantium aliquid fuerit ablatum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Graua in distantiis seu peripheriis æqualibus posita, si fuerint inæqualia non æquiponderabunt, sed maius eorum inclinabitur.

Ablato enim excessu æquiponderabunt; cum æqualia in distantiis posita æqualibus æquiponderent; eo autem quod ablatum fuerit adiecto, inclinatio libræ fiet ad partes eius cui facta est accessio: ergo &c. quod erat demonstrandum.

Qq 2

Has duas propositiones Eutocius inter petitiones aut corollaria ex petitionibus deducta numerat; quapropter illi prima est qua hic & in vulgatis latinè codicibus est est tertiâ, qua numerorum discrepantia in ceteris deinceps reperitur.

PROPOSITIO XV.

Si graua inæqualia in distantis inæqualibus suspensa æqualiter sponderent: maius in minori, minus in maiori distantia suspenderetur.

Sint (Fig 87.) graua inæqualia a, b , quorum a sit maius, b minus, centrum lationis d , & descripta ex centro d semicirculi portio $a c b$ intelligatur suspendi ex c ; graua autem a & b noto modo ex a & b pendentia sibi inuicem æquiponderent.

Ostendendum est peripheriam $a c$ esse maiorem peripheria $b c$.

Si enim distantia $a c$ non est minor distantia $c b$: ablato excessu quo grauitas a excedit grauitatem b , cum iam ab altero æquiponderantium (ab ipso videlicet a) ablatum sit aliquid, inclinabitur ad b ; quod non est verum. Nam cum $a c$ distantia ponatur non esse minor ipsa $c b$, erit vel æqualis, vel minor: Si æqualis esset, magnitudines a & b suspensæ ex æqualibus interuallis $c a$, $c b$ æquiponderarent: si autem $a c$ esset maior, inclinatio fieret ad a ; nam æqualia in distantis inæqualibus non æquiponderant, sed quod in maiori distantia est inclinatur. Propter hæc igitur distantiam $a c$ minorem, ipsa $b c$ esse necessarium est, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est ipsas $a c$, $c b$ distantias non tam poni quam probari esse inæquales. Præterea manifestum est graua quæ in distantis inæqualibus æquiponderant inæqualia esse; eorumque maius illud esse quod in minori distantia pendet.

PROPOSITIO XVI.

Sit planum fixum transiens per centrum mundi d (Fig. 87.) & in eo sit descripta semicirculi mundo concentrici portio $a c b$, bifariam in c secta; ex duobus extremis a , b alligata noto modo pendeant æqualia inuicem graua a , b .

Ostendendum est si peripheria $a c b$ ex solo puncto c sustineatur, & liberè pendeat; esse ut antea iacebat, ac proinde ex illis compositam magnitudinem $a b$ in situ priore perseveraturam esse.

Quoniam enim peripheria $a c b$ est mundo concentrica minorque semicirculo, potest intelligi esse libra ex c suspensa; & quoniam interualla

a, c, b sunt utrinque æqualia, ipsæque grauiæ a, b ex æqualibus interuallis suspensa noto modo pendent, libra a, c, b in æquilibrio manebit; ac proinde in eodem situ immota perseverabit, nec inclinabitur ad alterutram partium; sed quælibet eius puncta æqualiter distabunt à centro d : ipsa igitur pondera manebunt ut prius æquè à centro distita; quod tantum significare volumus, dum dicimus compositam magnitudinem a, b in situ priore esse perseveraturam; ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Si quis præ oculis habuerit librum primum æquiponderantium ab Archimede scriptum, deprehenderit nos vestigiis ipsius insistentes ad hanc usque propositionem id ipsum de curuâ librâ demonstrasse, ex similibusque principiis, quod ille de rectâ ostendit. In hac tamen propositione animaduertitis nos ab ipso aliquatenus deficere; quatenus videlicet centri grauitatis nullam mentionem facimus; nec, ut ille fecit, ostendimus punctum c esse centrum grauitatis magnitudinis ex a, b compositæ. Ex quo fit ut nostra demonstratio non tam latè pateat, atque Archimedea.

PROPOSITIO XVII.

Sit ut in præcedente (Fig. 87.) planum fixum transiens per centrum mundi d , & in eo sit descripta semicirculi mundo concentrici portio a, c, b , bifariam in c secta; ex tribus punctis a, c, b alligata noto modo pendeant æqualia inuicem grauiæ a, b, c . Si peripheria a, c, b ex solo puncto c sustineatur & liberè pendeat, dico ipsam esse mansuram ut antea iacebat; ac proinde ex illis compositam magnitudinem a, c, b in situ priore esse perseveraturam.

Quoniam enim peripheria a, c, b est mundo concentrica, minorque semicirculo, potest vices libræ ex c suspensæ gerere; & quoniam interualla a, c, c, b sunt æqualia ipsæque a, b grauiæ æqualia; si libra a, c, b ex solo puncto c teneatur suspensa, ipsa ut iacet manebit, per præcedentem; sed etiam ipsa magnitudo c manebit ut prius iacebat, cum ex eodem puncto c pendere ponatur, eodemque prorsus modo: tam ergo libra a, c, b positionem priorem retinebit quàm ipsæ magnitudines a, c, b , quod tantum significare volumus, dum dicimus compositam magnitudinem a, c, b in situ priore debere persistere: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Hinc istud manifestum est. Si quocunque magnitudines numero impares in peripheria a, c, b ita collocentur, ut cæterarum duarum quæque, quæ hinc inde pari numero computantur, sint inuicem æquales; suspensionis verò puncta occupent æqualiter distita ab eo, unde illa, quæ media est, suspenditur; & si peripheria ex puncto magnitudinis mediæ solo sustineatur, liberèque pendeat; ipsa manebit ut antea se habebat; ac proinde ex

illis omnibus composita magnitudo in situ priore perseverabit.

COROLLARIUM II.

Quod si pares numero fuerint magnitudines in peripheria $a c b$ ita collocatae, ut duae extremae gravitate aequali praeditae sint, & quaeque duae hinc inde pari numero ab extremis computatae aequales item sint, earumque puncta suspensionis aequaliter distita à suspensione extremarum; si ipsa peripheria bifariam secetur, & ex puncto bisectionis solo sustineatur, pendeatque liberè, ipsa manebit in positione priore, ac proinde ex illis omnibus composita magnitudo in situ priore perseverabit.

Hæc etiam propositio non tam latè patet quàm quæ illi quinta respondet in libro primo æquiponderantium ab Archimede scripto.

PROPOSITIO XVIII.

Magnitudines gravitate commensurabiles sibi æquiponderant, si noto modo pendeant in distantis quæ reciprocè se habeant ut ipsæ magnitudines. Vel, magnitudines gravitate commensurabiles æquiponderabunt, si fuerint constitutæ in distantis subtendenti-
bus angulos in ratione gravitatum subcontrariè sumptos.

Sint (Fig. 88.) gravitate commensurabiles a, b , sitque earum maior a ; sit præterea $e d$ peripheria semicirculo minor, & mundo concentrica, sitque sicut a magnitudo ad magnitudinem b , ita arcus $d c$ ad arcum $c e$. Ostendendum itaque est si magnitudo a vel alia illi in gravitate æqualis noto modo alligetur & liberè pendeat ex e ; magnitudo verò b vel alia illi in gravitate æqualis similiter pendeat ex d ; libræque ex solo puncto c sustineatur suspensa; committi æquilibrium, & ipsas magnitudines a & b , vel illis in gravitate æquales ita suspensas, æquiponderare sibi inuicem.

Quoniam itaque sicut magnitudo a ad b magnitudinem, ita arcus $d c$ ad $c e$; magnitudo verò a est ipsi b commensurabilis; arcus $d c$ est ipsi $c e$ commensurabilis; quare arcuum $c e, c d$ erit quædam communis mensura; ea verò sit n . Fiant arcus $d g, d u$ singuli æquales arcui $c e$; ipsi autem $d c$ esto $e l$ æqualis.

Quoniam igitur ex arcu $c d$ maiori abscissus est $d g$ æqualis minori $c e$; si residuo $c g$ addantur æquales $e c, g d$, compositi arcus $c d, g e$ erunt æquales; sed arcus $l e$ est æqualis ex constructione arcui $c d$: ergo arcus $l e, e g$ sunt æquales; & $l g$ est duplus ipsius $d c$, sicuti & $g u$ est ex constructione duplus ipsius $c e$; quare arcus n , utrumque $l g, g u$ metietur; cum eorum medietates metiatur.

Rursus quoniam sicut magnitudo a ad b , ita arcus $d c$ ad $c e$; sicut autem $d c$ ad $c e$, sic $l g$ ad $g u$ (nam uterque utriusque duplus existit) igitur sicut magnitudo a ad b , ita arcus $l g$ ad $g u$. Quotuplex autem est arcus $l g$ ipsius n , eo sit numero multiplex magnitudo a magnitudinis f :

erit ergo sicut arcus lg ad n , ita magnitudo a ad f : est autem sicut arcus u g ad lg , ita magnitudo b ad a : ex æquo igitur sicut arcus u g ad arcum n , ita est magnitudo b ad magnitudinem f : tam multiplex igitur est arcus u g arcus n ; quam multiplex est magnitudo b magnitudinis f ; sed & ipsam quoque magnitudinem a esse multiplicem magnitudinis f supra ostensum est; quare magnitudo f erit magnitudinum a & b communis mensura.

Diuiso igitur arcu lg in peripherias æquales ipsi n ; quoniam arcui c e æqualis est ex constructione arcus du , & arcui c d æqualem esse arcum e l ostensum est; arcus lc , cu erunt æquales: tot ergo erunt peripheriæ portiones in arcu lc , quot in arcu cu ; & tot in arcu c e quot in arcu du ; & tot in arcu le quot in arcu eg , cum ostensum sit rectas lc , eg esse æquales.

Quapropter si unicuique partium arcus lg apponatur magnitudo æqualis ipsi f , quæ punctum suspensionis noto modo factæ habeat in medio portionis peripheriæ, composita ex omnibus magnitudinibus erit æqualis magnitudini a ; punctum verò e erit per præcedentem illud ex quo peripheria lg dictas magnitudines connectens, suspensa liberèque pendens manebit vt iacet cum ipsis magnitudinibus: nam omnia puncta suspensionis numero paria sunt, cum ipsa lc ipsi eg æqualis sit. Similiter si unicuique partium arcus u g apponatur magnitudo æqualis ipsi f , habeatque punctum suspensionis in medio ipsius partis, composita ex omnibus magnitudinibus erit æqualis magnitudini b : punctum verò d erit per præcedentem illud ex quo peripheria u g quæ dictas magnitudines sustinet, suspensa liberèque pendens manebit vt iacet, cum ipsis magnitudinibus. Magnitudo igitur a vel illi æqualis in grauitate, liberè pendet ex c ; & magnitudo b vel illi æqualis in grauitate, pendet liberè ex d .

Rursus cum magnitudines inter se æquales in peripheria lu ita sint collocatæ, vt puncta ex quibus liberè pendent, inter se æqualiter distent iuxta præscriptum præcedentis propositionis, & cum sint numero pares; si tota peripheria lu omnes illas magnitudines sustineat & suspendatur ex puncto medio c ; ipsa manebit vt iacet, cum suis magnitudinibus, per præcedentem. Sunt enim lc , cu æquales; cum le sit æqualis ipsi cd , & ipsa ec ipsi du : ergo tota lc est æqualis toti cu .

Intelligatur intra peripheriam lu alia posita prorsus ipsi congruens, & ex vnico puncto alterius, quod ipsi e congruit, suspendi tota peripheria lg , diuisa in g à peripheriâ gu quæ vt iam diximus manebit, vt iacet, suspensa. Similiter ex puncto vnico eiusdem peripheriæ priori superadiiecta, quod ipsi d congruit, intelligatur suspendi tota peripheria gu non amplius coharens peripheriæ lg ; manebit, vt diximus, suspensa in eodem situ, in quo erat ante diuisionem. Si igitur tota peripheria superadiiecta suspendatur ex vnico puncto, quod ipsi c congruit, manebit in eodem situ, in quo prior lu , antequam in g diuideretur; & omnes magni-

tudines sustinebit ex punctis e, d suspensas, quarum illa, quæ ex e pendet, est æqualis in gravitate ipsi a; illa verò, quæ ex d pendet, est æqualis ipsi b: quapropter idem æquilibrium eveniet si graue a ex puncto e, & graue b ex puncto d pendere intelligatur: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

IDipsum ostendendum est etiam si magnitudines non sint gravitate commensurabiles.

Sint (Fig. 89.) gravitate incommensurabiles magnitudines a h b & c; præterea d f peripheria semicirculo minor, & mundo concentrica ita in e sit secta, vt sicut e d ad e f, ita sit magnitudo a h b ad magnitudinem c. Ostendendum itaque est si magnitudo a h b suspendatur noto modo ex f, magnitudo verò c ex d similiter pendeat; libræque ex solo puncto e teneatur suspensa, committi æquilibrium, & ipsas æquiponderare sibi inuicem magnitudines. Si enim non æquiponderant ad earum alterutram inclinatio libræ fiet: ea sit a h b; poterit ergo ex magnitudine a h b auferi magnitudo quædam b, ita vt reliquum a h sit commensuratum ipsi c, & adhuc præponderans ipsi c (hoc enim fieri potest vt mox ostendemus.) Atqui istud est absurdum; nam si vt magnitudo c ad magnitudinem a h, ita fiat arcus e f ad arcum e g; quoniam vt a h magnitudo ad c, ita est arcus e g ad e f; & vt arcus e f ad e d, ita est magnitudo c ad a h b: ergo ex æquo vt magnitudo a h ad a h b magnitudinem, ita arcus e g ad arcum e d: sed magnitudo a h est minor magnitudine a h b; ergo arcus e g est minor arcu ed. Præterea quoniam a h & c sunt commensurabiles, & vt a h ad c, ita est g e ad e f; sic suspendatur noto modo ex g, & a h ex f, fiet æquilibrium per præcedentem, libræ ex e suspensæ; ergo si libræ ex e suspensæ cæterisque in eodem statu permanentibus, magnitudo c intelligatur pendere ex d, cum e d ostensa sit esse longitudo maior quàm e g, inclinatio fiet ad d: nam si duo graua sibi æquiponderent, & eorum vnum ex longiori intervallo pendere intelligatur, inclinatio fiet ad illud quod longius semiotum fuit vt ex terminis est euident. Hoc autem fieri nequit, cum aliunde ponamus inclinationem fieri ad f, pendentibus c & a h ex d & f punctis, & libra ex e suspensæ; ergo magnitudines a h b & c ex f & d suspensæ sibi æquiponderant inuicem, quod erat ostendendum.

Quod autem ex magnitudine a h b possit auferri magnitudo quædam b, ita vt reliquum a h sit commensurabile ipsi c, & adhuc ipsi c præponderans, ita ostenditur. Quoniam magnitudo a h b præponderat magnitudini c, poterit ex a h b auferri quædam magnitudo ita vt residua æquiponderet ipsi c: ablata ergo sit h b, residuæque a ex f pendens æquiponderet ipsi c. Præterea potest sumi aliqua magnitudo minor ipsa h b, quæ sit pars magnitudinis c, & quæ toties sibi ipsi coaceruetur vt constetur magnitudo a h maior quidem magnitudine a, minor verò magnitudine a h b.

h b. Eiusmodi magnitudo sit i; istud autem posse fieri constat ex iis quæ Commandinus demonstrat ad decimam sextam quadraturæ parabolæ, & ad sextam de spiralibus. Quoniam ergo magnitudo a æquiponderat ipsi c; & magnitudini a adiecta est magnitudo h; ipsa a h præponderabit magnitudini c; & erit ipsi c commensurabilis, quod ostendendum erat esse possibile. Hoc ita demonstrato incidimus longo post tempore in exercitationem sextam R. P. Caualerij, vbi propositione 34. summo opere miratur aliud non omnino dissimile isti, quod & demonstrat, nempe *ex maiori duarum incommensurabilium magnitudinum quarumlibet posse ita auferri aliquam ipsi commensurabilem, vt residuum sit minus quacunque data.* Vnde in scholio eiusdem propositionis in hæc verba admirabundus prorumpit. *Hæc sunt Geometria admiranda, quæ etsi in infiniti abditis recessibus lateant, eiusdem tamen vim & efficaciam non effugiunt.* Plura posterius in propositione 28. 29. 30. 31. videbis quæ & paradoxa iudicentur & admirabilitatem suam deriuent ex iisdem illis infinitionis & innumerabilitatis penetralibus: vnde quoque prodierunt quæ in trigesima secunda sexti superioris libri habentur.

SCHOLIUM.

In vulgatis Græcè & Latine codicibus æquiponderantium Archimedis mutila est demonstratio quæ precedenti respondet, nec eam Eutocij commentarij restituunt: in iisdem autem codicibus mancum quoque illud est, Ostendendū itaque est magnitudinis ex vtriusque a ex b compositæ grauitatis centrū esse c punctum. Pro quo reponi debent hæc. Ostendendū itaque est si magnitudinis a centrum grauitatis ponatur in e, & magnitudinis b centrum grauitatis constituatur in d, magnitudinis ex vtriusque a & b compositæ centrum grauitatis esse c punctum. simile quid addi debet illi, quæ præsentī propositioni respondet.

Cæterum duæ istæ propositiones nostræ non tam amplæ sunt quàm Archimedæ illæ, quibus probatur non tantum magnitudines ita suspensas inuicem æquiponderare; sed etiam punctum à quo libra suspensa tenetur esse grauitatis centrum compositæ ex vtraque magnitudinis; quod nostræ propositiones non demonstrant, quia nec posse in vniuersum demonstrari positis libræ curæ principiis ostendimus propositione vigesima tertia.

PROPOSITIO XX.

Paulò aliter demonstrantur duæ propositiones præcedentes.

Sit (Fig. 90.) a c recta vel circuli peripheria secta in equalia in b, & in inæqualia in d; sit verò d c bifariam secta in e, factæque sint b d, a f equalles, & f b secta bifariam in g. Dico vt b e ad b g, ita esse a d ad d c; & segmenta a g, g d esse equalia.

Quoniam b d, a f sunt equalles, erunt residue f b, d c equalles; ergo d e erit semissis rectæ vel peripheriæ f b: sed b d est semissis duarum a f, b d: ergo composita b e ex b d, d e, erit semissis compositæ a d ex tribus a f,

R r

fb, bd : ergo ut ad ad dc , ita be semissis rectæ, vel peripheriæ ad ad ec semissem rectæ vel peripheriæ dc ; cum ergo bf diuisa sit bifariam in g , erunt gb, de æquales; ergo addita communi bd erunt gd, be æquales. Et quoniam af, bd sunt æquales, item fg, gb , erunt ag, gd æquales; tres ergo ag, gd, be sunt æquales: ergo ut be ad ec seu ad bg , ita ad ad dc .

Quod si datis gb minori, & be maiori, ex be producta auferantur ec , ed ipsi gb æquales, fiantque gd, ga æquales: dico ac sectam esse bifariam in b , & ut be ad bg , ita esse ad ad dc .

Quoniam enim gd, ga sunt æquales, & gd, be sunt etiam æquales (nam æqualibus gb, de addita est communis bd) erunt ga, be æquales, additisque æqualibus gb, ec , erunt compositæ ab, bc æquales. Fiant de, gf æquales; quoniam ge, ba sunt æquales, ut ostensum est, & ablata de, gf sunt etiam æquales; ergo residuæ af, bd erunt etiam æquales. Cum ergo recta vel peripheria ac secta sit bifariam in b , & bd, af sint æquales, ipsaque fb secta bifariam in g ; erit ex modo demonstratis ut be ad bg , ita ad ad dc .

His ita demonstratis data sit libra g ex b pendens, data item sint pondera h & i habentia inuicem rationem brachiorum gb, be . Dico si ex punctis g & e intelligantur pendere pondera æqualia ipsis h & i , libram in æquilibrio constitutam.

Intelligatur per lineam vel peripheriam ac dispensari æqua ratione grauitas æqualis ambabus h & i , ita ut mente concipiatur esse intra lineam ac grauitate carentem, alia grauitatis linea; manifestum est grauitatem ac sectam fore ita in d , ut sicut recta vel peripheria be ad bg , ita sit grauitas ad ad grauitatem dc : sed ut be ad bg , ita est grauitas hi ad grauitatem i : ergo ut grauitas ad ad grauitatem dc , ita est grauitas hi ad grauitatem i : ergo componendo ut grauitas ac ad grauitatem dc , ita est grauitas hi ad grauitatem i : sed grauitas ac & grauitas hi ponuntur æquales: ergo grauitas dc & grauitas i sunt æquales: ergo & grauitas ad est æqualis grauitati h .

Quoniam ergo grauitas ac diuiditur in punctis g, b, d, e eadem proportionem qua recta ac est diuisa in iisdem punctis; Manifestum est diuisam esse bifariam in b grauitatem ac ; & in g grauitatem ad , & in e grauitatem dc . Rursus quoniam grauitates ac, ad, dc sectæ sunt bifariam in punctis b, g, e ; manifestum est grauitatem ac , si tota ex solo puncto b suspendatur, mansuram ut iacet, siquidem recta ac sit parallela horizonti: istud enim assumitur tanquam per se notum, & perinde est euidentius aliud ab Archimede assumptum, si æqualia pondera ex æqualibus longitudinibus libræ suspendatur, ipsam, siquidem parallela fuerit horizonti, in eodem situ permansuram. Similiter manifestum est grauitatem ad , si tota ex solo puncto g suspendatur, mansuram ut iacet; similiterque grauitatem dc si tota ex solo puncto e suspendatur, permansuram ut iacet.

Si ergo intelligatur linea ac grauitate carere apta tamen esse sustinendis ponderibus, & esse horizonti parallela, atque ex eius puncto g solo suspendatur tota grauitas ad non amplius vnita grauitati d c (nihil enim vetat quin istud facillè intelligi possit) & ipsa grauitas d c ex eiusdem lineæ a c puncto e tota pendeat; tota autem linea a c sustinens illa onera suspendatur ex puncto b solo, manifestum est totam grauitatem a c suspensam fore ex puncto b solo; & permanfuram vt iacet, quia suspensa fuerit ex puncto medio b; ostensum enim est grauitates ad, d c non mutatum ire positionem quam habebant ante solutionem connexionis in d. Ergo libra g d suspensa ex b manet in æquilibrio sustinens ex g puncto grauitatem ad ipsi h æqualem; & ex puncto e grauitatem d c ipsi i æqualem; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hæc demonstratio non nititur nisi primis principiis libræ vt manifestum est, nullamque mentionem facit centri grauitatis.

PROPOSITIO XXI.

SI grauia lineis ad centrum coëuntibus pendere ponantur, & in libræ curuæ distantis diuersis iuxta demonstratas leges constituta æquiponderare sibi inuicem; poterit accidere vt longè diuersa sit proportio brachiorum libræ curuæ à proportionem brachiorum rectæ.

Sit (Fig. 91.) libra curua cbd suspensa ex b; ex c & d noto modo pendeant magnitudines c, d, æquiponderentque sibi inuicem: erit ergo magnitudo c ad d, vt arcus bd ad arcum bc, suppositis principiis ex quibus tres priores propositiones demonstrauius. Educæ sint ad centrum a rectæ ca, ad, quibus productis occurrat in e & f rectæ ebf transgens in b. Si libra recta ponatur ebf, & ex punctis e & f per rectas ec, fd pendere grauia c & d, ac proinde æquilibrium committi, cum angulus eab sit ad angulum fab vt graue d ad graue c; dico posse euenire vt proportio rectæ eb ad rectam bf longè alia sit à proportionem grauis d ad graue c.

Ponamus enim arcum bd esse æqualem semissi arcus bc, seu angulum baf esse æqualem semissi anguli eab; fiatque angulus baf æqualis angulo baf; quoniam triangula abh, abf sunt æquiangula, habentque latus ba commune, erunt & æquilatera, latusque bh erit æquale lateri bf, & latus ah lateri af. Rursus quoniam in triangulo ba e angulus eba est rectus, reliqui duo simul ipsi erunt æquales, ac proinde singuli erunt ipso eba minores; ergo latus ae oppositum angulo maiori erit maius latere ab quod minori subtenditur. Præterea quoniam trianguli abe angulus ba e secus est bifariam per rectam ah, erit per 3. sexti Euclidis vt ea recta ad ab, ita eh recta ad rectam hb: sed ea est maior recta ba

R r 2

ergo eh est maior recta hb . Quoniam ergo arcus cg , gb sunt æquales, & recta eh est maior recta hb , proportio rectæ eh ad hb erit maior proportionem arcus cg ad gb per 10. quinti Euclidis: ergo componendo proportio rectæ eb ad hb siue ad bf ipsi æqualem, erit per 28. quinti Euclidis, maior proportio arcus cb ad arcum gb seu ad bd ipsi æqualem, hoc est proportio anguli cab ad angulum baf .

Cum igitur proportio rectæ eb ad bf eò sit maior quò maior est proportio rectæ eh ad hb : & proportio rectæ eh ad hb sit eadem, vt ostensum fuit, cum proportione rectæ ea ad ab : quo maior erit excessus, quo recta ea superat rectam ab , eo maior erit proportio rectæ eb ad bf : sed excessus rectæ ea ad ab potest esse quantuscunque, ergo proportio rectæ eb ad rectam bf potest esse longè diuersa à proportione anguli eab ad angulum baf ; hoc est à proportione peripheriæ eb ad peripheriam bd ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum est cum quadratura illa paraboles & aliorum, quæ fit per libram, pendeat ex illa propositione *grauia inæqualia vtrique pendentia tunc æquiponderare cum reciproce se habuerint vt brachia libræ*: & cum si grauia ponantur vergere ad idem centrum, eiusmodi propositio non sit vera; Archimedæ libræ nequaquam congruere eiusmodi hypothese.

COROLLARIUM II.

Manifestum præterea est libras quas vulgò *Romanas* appellamus esse omnes fallaces, si ad mathematica momenta exigantur: earum enim diuisiones nituntur illa propositione *grauia inæqualia vtrique pendentia tunc æquiponderare cum reciproce se habuerint vt brachia libræ*. Error tamen nullus sensu percipitur, eò quod in tantâ à centro mundi distantia linea recta ef sensu distingui non possit ab arcu cbd illi respondente. Quod si eiusmodi libra vicina fieret centro mundi, dubio procul deprehenderetur eius fallacia non sine admiratione Artificum, quibus istud videbitur prorsus paradoxum.

PROPOSITIO XXII.

SIt (*Fig. 92.*) circulus acd ex centro e descriptus, cuius peripheria ducta sit per d centrum mundi; sit item magnitudo fg composita vt in decima septima dictum fuit, & connexa arcu fhg qui sit portio circuli habentis diametrum æqualem diametro circuli acd ; atque vt magnitudo g ad f , ita sit fh arcus ad hg arcum. Si peripheria fg sustentans magnitudines f & g ponatur congruere peripheriæ acd in quacunque positione; (modò tamen ille situs non impediatur quo minus magnitudo ex f & g composita mox suspendenda, ex vno puncto pendeat tota iuxta cautionem primi postu-

lati) ex puncto autem quod ipsi h congruet suspendatur & liberè pendeat.

Ostendendum est ipsam peripheriam mansuram in priori situ, hoc est, concentricam circulo $a c d$; ac proinde magnitudinem compositam in eadem positione perseveraturam.

Puncta itaque f, h, g congruant punctis a, c, b , & ducantur rectæ $a d, c d, b d$ per centrum mundi d , ex quo per a ducatur circuli portio $a i l$ occurrēns rectis $d c, d b$ in i & l .

Quoniam anguli $a d c, c d b$ insistant arcibus $a c, c b$: habebunt se ut peripheriæ $a c, c b$ quibus insistant per 33. primi Euc. sed arcus etiam $a i, i l$ habent se ut anguli $a d i, i d l$ ipsis insistentes ad centrum d : ergo ut $a c$ ad $c b$, ita est $a i$ ad $i l$: sed ut $a c$ ad $c b$, ita est graue b ad graue a : ergo ut arcus $a i$ ad arcum $i l$, ita est graue b ad graue a . Si ergo peripheria $a i l$ mundo concentrica ponatur esse libra ex i suspensa liberèque pendens; ex punctis verò a & l sustinere magnitudines a & b liberè etiam pendentes per lineas ad centrum mundi vergentes, cum $l b$ vergat ad centrum, & cum magnitudines se habeant reciprocè ut latera, æquiponderabunt sibi inuicem per 19. vel 20. propositionem; assumimus enim eandem magnitudinem si per eandem lineam ad centrum ductam pendeat ex eodem libræ puncto, eiusdem esse ponderis siue sit remotior, siue vicinior centro; hoc inquam assumimus inter postulata quicquid sit de quæstione physica, quam passim negligunt ij qui non putant aurum in summa turri eadem lance eodemque modo appensum, esse magis vel minus graue, nisi fortasse per accidens, quàm si appendatur in ima turri: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Manifestum hinc est si grauitatis centrum non absolutè sed secundum aliquem respectum dicatur, magnitudinem compositam $f g$ habere centrum grauitis h ; non quidem pro quocunque situ absolutè, sed pro situ omni quem in circulo $a b d$ peripheria $f h g$ modo supra explicato collocata potest habere. Appellatur autem grauitatis quodammodo centrum, ut distinguatur à grauitis centro simpliciter: linea autem $d c i$ appelletur perpendiculum magnitudinis $a b$ vel $f g$ compositæ.

COROLLARIUM II.

Manifestum quoque inde est si manente centro mundi d , magnitudo $a b$ pendens de peripheria $c b d$ ex solo sui puncto c , per arcum $c b a$ sinatur sponte ferri ad centrum d , partes a, b permansuras in eadem peripheria durante illo motu lationis curuo; & æquilibrium quod partes a, b suspensæ ex c semel committunt, permansurum esse; nec non continuam fore mutationem perpendiculorum ex c in d .

R 3

IN compositâ magnitudine de qua præcedens propositio agit (Fig. 93.) non datur centrum grauitatis simpliciter.

Sit composita magnitudo fg suspensa ex punctis f, g connexis per arcum fhg circuli cuius centrum e : item per arcum $fecg$ circuli cuius centrum b : atque ut magnitudo f ad g , ita sit arcus g h ad arcum h f , & ita etiam sit arcus g e ad c f . Si ergo in perimetro circuli cuius centrum e intelligatur esse centrum mundi, (hoc enim fieri potest manente centro eodem mundi, si magnitudo fg , & arcus fhg situm illum concipiantur acquirere in quo circuli $hflg$ aliquod peripheriæ punctum congruat centro:) perpendicularum magnitudinis fg transibit per h centrum quodammodo grauitatis, sicut in præcedenti ostendimus: similiter si per alium magnitudinis fg situm, in perimetro circuli $ecfg$ ex centro b descripti intelligatur esse idem centrum mundi, perpendicularum magnitudinis fg transibit per c centrum quodammodo grauitatis. Puncta c & h connectantur rectâ ch occurrente circularum peripheriæ in i & l . In arcu f i g extra puncta f, i, g ponatur esse a centrum mundi, vel quod idem est circulus c a i g deferens magnitudinem f a ponatur habere punctum a in centro mundi, & iungatur a c perpendicularum magnitudinis ita collocatæ; in arcu autem flg extra puncta f, l, g ponatur secundum alium magnitudinis fg situm esse centrum mundi d , & iungatur d h perpendicularum magnitudinis ita collocatæ. Dico perpendicularum a c non transire per punctum h , ac proinde cum per punctum h transeant infinita perpendiculara pro infinitâ positionum varietate quam centrum mundi potest habere in arcu flg sicuti sub finem superioris monstrauius; & cum centrum grauitatis absolutum sit illud per quod transeunt omnia omnino perpendiculara (vnde fit ut ad inueniendum illud, posito quod detur, satis sit inuenisse communem sectionem duorum perpendicularorum) si magnitudo fg haberet centrum grauitatis, illud foret h in quo cœunt tot perpendiculara: ergo si ostendamus perpendicularum a c non transire per h ostenderimus magnitudinem fg carere centro grauitatis perfecto.

Quoniam ergo per puncta c & h transit recta ch , & recta a c secat rectam ch in c , non secabit illam in alio puncto; duæ enim rectæ lineæ nec habent idem commune segmentum, nec spatium comprehendunt ex axiomatibus 13. & 12. primi Euclidis: ergo perpendicularum a c non transit per h : ergo licet per h transeant plura perpendiculara, non tamen omnia: ergo h non est centrum grauitatis: magnitudo igitur fg caret centro grauitatis absolute dicto; quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Ex his manifestum est, si grauia f & g sint inæqualia, & magnitudo fg feratur ad centrum d , in illa latione punctum h non esse semper in per-

pendiculo hd . Recta enim fg secet perpendicularum hd in m ; ergo si id ita foret, puncta f , g caderent per rectas fo , gp parallelas perpendicularo hd : ergo completo parallelogrammo $fopg$, cum punctum f congrueret puncto o , & punctum g puncto p , rectaque fg rectæ op , & punctum m puncto q posito inter d & h , si iungerentur rectæ od , dp , sequeretur ut est arcus fh ad arcum hg , vel ut angulus fdh ad angulum hdg , ita perpetuò fore angulum odq ad angulum qdp ; istud enim necesse est ut magnitudines op connexæ maneant in perpendicularo od . Id verò ita aperte est falsum, quando magnitudines f , g sunt inæquales, ut impugnatione non egeat.

COROLLARIUM II.

Manifestum insuper est cum graua f , & g in constructione ponantur sponte & semper pendere ex punctis f & g arcus fgh , vel fcg deferentis, theorema præsens non cogere ubi non assignabuntur duæ partes aliquius magnitudinis sponte & constanter pendentes singulæ ex suo vnico puncto peripheriæ deferentis: Quapropter theorema non esse generale nisi pro magnitudinibus simili modo compositis.

PROPOSITIO XXIV.

Soluuntur primæ tres dubitationes, quæ in propositione duodecima extant.

I. Magna dubitationum pars vim facit, quasi Archimedes pronuntiet id esse absolutè, quod nihil refert de facto ita sit necne; dummodo quod ex hypothesi ipsius consequi demonstrandum proponitur, rectè sequatur. Non ait graua ferri deorsum per lineas parallelas, sed ex hypothesi quod graua ferantur deorsum lineis ad planum horizontem perpendicularibus, postulat ut inuicem æquiponderent, quoties ipsa æqualia erunt, & æqualibus interuallis ex rectâ pendebunt librâ. Similiter neque absolutè asserit planas figuras esse graues, sed si graues esse ponantur & æquales in grauitate, eas dum ex æqualibus interuallis per lineas parallelas pendent, æquiponderare sibi inuicem, tanquam concessum assumit. Dum Mathematicus in figurâ quam pulueri inscripsit, lineam, quæ re ipsa pedalis non est, pedalem esse ponit; nec ipse errat, nec auditorem fallit; quia videlicet omnes intelligunt non esse æstimandam veritatem aut falsitatem eiusmodi propositionum *conditionalium* ex veritate vel falsitate antecedentis; sed connexionis, quâ consequens adhærere dicitur eiusmodi antecedenti sub conditione affirmato. Istam doctrinam optimè expressit Aristoteles multis locis, sed præcipuè l. 13. met. cap. 3. summâ 1. ubi postquam dixit mathematicas disciplinas contemplari obiectum suum nempe ποσότητι, quam Scholæ reddunt *quantitatem*, ut separatam ab iis quæ ipsi accidunt, & per quæ sensilis fit, scilicet ab albedine, frigore, duritie &c. subdit: *quapropter si quis ponat hæc ab accedentibus eiusmodi separata, ac de iis aliquid quatenus talia sunt, consideret, nulli propterea errori*

obnoxius erit, quemadmodum nec si in terrâ figuram describat, & eam quæ pedalis linea non est, pedalem esse dicat; neque enim in propositionibus istis mendacium falsumve inest. Vbi per propositiones intelligit illas quæ conditionali particulâ afficiuntur: ut si sol lucet; si superficies est grauis, si linea non est grauis &c.

II. Eiusmodi hypotheses nemo est qui reprehendat, quando sunt de re quæ licet non existat, existere tamen potest; verissimumque tunc est quod docet Aristoteles lib. 1. poster. cap. 10. Geometram non assumere falsa; quia licet, exempli causa, graue quo in figura sua utitur non sit cuiusmodi esse ponitur; quod tamen demonstratur, non debet intelligi nisi de illo alio graui per istud significato. Quando autem hypothesis est de re impossibili, norunt Philosophi & maximè Theologi adhuc illam esse posse utilem ad veritatis indagationem, quoties nimirum id, ex quo res fit impossibilis, non pertinet *formaliter*, sed *materialiter* tantum ad proprietatem quæ demonstratur: hanc enim distinctionem tradit Aristoteles libri 13. loco citato, ubi asserit aliquid *obiecto* scientiæ competere vel *formaliter* ἐντελεχείᾳ, vel *materialiter* ὑλικῶς; ab eoque quod *materialiter* inest, posse *obiectum* separari absque vllius erroris periculo.

III. Sicut apertum est eum qui demonstrauit tetragonismum circuli aurei, demonstrasse etiam tetragonismum circuli argentei vel cuiuscunque alterius speciei physicæ; quamuis demonstratio processerit per proprietates quæ soli auro attribuuntur: quia videlicet has proprietates auro conuenire & non argento, nequit esse radix vllius diuersitatis in proportionem diametri ad perimetrum cuiuscunque circuli: ita pariter manifestum est quadrationem circuli inuentam per proprietates libræ rectæ, grauiumque lineis parallelis ab ea pendentium, esse communem omnibus circulis, siue superficies eorum sint graues, siue non; & si sint graues, siue ferantur deorsum lineis parallelis, siue coeuntibus: ista enim omnia *materialiter* inesse censi debent quantum attinet ad inducendum discrimen vllum in proportionem diametri ad perimetrum, vel quadrati quod potest diameter ad aream circularem. Ex his facile erit respondere ad singula ex tribus quæ opposita fuerunt.

IV. Ad primum respondemus Archimedis instituto satis esse, quod figuræ planæ graues esse possint, siue illa grauitas sit illis naturalis, siue extraordinariè ab Authore naturæ indita: Imò quamuis superficies grauis esset impossibilis; quia tamen illa impossibilitas non immutaret proportionem diametri ad perimetrum circuli, absque vlllo syllogismi vitio posset ex hypothesi superficiei grauis demonstrari eiusmodi proportio. Summa igitur responsionis est Archimedes demonstrare quadrationem suspensæ figuræ ex grauitate figuræ planæ, non quidem re ipsa existentis, sed quæ existere possit, vel saltem quæ si existeret nihil noceret conclusioni illatæ.

V. Ad secundum verò eadem datur solutio, nimirum Archimedes argumentari non ex eo quod de facto sit; sed ex eo quod possibile sit, vel quod

quod si possibile ponatur nullum trahat absurdum, quantum attinet ad rectè concludendi modum. Ad illud autem quod quæritur cur Archimedes non assumpserit graua ferri lineis sibi inuicem coincidentibus ad centrum mundi, manifesta est responsio ex corollariis propositionis vigesimæ tertiæ. Ibi enim ostendimus libræ rectæ brachia non esse reciprocè in ratione grauium pendentium si lineæ quibus pendent tendant ad idem punctum; & tamen illa proportionem reciproca nititur demonstratio Archimedei tetragonismi: oportuisset igitur assumere libræ brachia esse curua, & ita principium demonstrationis istius præcipuum quod habetur propositione 5. quadraturæ paraboles, inutile redditum fuisset; nec illi simile aliud in curuis occurrisset.

VI. Ad tertium primò quicquid sit an de facto linea sit grauis, posse tamen absque vlla absurditatis vmbra hypothesim fieri, iuxta quam illæ lineæ quæ assumuntur ad sustinenda graua ex libra pendentia careant grauitate; id enim fieri posse apertum est, vel quia de facto illa carent, vel quia, si quam habent, potest ea à Deo contraria qualitate vel alia ratione suspendi. Siue igitur lineæ, quæ in plano graui ponuntur, graues esse debeant, siue non; certum est posse assumi eas lineas, quæ non funguntur nisi vice vinculi sustinentis graue aliquod, carere grauitate. Secundò respondemus quantum ad id spectat, quod graue ponitur eiusdem esse ponderis siue collocatum fuerit in extremo libræ puncto, siue in perpendicularis ab illo liberè pendentis extremo, potuisse ab Archimede id assumi tanquam alibi demonstratum. Iordanus certè q. 4. opusculi de ponderositate editionis Venetæ 1565. tradit principium quod omni libræ rectæ applicari valet, quamuis ab ipso nisi vitio librarij id factum sit, non applicetur nisi ad libram cuius brachia fuerint æqualia. Illud autem principium tradetur in sequenti propositione: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO. XXV.

VII. **S**i recta linea moueatur in plano ad horizontem recto, ita ut ad ipsum perpendicularis maneat, & eius extremum punctum per circuli peripheriam incedat, incedet quoque extremorum alterum per circuli priori æqualis peripheriam similiter positam.

Sit (Fig. 94.) peripheria circuli b g d in plano a b d ad horizontem recto; sit in eodem plano recta b f perpendicularis ad illum, & eius extremum b intelligatur ita moueri per peripheriam b g d, ut maneat perpendicularis ad eundem horizontem. Dico alterum extremum f incedere per circuli priori æqualis peripheriam similiter positam.

Centrum peripheriæ b g d sit a, & per a ducta sit a l parallela horizonti. Item per a ducta sit a i perpendicularis ad horizontem, & æqualis rectæ b f: ex centro i descripta sit peripheria f h e interuallo rectæ i e ipsa a d æqualis; per i acta sit i f ipsa a l parallela. Dico extremum f incedere

S f

per arcum fe. Ponatur enim in sui motus cursu punctum b congruere puncto g, & per g agatur l g u h æquidistans rectæ a e occurrens lineis a l, i u, e f in punctis l, u, h; quoniam a l u i est parallelogrammum, erunt a l, u i æquales; ergo l g, u h sunt æquales; cum ergo l g, u h sint æquales, addita cõmuni g u, vel eadem ablata, erunt l u, g h æquales: sed l u, a i, opposita parallelogrammi latera sunt æqualia; ergo rectæ a i, g h sunt æquales; ergo cum b f sit ipsi a i æqualis, erit quoque ipsi g h æqualis: ergo quando punctum b congruet puncto g, punctum f incidet in punctum h; quod erat demonstrandum. Idem demonstraretur si b g d esset quævis alia linea, nimirum lineam f h e esse ipsi b g d æqualem & similiter positam, vt ex vi demonstrationis apertum est.

Iam intelligatur libra b c suspensa ex a, cuius brachium a b describat motu suo peripheriam b g d: sit pondus quodlibet n. Dico siue ponderis n centrum grauitatis congruat puncto b, siue congruat puncto f extremo perpendicularis b f, ipsum pondus n ferri per lineam eodem modo declinantem à perpendiculari. Quoniam enim siue sit in b, siue in f, semper describit motu suo peripherias circuli æquales, & similiter positas, prout ostensum fuit; ergo si b f producat ad m, & g h ad o, angulis f b g, h g d æquales erunt anguli m f h, o h e. Quoniam igitur anguli f b g, m f h sunt æquales, & quando idem pondus fertur per angulos æquæ obliquos æqualis est velocitatis, ac proinde æque premit deorsum punctum libræ à quo pendet: pondus n siue sit in puncto b, siue in puncto f, æquæ premet libram; saltem ratione viæ magis vel minus obliquæ non erit magis vel minus graue. Hoc autem demonstrato non apparet ex quo capite fingi possit non esse æque graue in puncto b, atque in puncto f. Nam pondus in summâ turri non minus vel magis premit humeros, quàm in imâ; & quamuis minùs vel magis premeret ratione præcisè maioris vel minoris altitudinis, potuisset Archimedes hypothesim illam assumere quâ grauia non fiant magis vel minùs grauia, ex eo tantum quod editiore vel depresso sint loco constituta: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXVI.

Soluitur quartum dubium ex coaptatione figurarum petitum.

Octauum pronuntiatum Euclidis *quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia*, ita perspicuum est, vt nihil clarius & euidentius in hoc scientiarum genere nobis appareat; vnde mirati sumus cum apud Caualerium in exercitationis tertiæ capite vndecimo vidimus istum demonstrandi modum non probari quibusdam Geometriæ peritis, ideoque & Archimedes in hac disciplinâ facillè principem, nonnihil notari quod cum adhibuerit in demonstratione vigesimæ propositionis libri de conoidibus & sphæroidibus; ita enim se habent Guldini verba descripta à Caualerio. *Verùm hæc ipsa demonstratio non videtur arridere Geometris; Commentator enim Archimedis Federicus Commandinus silentio illam præterit: Rualtus Verò illam tan-*

quam Archimede indignam omittit, &que aliam à se excogitatam substituit.

Autores qui hanc Archimedis demonstrationem vitiosam pronuntiant, nominatim recensuit duos quidem Guldinus; sed quo iure ex mox dicendis planum fiet. Commandinus, fateor, silentio illam præteriiit, hoc est, nullis eam commentariis illustrauit; at inde ego infero eam ita perspicuam illi visam esse, vt per se sola sine ullius explanatione intelligi possit. Hac etenim vnica de causa eodem silentio inuoluit in libello de lineis spiraliibus propositiones 12. 14. 15. 17. 23. & de quadratura parabolæ propositiones 8. 12. 13. 23. quas omnes non arrisisse illi, nemo sapiens dixerit. Quid verò opus coniecturis vbi expressum & luculentum Commandini testimonium extat, videlicet in Euclidis primum librum ad quartam propositionem? *Hic demonstrationis modus*, inquit apud Caualerium, *qui fit per superpositionem figurarum præter quam quod approbatur à Proclo Mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui Mathematicis: Archimedes enim eum vsurpat non solum in planis figuris, vt in libro de centro grauitatis planorum, sed etiam in solidis, vt in libro de conoidibus & spheroidibus. Quod autem Archimedes agens de centro grauitatis planorum vt euidens sumpsit, id ipsum pari iure & euidentia Commandinus ad centrum grauitatis solidorum transtulit, in libro quem de hoc argumento scripsit, ita enim habet secunda eius petitio, solidis figuris similibus & equalibus inter se aptatis, centra quoque grauitatis inter se aptata erunt. Hinc in decima sexta propositione demonstrat in sphaera & spheroides idem esse grauitatis & figuræ centrum.*

Sed neque etiam Riualtus huic Commandini sententiæ de suo repugnat; etenim in scholio propositionis vigesimæ libri de conoidibus & spheroidibus iam laudati ita scribit teste Caualerio. *sunt qui superpositiones illas rejiciant in Geometria, quanquam alij & Viri graues admittant.* Cur autem ipse Riualtus aliam demonstrationem excogitare debuerit, non video nisi vt ingenij sui fecunditatem, laudando sane conatu, probaret; ipsam enim Archimedis demonstrationem, ego ipso dignissimam arbitror; cum delineationem adhibeat simplicem nec multitudine linearum offusam, & breui perspicuæque ratiocinatione rem ipsam attingat; quæ summa est laus Geometræ. Quando primum in illam propositionem incidi, timui equidem primo aspectu ne vitio aliquo Typographi diagramma appositum alteri cuidam propositioni conueniret; eo quod planissimum appareret, cum tamen inferuire deberet ad demonstrandum, *solidum spheroides plano per centrum ducto bifariam secari tum ipsum, tum ipsius superficiem*: Re tamen deinde propius inspectâ omnia Archimedis proposito quadrare admirabundus comperi; & in ista propositione verum esse mecum ipse fassus sum quicquid de eius methodo testatum reliquit Plutarchus verbis relatis in capite octauo prolegomenon; esto, id in quibusdam aliis, vt modo extant, non habeat locum, sicuti monuimus in scholio propositionis secundæ libri tertij tetragonismicorum.

Testis est Clavius in scholij propositionis decimæ sextæ tertij Eucli-

dis editione secunda, Peletarium in ea fuisse sententia ut antiquissimas Euclidis demonstrationes in propositionibus quarta & octava primi libri, atque in vigesima quarta libri tertij, rejiciendas censuerit tanquam non Geometricas, quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere nos animo oporteat; quod mechanicum. & à Geometra alienum dicere non veretur. Sed istius opinio vel hoc vno respuenda iure merito venit quod (verba sunt Clauij) *hac in re non solum Euclidem in crimen vocat, Verum etiam Archimedes quo omnium iudicio acutior in demonstrando & subtilior fuit nemo, eiusque Commentatorem grauisimum eumque doctissimum Eutocium Ascalanitam qui eodem argumentandi genere vtiuntur in equiponderantibus; imo verò & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non raro hoc argumenti genus adhibent; quod adeo verum est ut idem Clauius ibidem asseueret, si quis hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam ab eo Geometriam funditus euerti. Clauium in methode illa Euclidis defendenda sectatur eius discipulus clarissimus P. Blancanus in dissertatione de natura mathematicarum disciplinarum pag. 24.*

Mihi quidem, prout initio iam dixi, res tam plana est ut eam offendiculo esse vlli hominum posse valde mirer. Aristoteles certè libro quarto physicorum disputaturus de loci natura ponit veluti disputationis suæ fundamentum sex axiomata desumpta, ut ipse ait *ἐκ κοινῶν ἐννοίων ἐκ κοινῶν* notionibus loci, quorum tertium est, *primum locum neque maiorem, neque minorem esse eo quod in ipso continetur*, huius verò ratio ut ait Simplicius in illum locum, fol. 132. col. 2. lin. 14. non aliud peti debet quàm ex eo quod *τὰ ἐξ αὐτῶν ὄντα ἀλλήλοις καὶ μήτε ὄγκον ποιεῖν τε, μήτε ἐχόντα μεταξὺ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐστίν*, hoc est, *quæ sibi mutuò congruunt aptata, & mole carent, nihilque interpositum habent, ea sunt in eodem spatio*. Eiusmodi autem sunt duæ extimæ superficies vna corporis ambientis, altera corporis intrus comprehensi. Porro ut hoc quod Mathematicum est non omittamus occasione data: Aristoteles superficiem quamcunque etiam curuam ibi græca voce *ἐπίπεδον* vocat; eum tamen ab Euclide & aliis post ipsum ea vox non vsurpetur nisi pro planâ: fecit autem istud Aristoteles more ut Simplicius fol. 137. col. 1. lin. 17. monet, antiquorum *πᾶσαν ἐπιφανείαν ἐπίπεδον καλεῖσθαι*, eo nomine appellantium quamlibet superficiem: quare non rectè vertunt aliqui vocem illam eo loci per latinam planum.

Sed numquid re ipsâ superpositio est aliena à demonstratione verâ; quantumuis eam adhibuerint Antiquiores, & Recentiorum peritissimi, in quibus est Lucas ille Valerius, quem tanti & quidem merito omnes faciunt? Syllogismum vnum aliquem ad maiorem dicendorum euidentiam assumo.

Quæ sibi mutuò congruunt sunt æqualia; sed magnitudo A congruit magnitudini B; ergo magnitudo A æqualis est magnitudini B. Prima huius syllogismi propositio est euidentis, quantum satis est ad generandam conclusionem euidentem, nisi per secundam propositionem stet. Si ergo ista secunda quæ affir-

mat magnitudines A & B sibi congruere, non aliunde probetur quàm ex eò quod, oculi vel manùs tangentis & explorantis iudicio, magnitudines A & B sibi superimpositæ congruere deprehendantur; ea propositio non est satis euidens ad pariendam demonstrationem, rectèque ista superpositio dicitur mechanica & à Geometriâ aliena. Quòd si mentis oculo ea superpositio perfectè & euidenter quadret; nihil planè deest isti propositionum pari ad generandam scientiam veram, & Geometra dignam. Istud plane vult Clavius dum Peletario objicit quod non satis intellexerit quo pacto Geometræ superpositionem vsurpent. *Neque enim, inquit, volunt re ipsa faciendam esse superpositionem (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum ac mente, quod opus est rationis atque intellectus.* Hoc ipsum, teste etiam & approbante Guldino apud Caualerium iam allegatum, paucissimis verbis tradit Christophorus Grienbergerus ad octauum illud Euclidis pronuntiatum *qua sibi mutuo congruunt sunt equalia*; addit enim, *debere talem congruentiam constare intellectui.* Istud quoque docet Blancanus in libello *de natura Mathematicarum* cap. 3. cuius hic est titulus *Recentiorum calumnia aduersus Mathematicas diluuntur*; earum verò quinta hæc est, *quod Geometria plures habeat demonstrationes per superpositionem factas.* Huius tamen Authoris verba possent alicui non satis ad omnia attendenti persuadere ipsum falli dum negat ea quæ probanda sunt equalia, superponi à Geometris: non enim negat eam superpositionem vsurpari ab ipsis quæ fiat mente congruentiam mutuam ita superpositorum euidenter cognoscente; sed aliam quæ solo oculorum visu aut manuum attrectatione comprobetur: quod sane liquidò constat ex causa quam mox subjicit, *hæc enim, inquit, ratio nullius esset momenti, nec Geometrica, sed Physica potius*; NITERETVR enim SENSIBVS.

Cæterum ita à demonstrationibus geometricis sola sensuum externorum attestatio iudicatur ab Euclide aliena, vt in problematum praxi, cum lineæ duci debeant rectæ, & ipsis æquali interuallo describi circuli; eiusmodi ductum & descriptiones sibi dari postulare malit, quàm ea committere oculorum fidei & manuum industriæ: ita vt censeri non debeat factum absolutè, quod proponebatur faciendum: sed cum hac conditione, *si lineas rectas & circulos, quæ in constructione describenda fuerunt, constet euidenter suis definitionibus exactè respondere*: modum enim demonstrandi illa esse mathematicè delineata nullum habemus, cum oculorum & sensuum præsidium ad istud non sufficiat: Ex quo scrupulum Peletario eximes, *cur in problematibus superpositio illegitimè vsurpetur, in theorematibus legitime?* Quia videlicet in theorematibus constare euidenter menti nostræ à materia res abstrahenti potest duorum congruentia; at verò in praxi problematum quæ materiæ immixta est, ea non nisi per sensus deceptione obnoxios denuntiatur. Porro cautè dictum à nobis modo fuit, in praxi problematum non admitti à Geometris superpositionem, nam. extra ipsam praxim & constructionem nihil verat quominus ad conclusionis ve-

ritatem demonstradam superpositione utamur, quia hoc iam theorematum aliquid est.

Quonam autem pacto ista congruentia in theorematibus, non oculis sed mente probetur, patet laudatas Euclidis & Archimedis propositiones legenti, quibus adiungi potest Thaleti Milesio adscripta demonstratio à Clauio, & ut videtur à Proclo in decimam quintam definitionem Euclidis, qua diameter dicitur bisariam secare circulum: id verò Thales non aliunde ostendit quàm ex congruentia duarum eiusmodi partium. Quod autem iste in circulo ostendit, id eodem prorsus pacto Archimedes in solido sphæroide demonstrat. Aliquando tamen ipsa congruentia *mentis* liquet; ut si duæ rectæ in duo puncta conueniant sibi totas congruere, nec spatium comprehendere, quod est duodecimum axioma primi Euclidis, eoque nituntur tam Conica Apollonij, ut ex prima omnium propositione est apertum; quàm quæ Serenus de sectione cylindri demonstrat, sicut ex secunda primi libri planum fit.

O miseram istud principium ita solo lumine mentis natiuo fieri perspicuum, ut Auerroes in libri Physicorum septimi textu 20. illud solum asserendæ æqualitatis inter duas magnitudines agnoscat; unde infert circuli peripheriæ non posse dari æqualem rectam quia superponi sibi non possunt: inde quoque colligit arcus duorum circulorum inæqualium non posse esse æquales; nec nisi late affirmari rectam esse breuissimam à puncto ad punctum ductarum linearum: quia videlicet aliæ omnes, cum sint curuæ, non possunt comparari cum rectâ, & dici illa longiores. Scio ista omnia consequentia Commentatoris esse falsa, ut in prolegomenis Elementorum tetragonismicorum annotatum habetur: sed inde liquidò constat quantum omnes tribuant illi principio *superpositionis*. Cum Aristoteles eo loci videatur nonnihil fauere istis hallucinationibus, assentior iis qui ut Conimbricenses referunt non sine causa existimant extremam ei libro septimo manum haud unquam adhibuisse Aristotelem.

Atque hoc plane sensu Archimedes ut suprà indicatum est, initio libri primi æquiponderantium sumpsit *ἂν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπλάσεων ἐξαρμολογμένων ἐτάλληται, καὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ὁμοίων ἐκασμῶν ἐτάλληται. si æquales & similes figura plana sibi inuicem aptata congruant; centra quoque grauitatis sibi inuicem congruunt.* Nam si cui non sit aliunde euidens quàm ex oculis duo sibi congruere, velitque inde colligere centra grauitatis sibi quoque congruere, rem facit in demonstrando absurdam; quia non est intellectu euidens duo illa sibi mutuo congruere, quamuis oculus nihil repugnet quo minus inuicem aptentur καὶ ἐτάλληται, ut cum Proclo locuti sumus in parte octaua prolegomenon pag. 67 quo loco quia nondum videramus Caualerij exercitationes, in animum nostrum non venit de hoc axioma vllam posse esse inter bonos Mathematicos discordiam, iamque è memoriâ exciderat nostra, Peletarij tam absona de hoc pronuntiatio sententia.

Simili cauillo possit aliquis contendere libræ vsum esse aliquid mecha-

nicum & à Geometra alienum; sed istud satis refutatum, & explicatum est in prolegomenis capite quarto & septimo pag. 24. & 61. ergo &c. quod erat propositum.

S C H O L I V M.

Ad solutionem sexti dubij propositi in propositione duodecima nonnulla præmitti oportet. In iis ergo demonstrandis locum asymptoticum appello eum qui curva & eius asymptoto terminatur, sicuti illum definit & explicat pro sectione conica Apollonius in secundi conicorum propositione tertia; ego verò hîc non tantum contemplan sectionem conicam nempe hyperbolam, sed alias etiam lineas asymptoto rectâ præditas. Asymptotus autem non est qualibet recta non conueniens cum curuâ illâ cuius dicitur asymptotus, sed est ea recta quæ nusquam conuenit, licet ad illam quocunque minimo dato interuallo propius accedat dum ambæ continuantur in infinitum. In memoriam quoque hîc reuocari debet quod, ut supra vberius explanatum fuit, Archimedes usurpat in sexta propositione quadraturæ parabola, & nos in septima secundi libri tetragonismicorum, magnitudinem aliquam posse suspendi ex brachij vnius libræ duobus simul punctis, posse quoque intelligi suspendi ex vno. Perpendicularum quietis voco illud in quo magnitudo ex vno brachij puncto pendens quiescit.

P R O P O S I T I O XXVII.

ESto (Fig. 95.) hyperbola delf comprehensa asymptotis ba, Ea c angulum bac constituentibus; ex centro aeducta sit quælibet semidiameter al, secans hyperbolam in l; per l ductæ sint rectæ lr, li complentes parallelogrammu lrai.

Ostendendum est locum terminatum rectis ai, il, ab & curuâ l e d esse maiorem quacunque figura data.

Inter a & i sumatur quodcunque punctum h, & ut a i recta ad a h, ita intelligatur a h ad a g, & ipsa a g ad quartam, & ista quarta ad quintam & ita deinceps progressio continuari cogitetur; ergo si per h, g &c. agantur he, g d &c. parallelæ asymptoto ab, spatia i l e h, h e d g &c. sunt æqualia inter se, ut in corollario secundo quinquagesimæ propositionis libri sexti ostendimus. Quoniam igitur figura data talis est ut alterius spatij cuiuslibet dati h e l i, finiti, & minoris detractiōe continuâ tandem exhaustiatur; recta verò a h est in infinitum secabilis in ratione rectæ h i ad h g ac proinde locus ille est maior quocunque spatiis spatio h e l i æqualibus; patet locum illum esse maiorem quacunque figura data. Eadem verò est ratio de altero loco comprehenso sub curuâ l m f, rectis l r, r a, & asymptoto a c producta in infinitum. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

DE CYCLOIDE

PROPOSITIO XXVIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 95.*) ex li productâ abscindatur $i q$ ipsi æqualis, & compleatur parallelogrammum $a i q p$: libra grammica praeintelligatur suspendi ex a perpendicularo $a c$, brachio $a p$.

Ostendendum est loci comprehensi sub rectis rl , ar , & sub $a c$ asymptoto, hyperbolâque lm in infinitum productis, quadratricem esse parallelogrammum $ar li$.

Ducatur quæcunque $y f$ parallela asymptoto $a c$, occurrens hyperbolæ in f ; $a y f c$ erit per quartam quarti tetragonismicorum, rectangulum ibidem *conditi* nomine appellatum; ac proinde erit æquale rectangulo $a r l$: ergo habent latera reciproca, & ut $a r$ vel $a p$ brachium ad longitudinem $a y$, ita erit $y f$ ad rl vel $y z$: ergo $y z$ dimetiens quadratricis æquat rectam $a i$ vel rl latus parallelogrammi $ar li$, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Patet igitur ex septima secundi tetragonismicorum si libra $p b$ suspendatur ex a perpendicularo $a c$, brachio $p a$, & puncto p aptetur spatium æquale parallelogrammo $a i l r$, vel $a i q p$, committi æquilibrium; & ex una parte suspendi ex unico puncto p spatium finitum, ex parte verò opposita spatium immensum, ut in superiore ostendimus, de libræ longitudine $a r$ pendens suspensum pluribus punctis, & non vno solum. Atque istud est primum quod in pagina sexta appendicis secundæ adiectæ libris tetragonismicorum, nudè olim asseruimus fieri posse.

COROLLARIUM II.

Loco alteri qui terminatur asymptoto $b a$, rectis li , ia & hyperbolæ arcu ld in infinitum protenso æquiponderare axe $a c$, sustentaculo $p q$, spatium quocunque dato maius patet inde, quod ut iam ostendimus illi æquiponderans sit æquale spatio incluso parallelis $b a$, he in infinitum productis ad rectæ $a i$ partes b . Angulum autem $p a c$ esse rectum, vel non rectum parum interest ad libræ rationem, ut advertimus suprà in propositionis quartæ progressu.

PROPOSITIO XXIX.

Iisdem positis (*Fig. 95.*) intelligatur series graduum quorum primus ad positionem asymptoti $a b$ sit spatium interceptum parallelis $p q$, $a c$ in infinitum productis, secundus sit locus hyperbolicus terminatus rectis lr , ra , & asymptoto $a c$, hyperbolæque arcu lf in infinitum productis, tertij verò limbus sit lc : istos autem gradus sumimus prout explicati fuere in corollario secundo octavæ tertij libri, & in nona sexti proximi.

Ostendendum

Ostendendum est curuæ lt asymptotum esse rectam ac , totumque spatium terminatum rectis la , ac & curua lt , esse æquale duplo parallelogrammi $rlia$. Cuneatum verò solidum, cuius sectio sit triangulum rectangulum habens vnum latus cf dimetientem istius loci hyperbolici, alterum latus illi æquale, & perpendiculare ad planum bac erectum ex puncto f , esse æquale cylindræo altitudinis ap , baseos æquantis rectangulum $ailr$, illudque aptatum sustentaculo pq , axe ac , æquiponderare cylindræo altitudinis ap , baseos, loci hyperbolici.

Primum ita ostenditur; quoniam, per decimam quartam secundi conicorum, hyperbolæ em limbus accedit propius ad asymptotum ac , & peruenit ad interuallum minus quolibet dato; ergo cum tc dimetiens tertij gradus sit minor quam cf dimetiens secundi; nam il , vel cA vel i q , & cf , ct sunt ex constructione proportionales, & il vel cA est maius extremorum; ergo ct est minus, ideoque recta ct est minor quam cf : ergo cum cf possit esse minor quocunque dato interuallo, poterit ct esse minor quocunque etiam dato interuallo. Et cum inter c & f iaceat perpetua lege punctum t , patet curuam lt nunquam conuenire cum ac recta, & accedere ad illam propius quocunque interuallo dato, quod erat primum ex ostendendis.

Præterea quoniam tertius gradus ex methodo octauæ propositionis libri tertij, & quadragesimæ quinti, est duplus spatij quod axe ac , sustentaculo pq , æquiponderat loco asymptotico comprehenso inter hyperbolam & rectas lr , ra , ac , qui ponitur secundus gradus; illi autem loco per superiorem æquiponderat spatium æquale parallelogrammo $ailr$; patet tertium gradum dimetientis tc integrè sumptum esse æqualem duplo parallelogrammi $ailr$, quod erat secundum ex demonstrandis.

Rursus quoniam ex earundem propositionum methodo cuneatum solidum, quod planum semiangulo recto inclinatum ad planum abc , illudque secans in recta ae , aufert ex cylindræo cuius altitudo æquet rectam ap , basis sit locus hyperbolicus integer $fmlrac$, est æquale dimidio cylindræi altitudinis ap , baseos æquantis dimidium tertij gradus: patet istud cuneatum solidum esse æquale cylindræo altitudinis ap , baseos æquantis rectangulum $ailr$, quod erat tertium ex propositis.

Denique ex earundem propositionum præscripto liquet idem cuneatum aptatum sustentaculo pq ad positionem rectæ ar æquiponderare cylindræo recto (rectum enim semper intelligimus, nisi aliud moneamus) altitudinis ap , baseos æquantis iam dictum locum, quod erat quartum & vltimum ex demonstrandis.

COROLLARIUM I.

Quod scripsi in illa sexta pagina appendicis secundæ posse dari cunea-

T t

tum solidum quod insit in loco immenso, & quod sit æquale parallelepipedo noto, patet esse verum ex tertia præsentis propositionis parte.

COROLLARIUM II.

Ex demonstratis in tribus propositionibus postremis constat non rectè inferri omnes locos terminatos curvâ & eius asymptoto, apertos verò quâ excurrunt in infinitum, esse maiores quocunque designato spatio finito. Nam locus hyperbolæ lf est quidem maior quocunque dato spatio finito; at locus inter curvam lt & asymptotum ac est finito spatio æqualis. Igitur quod locus asymptoticus contineat spatium immensum, id non procedit ex natura generali loci; sed ex speciali. Illius hæc est natura ut habeat partem quocunque dato spatio maiorem, istius ut omnem partem habeat dato certo quodam spatio minorem.

PROPOSITIO XXX.

Idem manentibus (*Fig. 95.*) cuneato solido superioris propositionis alterum simile & æquale intelligatur ad partes o constitutum super loco qui terminatur asymptoto ao , & hyperbola coniugata intra angulum $ba o$. Recta ar bifariam secetur in y .

Ostendendum est cuneatum compositum ex duobus istis insistentibus sursum versus super plano bac , & ex alteris duobus insistentibus deorsum versus super eodem plano ad partes oppositas, habere centrum gravitatis in puncto y .

Constructo quadrato $arDB$, describi intelligatur parabola $D\pi a$ cuius axis aB , vertex a , tangens ar , ac proinde ordinatim applicata DB . Ductæ aD diametro quadrati $arDB$ quæcunque fz , ad asymptotum ac parallela, occurrat in ϕ ; limbo $a\pi D$ in π ; rectæ ar in y ; rectæ li in z ; perimetro hyperbolæ lm in f . Quoniam ut $p a$ brachiū ad $a y$ longitudinem, ita per vigesimam septimā est $y f$ ad $y z$; ut autem $p a$ brachium ad ay , ita per duodecimam tertij tetragonismicorum est $y z$ ad $y \pi$: ergo ut $y f$ ad $y z$, ita $y \phi$ ad $y \pi$: igitur rectangulum sub extremis $y f$, $y \pi$ est æquale rectangulo sub medijs $y z$, $y \phi$: ergo, per vigesimam octavam quarti tetragonismicorum, dicylindraceo genito ex $a\pi D r$ ceratoide parabolica, & ex loco hyperbolico $c a r l m f$ ad positionem rectæ ac est condita ratio æquale dicylindraceo genito ex triangulo rectilineo aDr & ex eodem loco.

Rursus quoniam dicylindraceum ex triangulo aDr , & ex loco hyperbolico genitum est cuneatum illud de quo agit præsens propositio; dicylindraceum verò genitum ex ceratoide parabolica $a\pi D r$ & ex eodem loco est, ut ex methodo octavæ libri tertij liquet, æquale spatio quod æquiponderat cuneato illi, si libræ planæ axis ponatur ac , sustentaculum $p q$: ergo dicylindraceum genitum ex triangulo aDr & ex parallelogrammo

ar li est æquale spatio quod cuneato illi æquiponderat. Igitur cum eiusmodi dicylindraceum genitum ex iam dictis triangulo, & parallelogrammo, sit æquale dimidio parallelepipedo altitudinis ap , baseos $arli$; æquiponderans cuneato illi erit dimidium parallelepipedo baseos $arli$, altitudinis ap : sed cuneatum ipsum est per superiorem æquale eidem parallelepipedo: ergo suspensum cuneatum se habet ad æquiponderans, ut p a brachium ad sui dimidium: ergo si ay sit dimidium totius ar , & si intelligatur cuneatum illud quadruplex, suspendaturque ex y puncto, in puncto autem p collegetur duplum parallelepipedo illius, librâ p r suspensâ ex a committetur eiusmodi æquilibrium. Præterea quoniam omnes huius duplicis loci hyperbolici dimetientes parallelæ asymptoto ac bifariam secantur occurſu rectæ ar ; si ar fiat libræ planæ axis, patet vnum locum æquiponderare alteri; ergo si eadem recta ar maneat axis libræ planæ, magnitudo composita ex duplici cuneato posito ad rectæ ar partes o , æquiponderabit magnitudini pariter compositæ & collocatæ ad partes f . Quoniam igitur si axis ponatur fy , magnitudinis illius partes committunt æquilibrium; & si axis ponatur ar , committunt pariter, necesse est iuxta methodum Archimedæ libræ punctum y esse centrum grauitatis illius magnitudinis; quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Istud est quod sine demonstratione vlla affirmavi in illa sexta pagina appendicis secundæ, sub calcem elementorum tetragonismicorum; unde liquet omnia necessaria ad istam demonstrationem cognita nobis iam ante multos annos fuisse. Non dubito quin illius appendicis Lector desiderarit demonstrationem tam inopinati theorematis, quam hic tandem descripsi. Quod autem in extrema eiusdem appendicis pagina corollarium secundum vigesimæ octauæ libri quarti restrinxi, id nunc infectum volo; agnoscóque timorem tunc errandi meum fuisse vanum.

PROPOSITIO XXXI.

Datur aliqua magnitudo non omni ex parte finita, quæ habet centrum grauitatis; datur aliqua quæ non habet quidem centrum grauitatis, sed habet perpendicularum quietis; datur denique aliqua, quæ ne quietis quidem perpendicularo gaudet.

Istud patet ex paulò antè demonstratis in superiorib⁹ propositionibus: primum enim liquet ex proximè superiore, vbi ostendimus magnitudinem compositam ex quatuor illis cuneatis habere (Fig. 95.) centrum grauitatis y quamuis locus qui est cuneati basis, ne perpendicularum quidem quietis habeat, ut deinde ostendemus. Alterum verò conficitur apertè ex eadem propositione, si enim non sumatur nisi pars illius quæ ad rectæ ar partes c iacet, illa habebit perpendicularum quietis nempe rectam y f ; at verò centrum grauitatis non habebit, cum in infinitum excurrat ad

partes c ; ac proinde si ex aliquo puncto ducatur axis $m n$ parallelus rectæ $l i$; semper pars, quæ ad axis $m n$ partes c iacet, alteri præponderet, ut pote procurrens in infinitum, & ex illo recessu ab axe acquirens vires præponderandi infinitas. Tertium denique ostenditur in loco plano asymptotico hyperbolæ $l m$, terminato hyperbolæ arcu $l m$, asymptoto $a c$, & rectis $a r$, $r l$. Si enim habet perpendicularum quietis, esto illud $y z$; ergo cum illa magnitudo ex y suspensa maneat ut iacet; illi, per demonstrata ab Archimede in sexta quadraturæ parabolæ, æquiponderabit idem spatium, quod suspensæ ex duobus punctis a & r : atqui suspensæ ita æquiponderat per vigesimam septimam spatium æquale parallelogrammo $a r l i$; ergo suspensæ ex y tantum, æquiponderat parallelogrammum $a r l i$ ex pendens, librâ $p a r$ suspensâ ex a perpendicularo $a c$. Ergo ut $p a$ ad $a y$, hoc est, finita magnituditudo ad finitam, ita suspensus locus maior quocunque finito spatio plano, ut in vigesima septima ostendimus, se habet ad parallelogrammum $r a i l$: ergo non habet perpendicularum quietis; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Cum locus ille hyperbolicus non habeat perpendicularum quietis, patet magnitudinem illam vi suspensionis non quieturam, sed fore in perpetuo motu. Si ergo quiescat id non proveniet ex partium utrinque pendentium æquali virtute *ποταῖς*, sed aliunde, quod Philosophis relinquo discutendum.

COROLLARIUM II.

Patet præterea centrum gravitatis non esse necessarium ad inveniendam cuneati solidi cuiuscunque dimensionem; nam ex spatio æquiponderante reperitur per vigesimam secundam quarti tetragonismicorum, illud autem spatium potest haberi etiamsi magnitudo nec centrum gravitatis, nec perpendicularum quietis habeat, ut ex demonstratis patet. Quapropter præcipuus usus libræ staret, etiamsi non daretur centrum gravitatis: neque enim vereor præcipuum illum vocare unde generalis modus existit quadrandi cunei vel vngulæ illius de qua in superioris libri propositione nona satis egimus. Pari ratione dicendum est quadratarium spatium, siue quadratricem ipsissimâ Archimedis methodo demonstratam in septima secundi tetragonismicorum non pendere ex centro gravitatis; cum in istis, ubi nec datur centrum gravitatis nec quietis perpendicularum, locum suum retineat. Ista verò figura quadratrix poterit interpolatoria arte ita in speciem immutari, ut novum aliquid appareat, nullaque etiam libræ mentio interueniat. Sed qui hac arte utatur, is non Geometra, sed literarius præstigiator mihi sit, qui alienis inuentis pro suis gloriatur, atque ut reliqui fures earum rerum quas ceperunt, signa adhibitis etiam aliquoties incantamentis commutant, sic iste nomina tan-

quam rerum notas vanæ gloriolæ mancipium mutet. Quo vitio Stoicos laborasse Piso conqueritur alicubi in Ciceronis Operibus.

COROLLARIUM III.

Quoniam præ oculis habemus hyperbolam lf cum asymptotis suis $a b$, $a c$; libet hîc vnum indicare quod semper mihi admirationi fuit in Sciothericâ, & cuius causam penitus nosse nunquam potui, vt in cæteris plurimis quæ ex infinita magnitudine consequuntur. Atque vt exemplum omnium facillimum assumam pono planum $b a c$ esse horizontem regionis sub æquatore constitutæ, hoc est (ne in tam longinquas oras abire cogamur huius experimenti capiendi vel intelligendi gratiâ) pono planum $b a c$ incedere per axem mundi, & per sectionem horizontis nostri cum æquatore; super illo autem stare erectum perpendiculariter stylum $D a$. Igitur planum $b a c$ erit plano sextæ horæ astronomicæ parallelum, quod intelligimus ductum per D verticem styli, hoc est per centrum mundanæ spheræ, vbi ille vertex constitutus intelligitur ab Artificibus. Pono solem percurrere parallelum aliquem extra æquatorem, & describere extremâ styli vmbra perimetrum hyperbolicam $d e l$, talem enim describet vt ex duodecima primi conicorum liquet. Pono denique vmbra styli porrigi ad quamcunque longitudinem, quasi sol esset virtutis infinitæ, nec tamen esset maior ipso vertice, & lux secundaria siue reflexa non consumeret ipsam vmbra. His positis dubij enucleatè proponendi causa. Patet ex nuda contemplatione schematis, horæ sextæ matutino & serotino momento vmbra styli necessario congruere asymptotis $a c$, $a b$; si $a c$ ponatur occidentem versus, & $a b$ ad orientem spectare. Reliquo duodecim horarum tempore toto vmbra extréma pars est in perimetro hyperbolæ, vt patet. Quæro qua ratione cum inter asymptotum $a c$ & hyperbolam iaceat interuallum, & verum spatium quod Apollonius vocauit locum, quo pacto vmbra ad perimetrum pertransierit, videtur enim saltasse; fac enim instanti A vmbra esse in recta $a c$ infinitam; instanti proximè consequenti fit finita, & eius extremum congruit alicui puncto perimetri hyperbolicæ: ergo spatium quod est inter asymptotum & hyperbolam pertransitum fuerit in instanti. Similis prorsus est ratio difficultatis, dum vmbra deserit perimetrum hyperbolæ, & horæ sextæ momento quasi saltando reperitur in recta $a b$, & cum antea semper mansisset finita, in instanti fit infinita. Noui multa posse responderi; non dari duo temporis momenta sibi instantia & sese *diuersos* consequentia, sed neque fortasse dari vlla; istam hypothesim non esse possibilem &c. Sed noui etiam istis responsionibus non tolli admirabilitatem rei, nec penitus obtundi difficultatem qua mens finitis rebus assueta pungi se sentit.

COROLLARIUM IV.

Lubet adhuc immorari in Sciothericis, vt annotem tria alia admiratio-

T t 3

ne digna. Primum est in nostro horizonte Tolosano, & in quouis alio ubi eleuatio poli minor est complemento declinationis paralleli quem tunc sol percurrit, vmbra extremo describi hyperbolam quolibet die, siue arcus diurnus sit plurimum, siue pauciorum horarum quàm sex; ac proinde cum iter solis, vel arcus diurnus non sit idem sed modò maior, modo minor; vmbra tamen extremum semper hyperbolæ integræ semitam peragere. Alterum in vno & eodem Sciotherico Tolosani horizontis & aliorum suprâ designatorum (dummodo in illis complementum declinationis solaris & eleuatio poli componant simul angulum maiorem recto) styli vmbra in ortu & occasu solis non cadere in asymptotum hyperbolæ quam eo die decursura est, sed in parallelam asymptoto. Eiusmodi autem parallelâ secari illam ipsam hyperbolam extrema vmbra describendam, quoties sol est in boreo parallelo; non secari autem quoties fuerit in australi; ex illa porrò sectione fieri vt solis vmbra bis ab orientis ad occidentis momentum cadat in eandem parallelam; vnde consequens est sedem styli esse intra istam æstiuæ siue borealis vmbra hyperbolam, & extra oppositam hyemalis. In quo illud admirationem apud me magnam habet, quod cum istæ duæ hyperbolæ sint similes & æquales, percurranturque integræ ab vmbra, plus tamen temporis impendatur in obeunda æstiuâ, quàm hyemali; vtrobique enim impenditur tempus quo sol in arcu diurno moratur, illi autem arcus sunt inæquales, ac proinde & ipsa quoque tempora. Tertium denique est solis vmbra in ortu solis obeuntis Æquatorem esse parallelam rectæ lineæ quam eo die describit acuminē vmbra; transit ergo vmbra post momentum orientis syderis in parallelam illi in qua primùm iacuit, nec in illo transitu vertex vmbra reperitur vsquam in medio illo spatio. Quando autem sol est in signis australibus; inter parallelam asymptoto in quam projicitur vmbra ipsius exorientis, & inter tramitem hyperbolicum designandum ab ipsa, interiacet interuallum maius illo quod est inter parallelam & asymptotum. Vnde in istis duobus casibus non habet locum quod Philosophus geometriæ ignarus dixerit, in casu superioris corollarij solis vmbra quasi saltu pertransire interuallum quo asymptotus & hyperbola discernuntur, quia illud est minus quolibet dato; ac proinde quia periinde est quod ad istum quasi saltum attinet, atque si asymptotus & hyperbola conuenirent. Nihil dico de velocitate, vt ita dicam, qua decurritur pars hyperbolæ quæ iacet ad partes interminatas, illa enim capi vix potest, cum limes hyperbolicus qui percurri debet sit longitudinis quacunque datâ maioris; hoc verò locum quoque habet in æquinoctialis vmbra recto tramite; quæ omnia cum aliquando meditarer, admirationem meam hoc hendecasyllabo expressi versiculo, quem & Sciotherico adscripsi horario,

Vmbra fallimur, & docemur Vmbra.

COROLLARIUM V.

Prætermittere non possum causam cur in horizonte nostro Tolosano

& in aliis quorum altitudo poli maior est declinatione solis in parallelo eo die obeundo constituti, non possit umbra solis reperiri bis in eodem verticali ante meridiem, & bis in alio post meridiem, vnde eueniret ille regressus umbræ admirandus quem primus annotauit & demonstrauit Petrus Nonius acerrimi ingenij Geometra. Vt autem causa dilucidè explanetur, primò statuo id euenire quoties ab imo calce styli duci potest recta quæ tangat hyperbolam quàm eo die apex umbræ describere debet; ex illo enim tactu fit vt quæcunque recta ducatur inter lineam meridianam cui insistit stylus & inter lineam tactus, secet semitam umbræ delineandæ in duobus punctis: ergo ante meridiem (eadem est ratio de postmeridiano tempore) umbræ apex erit in duobus illis punctis, & linea umbræ erit bis in eadem recta nempe antequàm veniat ad lineam tactus, ad quam cum peruenerit, redibit, iter relegendo, ad eandem rectam secantem, sed modò vt patet erit longior nempe cum primùm secanti congruet matutina hora, modo breuior tum secundò ad illam redierit, & cum prouectior euaserit dies ante meridianam horam. Quoniam igitur in nostro horizonte sedes styli est intra hyperbolam quam sol lustrans borealia signa eo die projicit per verticem styli; ex illa sede non poterit duci recta tangens ipsam hyperbolam æstiuæ umbræ (ita enim vocetur quæ respondet signis borealibus) sed neque etiam quæ tangat oppositam hyemalis umbræ, cum ex trigesima prima primi conicorum doceamur tangentem rectam cadere inter centrum sectionum oppositarum & verticem eius hyperbolæ quam tangit; vnde etiam liquet in sphæra recta (qui est casus corollarij tertij) non esse possibiles rectas ex ima styli basi educas quæ hyperbolam tangent; cum stylus ibi erigatur ex centro ipsius hyperbolæ. Contrà verò quoniam quando altitudo poli minor est declinatione solis in parallelo huius hyperbolæ genitore collocati, sedes styli iacet extra utrâque hyperbolam, patet ex illa sede posse duci rectam quæ tangat hyperbolam sedi viciniorem. Porro istud experiri potest etiam in parietibus ædificiorum, quisquis accuratè inuestigarit vnum aliquem super quo poli alterutrius eleuatio sit minor declinatione solis maximâ. In pariete illo, vt res pariat maiorem admirationem, nullas alias rectas describet præter tangentem, quæ vocabitur terminus regressus, & horam qua umbra ad illum pertinet, simulque diem anni; ponimus autem stylum in his omnibus esse perpendicularem ad planum, nullamque esse virgam ferream quæ axem mundi repræsentet. Attamen vt tutò & facilè rem expediat, sum illi autor vt hyperbolam isti diei conuenientem occultè describat, tum vt filum basi styli figat, illudque tensum eo vsque circumferat, donec hyperbolam sensus iudicio appareat tangere: ita enim habebit punctum tactus, ac consequenter terminum regressus, momentumque quo umbra ad illum perueniet. Postea verò creatâ obducatur hyperbola, vt sola linea regressus depicta conspiciatur. Non est dubium quin istud etiam à sapiente spectatore iudicetur mirabi-

le. Per numeros res ex se certiùs tractaretur, sed ij in istis hypothefibus vix carebunt vitio aliquo; semper certè relinquent artificem anxium, an expectationi noui huius spectaculi excitatæ responsurus sit suo tempore successus. Cæterùm iste regressus vmbre non accidit nisi in plano in quo hyperbolam delineaturus est vertex vmbre; nam si circulum, aut ellipfim aut etiam parabolam descripturus sit, eiusmodi reditus vmbre accidere non potest: quapropter non abs re fuerit, ibi istud tractasse, vbi hyperbolæ proprietates quædam mirabiles ex instituto referendæ nobis erant. Quod si stylus non ponatur rectus sed inclinatus ad libitum; quolibet die, & vbiçunque gentium poterit iste regressus spectari, nempe si postquam vmbre illius diei conueniens sectio conica in Sciotherico descripta fuerit, ad illam ducatur tangens quælibet, & collocetur stylus in puncto vbi dicta tangens secabit lineam meridianam, is verò inclinandus ita erit, vt vertex illius congruat vertici styli qui perpendiculariter ad Sciothericum erigeretur, sed subducitur vt artificium magis inde commendetur.

PROPOSITIO XXXII.

Soluitur quintum dubium ex centro grauitatis petatum; & sextum, ex eo quod spatium finitum æquiponderet immenso.

I. Dari centrum grauitatis reponitur iure merito inter postulata, quis enim hoc demonstret, aut quis illud quamuis indemonstratum concedere postulanti recuset? Primò enim, si ratione physica agatur, videtur rationi consonum vt quodlibet graue in libræ curuæ hypothefi ex puncto A veluti vnco liberè pendens, quietis situm sibi reperiatur aliquem, quacunque sui parte illi admoveatur: atqui, si hoc est, datur centrum grauitatis; nam vbi duo eiusmodi perpendicularia siue rectæ ad centrum vergentes se interfecant, ostendetur eò necessariò confluere tertium perpendicularum ex quacunque alia parte suspensum admoveatur vnco A; alioqui perpendicularorum priorum vnum non diuississet magnitudinem suspensionis in duas partes hinc & inde æquiponderantes. Quæ verò demonstrauimus in propositione vgesima prima nihil obstant iam dictis, sed potius ea confirmant, cum ibi ostenderimus magnitudinem illam compositam, quamdiu conseruat eandem à centro mundi distantiam habere centrum grauitatis per quod omnia illius interualli perpendiculara transeunt, hic verò ponimus ab eodem vnco A eandem magnitudinem pendere per diuersas suspensiones, pari à centro distantia. Istud quod ratio suadet confirmat experientia constans, etiam in perpendicularo pendulo, de cuius oscillationibus aliquid diximus in propositione 59. lib. 6. In hypothefi verò libræ Archimedæ ratio idem suadet: experientia verò neque fauet, neque contradicit; cum illa hypothefis sit solius rationis, nec grauib. de facto quadret.

II. Inductione præterea mathematica fit probabilissimum dari centrum

trum grauitatis. Primò enim Archimedes ex illius hypothefi quadrauit parabolam; deinde eandem quadrauit feclufæ libræ principiis; nec vlla fuit discrepantia duorum iftorum tetragonifmorum: ergo vterque veritate nititur. Eandem porro parabolam posteriores Scriptores præcipuè Torricellius & Gregorius à S. Vincentio variis aliis modis abfque libra quadrarunt, eamque commutarunt in idem fpatium iam per libram ab Archimede inuentum; quæ omnia confirmanz libræ principia habere fuam fedem in veritatis penetralibus. Denique nulla eft rectilinea figura cuius centrum grauitatis non inueniatur per primum librum æquiponderantium Archimedis, & cuius quadratrix fiue fpatium æquiponderans non fiat cognitum per duodecimam tertij tetragonifmicorum, adhibita decima fecundi libri eorundem elementorum; femper autem reperitur ficut eft fufpenfum rectilineum ad æquiponderans notum, ita effe brachium libræ ad interuallum quod eft à puncto vnde libra fufpenditur ad perpendicularum quietis quo rectilineum pendet ex libræ eiuſdem vnico puncto, idque in quocunque fitu ponatur fufpendi; ergo cum in rectilineis, & etiam in curuilineis parabolicis fufpenſis in quocunque fitu, reperiatur illa proportio effe veriffima, quæ in centro grauitatis fundatur, quoties ad omnem pofitionem magnitudo fufpendi pari pacto poteſt, non eft cur in curuilienis aliis non debeat admitti, femoto prorfus omni erandi timore.

III. Cum Archimedes non eſſet acturus niſi de figuris & magnitudinibus vndique terminatis, non eſt mirum quòd non poſtularit dari centrum grauitatis niſi in figuris: præterquam quod in aliis quibuſdam non vndecunque terminatis dari centrum grauitatis, res eſt adeo à primis hominum cogitationibus remota, vt demonſtrari potius debeat, quàm poſtulari; nam ſi hyperbolam & aſymptotum ad ſe propius ſemper accedere, & nuſquam conuenire, Proclus alicubi vocat ἀποζητούμενον, quantò magis iſtud vt communi hominum opinioni repugnans ſuſpiceret.

IV. Quòd autem pondus finitum æquiponderet immenſo pendenti de vno libræ puncto, id concedimus aduerſari rectæ rationi; non autem ſi pendeat de duobus; nam quando ita pendet, non licet inferre dari yllam proportionem inter finitam magnitudinem & infinitam. Quapropter cum nihil contra eiufmodi aſſertionem adducatur quod falſitatis eam conuincat, & cum aliunde euidenter ſequatur ex principiis libræ fundatiſſimis, non eſt cur ea propterea reſpuamus, quod ex illis neceſſariò conſequatur aliquid præter opinionem hominum vulgarem: ergo &c. quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XXXIII.

Soluitur vltimum dubium deſumptum à difficultate intelligendi demonſtrationes ex principiis libræ deriuatas.

I. Principio ſtatuendum eſt, quorundam hoc eſſe vitium, vt non ha-

V u

beant bene cognitae eas res quas docere volunt, cumque eas non satis firmè conceptas animo atque comprehensas teneant, non posse non obscure de iis loqui; quis enim in aliorum mentibus id rectè imprimat, quod in sua peruersè expressum habet? & quis à fonte turbido riuos crystallinos deriuat? Hunc itaque ingenij defectum vllatenus excusare iis quæ mox dicturi sumus, minimè intendimus; fatemur enim culpâ eius qui loquitur sapius fieri ut non intelligatur; concedendum tamen putamus, nullam aliquando esse eius culpam, qui non intelligitur. *Istud*, inquit Tullius, *duobus modis sine reprehensione fit: si aut id de industria facias, ut Heraclitus, cognomento qui xoleiuds perhibetur, quia de natura nimis obscure memorauit: aut cum rerum obscuritas, non verborum facit, ut non intelligatur oratio: qualis est in Timæo Platonis. Epicurus autem, ut opinor, nec non vult, si possit, planè & aperte loqui: nec de re obscura, ut physici, aut artificiosa, ut Mathematici; sed de illustri & facili, etiam in vulgus peruulgata, loquitur.* Hæc ille, cui assentior, si qui dedita opera obscure loqui confectatur, iustam id faciendi causam habeat; alioqui enim, abutitur auditoris otio, & contra humanæ locutionis leges peccat, reprehensionemque meretur. Iure autem optimo artificiosa Mathematicorum collocat inter ea quæ sæpe non intelligantur absque vlllo loquentis vitio.

II. Præterea negare nemo potest quin etiam iis qui præcognitorum apparatus habeant necessarium, quique summa animi contentione demonstrantis mentem assequi moliantur, intellectu difficillima sint Archimedis, Apollonij, Euclidis & aliorum Antiquiorum plurima theoremata, præcipuè verò quæ Archimedes de æquiponderantibus scripsit, cuius causa nunc inquirenda nobis est. Primò quidem certò statuendum est eos animo clarè comprehendisse ea, quæ posteris tradiderunt; deinde nec minùs certò constare debet eos non caruisse copia verborum quibus cogitata sua promerent; videas enim quosdam qui gallicè, verbi gratiâ, planè explicent mentem suam, at verò si latinè eadem de re sermonem habeant, tenebris sua ipsi sensa tam densis obuoluant, ut discerni penitus non valeant. Tertio neque existimandum est eos dedita opera obscuritatem dictorum affectasse; cur enim se summa illa voluptate priuasse credantur, quam quisque experitur dum sua inuenta & facile intelligi, & probari experitur? Quarto igitur id referri debet in eam rerum, quas tractant, naturam reconditam, procùlque à prima & communi mentis humanæ luce positam. Quoties in theorematis constructione adhibentur solida, eorumque sectiones variz; noua adest causa difficultatis, eo quod trinx illorum dimensiones nunquam perspicuè repræsententur in plano. Sæpe tamen figuræ descriptio est plana nihilque intricata, & tamen demonstratio perspicuè non apparet. Mihi certè quintus Euclidis liber semper difficilis captu visus est, cum diagrammata sint facilia; ita quoque decimus difficultate summa comprehensus mihi fuit, cuius tamen figurarum descriptiones negotium non faciunt. In Hypsichlis deinde & Fluf-

fatis libris intelligendis semper laboravi plurimum, sed ibi ad difficultatis communis magnitudinem fit accessio ex vario planorum & linearum in solidis corporibus ductu. Specialem verò difficultatem passus fere semper fui, quoties demonstratio processit per reductionem ad impossibile; tales occurrunt mihi nunc nobilissimæ duodecimi Elementorum secunda, decima, duodecima; tales quoque sunt illæ in quibus Archimedes probat proportionem cylindri ad sphaeram, conii ad cylindrum, spiralis ad circulum &c. & vt à libra exemplum petamus talis est decima sexta quadraturæ parabolæ, vnde fluxit septima nostra libri secundi tragonismicorum.

III. Dissimulandum non est Antiquos illos multa in demonstrandis suis inuentis reticere, indèque nonnullam oriri difficultatem percipiendi statim, quæ dicuntur, præsertim inexercitatis. Hunc scribendi modum in Eudemo Simplicius agnoscit in primum Physicorum fol. 13 pag. 2. & refert ad ἀρχαίων ἔθος ad Antiquorum morem. Quisque verò illum experitur eorum lectione, & manifestè patet in Archimede ex supplementis Commandini, aliorumque. Existimo tamen remotæ illius ætatis Scriptores ita calluisse has disciplinas, vt quæ inter scribendum omitterent, ea suppleri à Lectore facitè posse existimarent: sicuti nunc si quis dicat æquales esse angulos alternos qui fiunt à recta incidente in duas parallelas, quamuis Elementa Euclidis non adducat ad confirmationem suæ assertionis, ab omnibus Geometris intelligitur, nec ab vlllo desideratur illa Euclidis commemoratio. Quapropter si iam nobis non sint in procinctu ea quæ ætate Archimedis obuia erant Geometris, non est vituperandus mos ille scribendi, vt pote eruditioni sæculi illius accommodatissimus, sed potius dolendum est nostrum illi in hoc cedere. Fortasse etiam illud rerum compendium affectarint, vt vitarent illam minima quæque persequentem μικρολογίαν demonstrationum mathematicarum, cuius tædio nonnullos ab iis auerti testatur Aristoteles in extremo Metaphysicorum libro secundo. Non abs re fortasse erit annotare, versionem, qua vsus est S. Thomas, retinuisse vocem *micrologiam*; Interpretem quoque Auerrois Arabicam vocem illi græcæ respondentem, videri retinuisse, dum *scatinizare* scripsit; nam quod græcæ μικρόν, id Hebraicâ linguâ (à qua deriuata est Arabica) קטן dicitur; vnde sicut ab illa deducitur μικρολογίζεσθαι, ita ab ista *scatinizare* vel *scatinizare* inflexione latinâ deriuari potuerit. Cæterum illa vox de mente Aristotelis sonat eo loci vitium illud quo minima quæque nonnulli conſectantur. Sicuti enim (inquit Philosophus) in contractibus celebrandis si minima quæque sordidè capes, odium contrahentis tecum incurris ex illiberali tuo facto; ita in demonstrandis rebus, si minima per censere velis, eorūque causam longiùs excurrendo reddere, tædio eris auditori; cū plurima sint quæ satis subaudiuntur, & quæ sine audientis fastidio expressè ingeri non possunt. Hinc patet difficile dictū esse cur Bessarion Cardinalis illam Aristotelis vocem reddiderit eo loci

curiositatem; sensus enim ille non conuenit assertis Aristotelicis: sed neque satis video, an textus Arabici Interpres latinus planè intellexerit vitium quod ibi Philosophus ea voce designat, dum id esse ait *proteruire in contrariis*. Porro voce illa græca notari aliquoties auaritiæ recularum omnium satagentis sordes accuratissimus & doctissimus Menagius in *origine vocum Francicarum* animaduertit: aliorum verò sit iudicium an eidem voci supponatur vitium illud litigantium cauillatorum, quod nos *chicanerie* dicimus; quam quidem dictionem nostram à voce hispana *chico* Menagius ille deduci vult; fortasse an veriùs ab istâ ipsâ Arabicâ, quasi dictum initio fuerit *chitania*, postea *chicania*. Vnde & vox ipsa hispana *chico* ortum forsitan duxerit.

IV. Tullius dum loco iam laudato libri secundi de finibus, geometriæ artificiosâ ex se obscura esse affirmat, eiusmodi voci non subijcit tantum instrumenta machinalia; ita enim angustè nimis loqueretur, sed hac voce explicata haberi vult ea omnia Geometrarum inuenta, quorum demonstrationi *κατασκευὴν* *constructionem* præmittunt: demonstraturi enim aliquid construunt ex arte diagramma idoneum comprehendendæ veritati propositæ. Artificiosum itaque opponitur Physico, quod effectrice natura prodit in lucem; at diagramma istud geometrica arte efficitur. Huc spectat, vt opinior, quod Proclus in Euclidem docet dimensionem cylindri & coni spectare ad geometriam, quia cylindrus & conus sunt per mentem: ad Geodesiam verò pertinere vt metiatur *σώπης ὡς κώνος, καὶ σφέατα ὡς κυλίνδρους, ἕδ' εἰ δι' ἀριθμῶν νοητῶν, ἀλλ' αἰσθητῶν, ὅσον διὰ πλάτους, καὶ διὰ βάθους: cumulos acuminatosque aggeres veluti conos, & puteos tanquam cylindros: neque per rectas mentis opus, sed per subiecta sensibus, veluti per amussim & perpendicularum. Quod autem grauis Autor geometriâ & Mathematicas disciplinas addisci docet faciliùs quàm physicam, id ita intelligo, vt velit facilius esse comparare sibi noticiam eorum omnium quæ in Mathematicis demonstrata sunt, quàm scientiam eorum quæ ad vniuersam physicam spectant: nam ad istam scientiam acquirendam oporteret innumera inueniri & demonstrari quæ vel inuenta non sunt, vel nondum demonstrata. At si comparantur ea quæ necdum reperta sunt in Mathematicis, cum iis quæ nondum comperta habentur in Physicis, quis statuatur quænam profundius lateant, quamdiu nescitur vbi vnumquodque eorum defossum lateat?*

V. Ex hæcenus dictis liquidò constat difficultatem & obscuritatem inuentorum Mathematicorum potiùs verti debere eorum laudi quàm vituperio; & siquidem sublimia ea sint, vti re ipsa sunt, inde veriùs accendi quam extingui studium illa cognoscendi: quod si quis natiuam, vt ita dixerim, rerum ipsarum difficultatem obscuret cogitationum suarum vel sermonis tenebris, id non esse Geometriæ, sed Scriptoris vitium. Si quis demum qui ne pictum quidem vllum (vt dici solet) antea vnquam Geometram viderit, conqueratur à se non intelligi demonstrationes illas; istâ querimoniâ non ostendi aliud contra Scriptorem illarum, quàm in-

foelicem cum esse, quod nactus sit Lectorem nimis ineruditum. Caterum vnum, quod omisi dicere, præterire non possum; Archimedem, licet in demonstrationis processu non statim planè intelligatur vbique, dum tamen ipsum theorema proponit, id facere mira perspicuitate; verbi gratia *parabola segmentum esse trientem trianguli cuius est quadratrix: cylindrum esse sesquialterum sphaera in ipso inclusa; superficiem sphaerae esse quadruplam circuli maximi in ea descripti &c.* Modus autem adeo clarus proponendi theoremata, fatis indicat tenebras quas deinde experimur dum ducimur ad penetrare vbi illud latebat, pertinere ad longum & cæcum iter quod peragendum est vt eò veniatur.

VI. Reuocemus iam illud Aristotelicum, *puerum posse quidem fieri Mathematicum, non tamen Sapientem aut Physicum*, & monstremus male inferri mathematicos disciplinas esse faciles captu. Aristoteles enim ibi non inquit an faciles difficilèsvē sint; sed tantum cur pueri addiscere illas possint, & nequeant Sapientiam aut Physicam; respondetque id ea de causâ fieri, quod ad illas addiscendas non prærequiratur experientia multis annis parta, prærequiratur autem ad Sapientiam & Physicam. Neque oponas censuisse Aristotelem disciplinas illas convenire ætati puerili, cuius tamen in iudicando vires sunt admodum debiles: nam in illis alia sunt facilia, ea videlicet quæ non procul absunt à primis principiis; alia sunt difficiliora, quæ longius absunt; alia difficillima, quæ longissimè. Vnde licet Plato voluerit pueris primum tradi mathematicas scientias, in illis tamen addiscendis ad trigessimum vsque ætatis annum perstare eos iubet, prout rectè annotat Blancanus supra pag. 24. vbi de hac ipsa re ita scribit; *dicam sincere, quod ipse, dum eas per plures annos docerem, expertus sum; quosunque reperi ingenio in mathematicis pollere, hi pariter in aliis omnibus excellebant. Requirit enim studium istud omnes ingenij partes, imaginationem, discursum, & memoriam. Idcirco Veteres puerorum ingenium ad Mathematicas quasi ad Lydium lapidem experiebantur, iisque inepti à reliquis studiis arcebantur. Audi Platonem 7. de Rep. An & hoc aduertisti quod homines naturâ Arithmetici ad omnes doctrinas, vt ita dixerim, acuti videantur. Hactenus ille. Sed quod ad illam mathematicas disciplinas reliquis præmittendi legem attinet, non omnibus ea probatur: nam S. Thomas in librum Ethicorum sextum lectione septima ita loquitur, erit ergo congruus ordo addiscendi: *Vt primò quidem pueri logicalibus instruantur, quia logica docet modum totius Philosophiæ. secundò autem instruendi sunt in Mathematicis, quæ experientia non indigent, nec imaginationem transcendunt. Tertiò autem in naturalibus, quæ etsi non excedunt sensum & imaginationem; requirunt tamen experientiam. Quartò in moralibus quæ requirunt experientiam, & animum à passionibus liberum, vt in primo habitum est. Quintò autem in sapientialibus & diuinis, quæ transcendunt imaginationem, & requirunt validum intellectum.* Ridiculus porrò sit quisquis ex hoc S. Thomæ loco inferendum contendat, Logicam puerilem & perfacilem esse scientiam; ipso quippe initio id ætatis adolescentes percipient quæ in Logica*

faciliora erunt, progressu verò temporis reliqua maturiori ingenio ad-
discent.

VII. Restat examinandum quod S. Thomas asserit sub finem Com-
mentariorum in secundum Metaphysicorum lectione 5. ibi enim expli-
cans Aristotelicum illud assertum [quosdam reperiri qui omnia sibi
mathematico more probari volunt, eo quod assueti non sint nisi ma-
thematicis demonstrationibus] addit, *hoc convenit propter consuetudinem his
qui in Mathematicis sunt nutriti, & quia consuetudo est similis nature. Potest etiam
hoc quibusdam contingere propter indispositionem, illis scilicet qui sunt fortis imagina-
tionis, non habentes intellectum multum elevatum.* Cum igitur ex S. Thoma
non opus sit ingenio admodum sublimi ad mathematicas disciplinas per-
cipiendas, iure merito quaeritur cur homines ingenij acris, & phantasie
viuidæ admodum, atque tenacis, tantopere laborent in intelligendis iis
quæ Archimedes scripta reliquit de spiralibus præsertim & libra. Res-
pondeo S. Thomam non loqui ibi nisi de illis Mathematicis qui assuefa-
cti tantummodo sunt demonstrationibus Euclidean primorum præcipuè
librorum; potest enim contingere ut illorum aliquis fortis sit imaginationis,
parùmque polleat ingenij viribus; iste igitur si dum sublimia in aliis
scientiis dicuntur, ea *συνεργειν* ut Aristoteles eo loci ait, hoc est rationis
nexu iungere nequeat, id præ ingenij imbecillitate faciet, in iis præcipuè
rebus quæ nulla linearum vel superficierum descriptione continentur.
De isto quoque Mathematico intelligi debet, quod S. Thomas & Auer-
roes asserunt in illo virtutem imaginatiuam dominari supra virtutem cogitativam.
Certum enim est eum qui noua & abstrusa quaerere instituit, non asse-
quuturum quod vult, nisi forti eius imaginatiua fortior dominetur cogitativa.

S C H O L I U M.

*Punctum extremum linea circulum describens quò remotius fuerit à centrò, eò
velociùs ferri ab eadem virtute motum, Archimedes initio libri primi de aequiponde-
rantibus, inter postulata reponit. Petimus, inquit, graua æqualia æquali di-
stantia suspensa, inter se æqualiter ponderare: graua item æqualia, di-
stantiâ inæquali suspensa non æqualiter ponderare, sed id quod in lon-
giori distantiâ pendet deorsum ferri. Postulat igitur idem in æquali à centrò
libræ distantiâ, pari impetu deorsum ferri. Inde enim existit æquilibrium, quòd ex-
trema libræ capita vtrinque premantur deorsum æquali impetu, id est, ea vi quæ æquè
velocem in vtroque causaret motum, nisi sibi mutuo ipsi motus obisterent: quanta au-
tem est velocitas eiusdem puncti, tanta est resistentia ad motum oppositum. At verò
Iordapus Autor non ignobilis, inter scriptores Mathematicos vndecimi seculi relatus
à Blancano nostro, in opusculo de ponderositate, graua æquali distantiâ suspensa inter
se æqualiter ponderare probat questione 2. quæ quia nonnulla alia continet non inuti-
lia lubet illam hic apponere emendatam, & iuxta Authoris, nisi fallor, mentem re-
stitutam.*

PROPOSITIO XXXIV.

SI libra fuerit horizonti parallela, & æqualibus interuallis ab ea suspensa fuerint graua æqualia, ab eo situ non discedet; & si ab eo submoueatur, sibi relicta ad eum reuertetur. Si verò inæqualia appendantur ex parte grauioris vsque ad perpendicularum declinare cogetur.

Sit (*Fig. 96.*) libra $b c$ bifariam secta in a , & ex a pondera b , c æqualia, de punctis b , c pendentia liberè; sit $f a e$ perpendicularis ad horizontem. Dico si libra ex a suspendatur ita vt sit parallela horizonti, ipsam permansuram in eodem situ; & si ab eo situ dimoueatur, ad eum redituram; denique & si b alterutrum ponderum ponatur esse maius, depressum tamdiu isi libram ad partes b , dum recta $a b$ congruat perpendicularo $a e$.

Ad istud probandum Iordanus assumit primò; quod grauius est, velocius descendere: secundò, idem eò velocius descendere, ac proinde grauius esse, quò eiusdem deorsum motus rectior, & perpendicularo similior fuerit: tertio obliquiorem descensum in eadem circuli quantitate minus capere de directo, id est respondere minori directo.

His ita positis, ex centro a interuallo rectæ $a b$ descriptus intelligatur circulus $b f c e$; & per b , c actis rectis $b h$, $c d$ æquidistantibus ipsi $a e$, sit primò $b c$ parallela horizonti. Quoniam angulus $b a e$ est ex constructione rectus, erunt quoque anguli $h b a$, $a c d$ recti, ac proinde rectæ $b h$, $c d$ tangent circulum in b & c ; anguli igitur contactus $h b e$, $d c e$ erunt æquales. Cùm igitur descensus tam ponderis b , quam ponderis c fiat per circumferentiam circuli versus e , & cùm æquè obliquus sit hinc inde descensus, eo quod circumferentiæ $b e$, $c e$ æquali angulo recedant à perpendicularibus $b h$, $d e$; aliunde verò pondera b , c sint ex se æqualia, libra non nutabit in alterutram partem; cùm neque ratione ponderum, neque ratione anguli in descendendo declinioris se superent.

Secundò (*Fig. 97.*) libra $b c$ non sit horizonti parallela; sed cæteris vt in priori calu manentibus; depressa sit ex parte b , & eleuata ex parte c . Per puncta a , c , b ducantur rectæ $q p$, $c l$, $b g$ horizonti parallelæ, & inter c & p sumpto quouis puncto i , arcui $c i$ fiant arcus $c x$, $b o$ æquales, & per i , x , o ducantur $i n$, $x s$, $o t$ horizonti parallelæ. Quoniam arcus $c i$, $c x$ sunt æquales, erit recta $m r$ maior recta $r z$; ergo cùm arcus $i c$, $c x$ sint æquales, & arcus $c x$ parallelis horizonti lineis $x s$, $c l$ interceptus respondeat minori parti $r z$, arcus verò $e i$ maiori $m r$, sint autem $r z$, $u y$ æquales, erit descensus grauis c per arcum $c i$ minus obliquus, descensu b per arcum $b o$: ergo graue c descendet, cùm hoc ipso quod viam habet minus recedentem à perpendiculari $c d$, sit grauius: ergo libra $b a c$.

mouebitur donec punctum b respondeat puncto q, & punctum c puncto p.

Tertiò (Fig. 98) fit pondus b maius pondere c, & libra b c fit parallela horizonti; ita vt punctum b respondeat puncto q, & punctum c puncto p; manifestum est inclinationem factum iri ad partes b, cum enim sicuti in primo casu ostensum fuit anguli descensus sint æquales vtrunque, & pondus b sit pondere c ex se grauius, manebit adhuc grauius respectu habito ad situm.

Rursus fit libra b t ad horizontem inclinata, & ponatur b inferius (vt libet) & c superius. Ex recta b c producta auferatur recta c g ipsi a c æqualis; ex centro g describatur circulus c z: ex c excitetur ad b c rectam perpendicularis c m; tanget recta c m vtrumque circulum in c. Quoniam verò rectæ h b, d c sunt parallelæ, anguli h b a, d c g erunt æquales: sed anguli g c z, a b e mixti sunt etiam æquales; ergo si ex æqualibus rectilineis h b a, d c g auferantur æquales mixti a b e, g c z; residui mixti h b e, d c z erunt æquales: sed angulus d c z mixtus superat mixtum d c p excessu anguli curuilinei p c z: ergo angulus mixtus h b e superat mixtum d c p, excessu anguli curuilinei p c z: sed angulus p c z est duplus anguli contactus m c z: ergo excessus quo angulus mixtus h b e superat mixtum d c p, est angulus duplus anguli qui ad contactum circuli fit ex periphæria ipsius circuli & ex recta contingente.

Quoniam igitur licet, vt in secundo casu ostensum fuit, pondus b habeat descensum obliquiorem pondere c, & eatenus pondus b fiat leuius, quia tamen proportio anguli h b e (qui est obliquitas descensus ponderis b) ad angulum d c p (qui est obliquitas descensus ponderis c) est minor qualibet proportione quæ est inter maiorem & minorem quantitatem, quarum excessus multoties repetitus superet minorem; minor etiam erit quàm ponderis b maioris, ad pondus c minus: cum ergo pondus b plus addat super pondus c, quàm obliquitas super obliquitatem, grauius erit b in hoc situ quàm c: ergo cum pondus b non possit quiescere in situ libræ horizonti parallelæ, aut inclinatæ ad illum: superest vt quiescat in situ perpendiculi a e. Quod autem proportio anguli h b e ad angulum d c p sit minor qualibet proportione quæ est inter maiorem & minorem quantitatem quarum excessus multoties repetitus superet minorem; & quod pondus b maius & c minus ita se habeant vt eorum excessus sæpius replicatus componere possit pondus ipso pondere c maius, ostenditur hoc pacto.

Quoniam inter d c & c m rectas nulla per c duci potest recta quæ non secet circulum, cum c m recta tangat in c, omnis angulus rectilineus minor angulo rectilineo d c m, erit etiam minor angulo mixto d c p. Cum ergo angulus m c p talis sit vt quantumuis repetitus non possit adæquare vel superare rectilineum angulum vel minimum vt ad propositionem 16. tertij Euclidis demonstratur à Clauio: ergo & angulus p c z curuilineus, cum, vt ostensum est, sit duplus anguli contactus, talis erit vt quantumuis duplicatus

duplicatus non possit adæquare vel superare vllum rectilineum angulum : ergo multò minus poterit adæquare vel superare angulum mixtum d c p, quem ostendimus esse maiorem quocunque rectilineo angulo abscisso ex angulo rectilineo d c m ; ergo angulus d c z seu h b e maior ita se habet ad angulum d c p minorem , vt excessus maioris , qui est angulus curuilineus p c z , quantumuis repetatur non adæquet vel superet , ipsum angulum d c p.

Iam verò quòd excessus quo pondus b maius superat minus c , tale sit vt sibi ipsi coaceruatus superare possit grauitatem c ; assumitur inter postulata : sicuti , quòd inæqualium spatiorum excessus quo maius superat minus sibi ipsi toties possit accumulari , vt definitum spatium excedat , assumptum est (*λίσμα* vocat Archimedes in epistolâ præfixâ quadraturæ paraboles) quo vsi sunt omnes Geometræ vt testatur idem Archimedes, & quo ipse vtitur in ipsa quadrature paraboles proposit. 16. & 20. & de Conoid. prop. 5. Semel autem eo concesso in spatiis inæqualibus, eadem rationis euidentia constat admittendum esse in ponderibus, & in omnibus aliis in quibus non reperiuntur partes ita dissimiles, sicut sunt duo anguli mixti angulum rectilineum constituentes, quorum vnus est angulus contactus, alter est huius complementum ad totum rectilineum : quapropter Archimedes hoc ipsum de duabus lineis inæqualibus recta videlicet & circuli circumferentia assumpsit propositione 4. de lineis spirali- bus. Quòd si de linea recta, vel de circumferentia circuli est verum ; verum quoque erit de angulo rectilineo, cum anguli rectilinei partes per 33. sexti sint in ratione partium peripheriæ circuli quibus insistant. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

SI brachia libræ fuerint inæqualia, æqualibus appensis fiet ad partes longioris inclinatio.

Istud demonstrat Iordanus quæstione 5. in hunc fermè modum. Sit (Fig. 99.) libra a b horizonti parallela, sitque c g perpendicularis ad eundem ; brachia ex centro c prodeuntia sint c a maius, c b minus, pendeantque ex a & b pondera æqualia. Dico inclinationem debere fieri ad partes brachij c a longioris.

Interuallo rectæ c a describatur circulus a g i, & factis b c, i h æqualibus ex centris c, h describantur circuli æquales b f, i u per puncta b, i. Ex a, i, & b excitentur perpendiculares e a, d b, l i ad rectam a i, quæ tangent circulos in a, i, b ; circulus autem i u tanget circulum i g interiùs : ergo angulus l i g erit pars anguli l i u : sed angulo l i u æqualis est angulus d b f ; angulo vero l i g, angulus e a g : ergo angulus e a g est minor angulo d b f : sed angulus e a g est obliquitas descensus ponderis a, & angulus d b f est obliquitas ponderis b : ergo cum pondera b & a sint ex se æqualia, & pondus a habeat descensum minùs obliquum, eatenùsque

X x

fit grauius, præponderabit: ergo inclinatio libræ fiet ad partes a; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Nonnullæ animaduersiones in demonstrata à Iordano proponuntur.

Primò apertum est demonstrationes istas procedere ex illo postulato, grauiam ferri deorsum per lineas inuicem parallelas; ac proinde castigandum esse primum Iordani postulatam, quod ita habet, *omnis ponderosi motus esse ad medium: & pro eo reponendum esse, ponderosa ferri deorsum per lineas parallelas.*

Secundò dato pondera ferri deorsum per parallelas, si libra cuius brachia sunt æqualia, & vtrique suspendunt pondera ex se æqualia, à situ horizonti parallelo submota habet vim restituendi se eiusmodi positioni. Dico eandem quoque vim obtinere quando brachia fuerint inæqualia, modo pondera suspensâ sint subcontrariè in proportionem brachiorum. Ratio huius est quòd pondera, quæ ita inuicem se habent, æquiponderare sibi inuicem ostenduntur in 6. & 7. Archimedis libri primi de æquiponderantibus, ex eo quòd reducuntur ad libram habentem brachia, & onera æqualia.

Tertiò si motus grauium sit ad medium quod est centrum mundi; dico libram æquis brachiis & oneribus à situ horizonti parallelo subductam non redituram sponte sua in pristinum statum.

Sit enim (Fig. 106.) libra bc in situ ad horizontem obliquo, sitque b depressius, c elatius pondus; inter se vero b & c sint æqualia. Sit præterea g centrum mundi, ad quod conueniant rectæ bg, cg: per b & c agantur tangentes bh, cd. Quoniam c est superius & b inferius, erit recta gc ex centroeducta maior rectâ gb: ergo in triangulo gbc, angulus gcb erit maior angulo gcb: quoniam verò arcus bc est quadrante minor, angulus bae erit acutus: sed angulus abh est rectus; ergo duæ ag, bh concurrunt ad partes g.

Ex angulo gbc maiori auferatur cbu æqualis minori bcg; cadet ergo punctum u inter puncta c, g. Et quoniam cd, bl sunt parallelæ, anguli alterni bld, lcd erunt æquales: sed bld externus est maior interno & opposito lbg in triangulo lbg; ergo angulus lcd est maior angulo gbl: sed anguli lbc, dcb sunt æquales, vt pote recti, item ablatus cb, ubc: ergo residui lbu, ucd sunt æquales: cum ergo ucd sit maior angulo gbl, erit lbu maior angulo gbl; excessus autem erit angulus rectilineus, ac proinde maior angulo contactûs.

Vel ergo recta bl cadit inter rectas bu, bg; vel congruit cum bg: vel inter bl, bu cadit bg. Primò cadat recta bl inter bu, bg (Fig. 100.) Cum ex maiori angulo ubl ablato angulo contactûs ebl relinquatur angulus mixtus ube, & ad minorem gbl addito eodem angulo conta-

Quis conficiatur $g b e$, erit $g b e$ minor adhuc, quam $u b e$, siue quam $u c m$: ergo cum descensus per $b e$ minus declinet à recto descensu qui fieret per $b g$, magis verò declinet descensus per $c m$ à recto qui fieret per $c g$, erit pondus b , ratione situs, grauius pondere c : ergo pondus b descendet.

Secundò recta $b l$ congruat rectæ $b g$ (Fig. 101.) Cum angulus $l b e$ mixtus, sit angulus contactus demptus ex rectilineo $u b l$, erit $u b e$, hoc est $u c m$, maior quam $l b e$: ergo sicut in priori casu ostensum est, graue b ratione situs erit ponderosius, & descendet.

Tertiò inter rectas $b l$, bu cadat recta $b g$ (Fig. 102.) Quoniam recta $b l$ tangit circulum in b : recta $b g$ secabit circulum inter puncta b, o : ergo angulus mixtus $g b n$ erit minor angulo mixto $u b n$ seu $u c m$: ergo, sicut in primo casu ostensum est, punctum b descendet; quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

In quarta huius libri propositione monuimus libram nullam appellari ab Archimede, nisi fuerit horizonti parallela; cuius rei causa haud scio an fuerit illa ipsa quæ mouit Iordanum ad scribendas propositiones superiores. Vtunque tamen se tunc habuerit cogitatio Archimedis, demonstrata nunc à Iordano nihil obsunt iis quæ in illa quarta scripsimus; quia possumus in omnibus illius casibus adiungere libram grauitate carentem è qua graue quodcunque suspensum pendeat per parallelas ad horizontem perpendiculares, & nulla grauitate præditas; sicuti ipse Archimedes idipsum facit in libro de quadratura parabolæ. Quòd si rotundiùs solui nodum optes, dici potest libræ Archimedæ principia ita progredi, quasi nullum esset Iordani assumptum, idem eò *velociùs descendere, ac proinde grauius esse, quò eiusdem deorsum motus rectior, & perpendiculo similior fuerit*: Siue enim assumptum istud sit verum, siue falsum; rectè potest aliquid ratione concludi ex hypothesi, quod nullum sit, vt vberius explanatum suprà fuit.

PROPOSITIO XXXVII.

Experimentum quod ope libræ cœpit Villalpandus in ponderando congio Farnesiano, discutitur.

Villalpandus tom. 3. pag. 351. testatur congium Farnesianum aquâ plenum balance, quam iustam fuisse ait, filo suspensâ examinatum à se fuisse; inter examinandum autem hoc contigisse. Cum congius in vnâ lancium statutus fuisset, in alterâ verò pondera primùm inani vasi æquiponderantia, tum lapis decem æquas libras pendens; & cum deinde in congium aquam P. Griembergerus è quadam ampullâ effunderet, *mirum*, inquit, *dictu effusâ tandem sexies ampullâ vas vsque ad colli terminum ex aquo plenum, pondera simul eleuata, libraque examen ita in medio fixum stetit, vt non mobilis libra*

videretur, sed fixa ac permanens: atque ita permansit donec cominus omnes accedentes, oculati possint esse testes iuxta librationis vasis ex aquo pleni.

Ludouicus Sauot in libro gallicè scripto de numismatis antiquis tertiâ parte c. 32. existimat Villalpandum narrare pondera eleuata fuisse sola vi congiij & aquæ immissæ; ergo verò existimo id neque ita narrari, neque re ipsâ factum esse; sed id, vt solet, manu zygotatæ (is erat Grembergerus vt ex narratione conjicitur) sensim totam libram adducentis ad æquilibrij positionem: simul autem atque ita adducta fuere, libram hæsisse in illo situ.

Demus tamen pondere solius congiij pleni eleuata fuisse pondera; causamque illius eleuationis simul & æquilibrij consequuti inquiramus. Perdoctus Sauot existimat causam esse reducendâ in genus libræ (quod Italis & Hispanis familiare esse dicit) habentis centrum in superiore scapi parte, quod fallacissimum esse satis patet. Istud vt negem duo aut tria faciunt: primum quod ipse Villalpandus paulò ante nimirum pag. 349. libræ veram formam descripsit, vt doceret cuiusmodi libra ad istud adhibenda foret. *Libræ inquit perfecta ratio in eo potissimum consistit quod ex rectâ regulâ à medio suspensâ ex vtraque parte sit sibi vniformiter equalis, crassitudine, longitudine, figurâ, & pondere, atque vt OMNINO RECTA sit, & ab eius extremis binæ, æquales, & vniformes pendeant lances.* Cùm ergo deinde testetur libram quam vsurpauit fuisse *aquam*, cæteras verò ipse appellet *iniquas*, satis docet à se adhibitam esse libram, quam paulò superius adhibendam esse docuerat.

Alterum est, quod quamuis libra Villalpandi habuisset centrum supra lineam horizonti parallelam ex cuius extremis lances suspenduntur, atamen non apparet causa cur in æquilibrio consistere debuissent, quod tamen factum narratur; nec dubito quin ita euenerit saltem iudicio sensûs, ita vt nullum inclinatæ libræ vestigium agnoscerent quicunque præsentés aderant. Vnde vlteriùs conficio discrimen ponderum admodum exiguum fuisse, si enim notabile fuisset, notabilis quoque inclinatio libræ eiusmodi contigisset. Quod verò Sauot ait, lancem cui impositus erat congius *longè* à mensa cui opposita lanx cum suo pondere incumbere, eleuatam fuisse; fateor eleuatam narrari à Villalpando; nego tamen *longè* eleuatam dici. Quod cùm non soleat vulgo fieri, nec dicatur factum, placuit tamen huic Authori, vt tantò verosimiliùs dicat aquam ponderis nouem librarum in lance eleuatâ fuisse non solùm attollere vt-cunque pondus decem librarum in lance depressa situm, verum etiam vsque eò donec libræ iugum parallelum esset horizonti; quod postremum est prorsus impossibile; nam cùm brachia libræ ponantur æqualia, & horizonti parallela, si pondera sint inæqualia, non æquiponderabunt sibi inuicem. Laudatus itaque Autor gratis dicit cap. 30. tertiæ partis isto Villalpandi in libra tractanda errore induci magnam ponderum varietatem; nullus enim, vt puto, fuit error, & quamuis aliquis fuerit sensu per-

cipi non potuit, nec proinde in eo genere trutinæ quod adhibitum fuit, notabilem aliquod causare ponderum discrimen.

Dixerit fortasse aliquis eleuationem illam libræ potuisse accidere, ex eo quod quando centrum libræ est in medio librili & in eius grauitatis centro, ipsa sua sponte redit ad æquilibrium ab illo deturbata, si causa deturbans cesserit vt ex Iordano demonstratum fuit quod contingere nequit si punctum suspensionis fuerit in superiori vel in inferiori scapi parte, prout apertè colligitur ex naturâ huius libræ, & ipse Iordanus huc respicit quæstione 25. ex. Edit. Veneta citata *si sub regula centrum designetur vix continget in hoc situ stabili pondera*. Imo Villalpandus postquam dixit vitiosas esse libras quas Romæ vidit omnes, eò quòd earum lances *ex curuatis sursum regulis pendent*, subdit ex harum constitutione hoc vnum necessarium sequi, *vt quamuis æquissima pondera lancibus adhibeantur, quiescere tamen nullâ ratione possint*. Vnde colligi posse videtur Villalpandum exponendo libræ vltroneum (si tamen vltroneus fuit) motum donec scapus parallelus horizonti existeret, voluisse indicare omni vitio eam caruisse. Istud tamen non placet, quia iam demonstrauius illum libræ motum non euenire quando pondera in mundi centrum feruntur, prout ferri iam certum est apud Physicos, & apud ipsum Villalpandum pag. 319.

Non deerit qui dicat germanam huius causam extitisse, quòd cum libra omni ratione exacta esset, cum primum ventum est ad æqualitatem ponderum, impetum quamuis leuem quo infusa labebatur aqua præponderasse, illumque euauuisse dum ad situm horizonti parallelum peruentum fuit: ergo &c. quod erat propositum.

S C H O L I V M.

Libet hoc loco animaduertere in restituendis ponderibus antiquis & mensuris multos mirâ opinionum varietate laborasse, singulosque in refellendis aliorum sententiis aliquid adducere vnde earum fundamenta conuellantur. Agricola Alciatum Budeumque redarguit, quod cum per denarios antiquos explorare istud tentarint, iustos non adhibuerint, neque eos quos adhibere debuissent. Villalpandus pag. 305. Lucam Pætium reprehendit quòd cum istud aggrediatur per Congij Farnesiani (quem decem aquæ librarum capacem esse ex inscriptione contendit) examen libræ factum; trutinam illam adhibeat quam Romanam appellamus; eam enim indicari putat his Pati verbis sicque plenum cum iustissima trutina (qua hodie Romæ vtimur) appendissem, inueni &c. Eiusmodi autem trutinam, infinitis propemodum erroribus subiacere contendit; imò & balances omnes quas Romæ vidit, iniquas esse eo quod ex curuatis sursum regulis constent. Villalpandi rationem in eodem congio trutinando castigat postremus eorum, quos vidi, Sauot, quo autem successu iam diximus. Pede antiquo pondera & mensuras restitui posse concedunt omnes; sed Patus Colotianum rejicit, aliumque probat; è contrario Sauot cap. 29. partis tertiæ aliis reiectis Colotiano vtendum censet. Pedis ipsius longitudinem in libris editis representatam ab Auctoribus, castigandam censent Auctores, eò quod charta à pralo madida, postea con-

trahi soleat, dum exsiccatur; sed contractionis modum alij alium statuunt: Snellius contendit chariam sexagesima sui parte fieri minus latam, Ricciolus l. 2. Almag. c. 7. n. 2. quinquagesimâ tantum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Quid Aristoteles problemate decimo tertio Mechanicorum intelligat per τὸ ζυγόν, quod Leonicus *libram* vertit.

Quod Aristoteles cap. 10. proponit his verbis διὰ τί ἔχον ὅταν ἀδὲ βάρος ἢ, κινεῖται τὸ ζυγόν, ἢ ἔχον βαρὺ, ὁμοίως δὲ καὶ τεύχεον &c. Leonicus ita vertit. *Cur facilius quando sine pondere est, mouetur libra, quàm cum pondus habet? similique modo rota &c.* Manifestum certè est ex ratione quam Philosophus assignat, vt soluat quæstionem, τὸ ζυγόν ibi esse machinam quandam quæ circa axem horizonti perpendicularem voluatur, sicuti & ipsa figuli rota cuius etiam meminit, torqueri solet. Istius porrò machinæ vsus est ad onera imposita circumquaque in orbem deferenda, cuiusmodi est in Nonnarum cœnobiis tympanum illud quod gallicè *le tour* (eò quòd torni ratione versetur) & quo foris asportata intrò inuehuntur. Rationem itaque huius reddit Philosophus, quia graua non solum resistunt quando sursum & in oppositum eius quo sponte vergunt, impelluntur, verùm etiam quando in obliquum & ad latus, vt euenit in versatione huius machinæ quam ζυγόν appellant.

Cæterùm de hac ipsâ machinâ intelligi consequenter debet idem ipse Aristoteles cap. 13. διὰ τί ἔχον κινεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ ζυγόν οἱ μείζους τῶν ἐλαπτόνων κόλλοπες, καὶ οἱ αὐτοὶ ὅμοι λεπτότεροι: ὥστε τὸ αὐτῆς ἰσχύει τῶν παρυτέρων; An quia, inquit, ζυγόν & ὀνύχον pro centro sunt, quæ autem inde procedunt magnitudines sunt instar linearum à centro educatarum? Celerius autem & plus mouentur quæ maiorum sunt circularum ab eadem vi, quàm quæ minorum. Subdit post pauca διὰ τὸ πρὸς μὲν τὸ ζυγόν τὰς κόλλοπας ὀργανὰ ποιεῖται, οἷς ἔχον σπείρειται, ἐν δὲ τοῖς ὄνοις πλεον γίνεταί τὸ ἐξω τῶ ζύλου, αὐτῇ δὲ γίνεταί ἢ ἐκ τῶ κέντρου. Censeo tamen ζυγόν hic sumi non pro totâ machinâ, sed (prout in aliis plurimis per synecdochen solet) pro eius parte circa quam tanquam cardinem versatur; ab illâ enim vt centro prodeunt trabes seu vectes totum tympani ambitum dimetientes, & tabulatum sustinentes. Κόλλοπες autem vel sunt trabes inde procedentes, vel certè cylindraceum organum, aut aliud simile.

Ex his liquet ζυγόν hic non esse *ergatam* vt volunt Henricus Stephanus in lexico, & Philander in cap. 4. libri 9. cum ergata fune ductorio leuet onera, ζυγόν autem non leuet, sed circumferat in orbem. Sed omnium longissimè aberasse mihi videtur Budæus in Commentariis linguæ græcæ pag. 471. dum ζυγόν iugum lyræ interpretatur, quod manu sinistrâ tenent cytharoedi, & κόλλοπες veluti verticilla quibus chordæ intenduntur: cum lyræ istud iugum nec ad sustinenda onera, eaque circumferenda sit factum; nec appareat quo pacto citius versetur quando nullo premitur

onere; quæ tamen omnia de suo iugo tanquam nota Aristoteles assumit; causa verò huius experimenti allata quid ad lyram?

Facilius concesserim Stephano & Philandro, ipsique interpreti Leonico *δρυς* esse fuculam, machinam scilicet illam tractoriam, quæ axe horizonti parallelo, & vectibus versata circumuoluitur fune quo leuantur onera; quò autem gracilior fuerit iste axis ligneus, eò longior erit pars vectis extra lignum eiusdem axis excurrentis, ac proinde cùm id tantum quod est extra eiusmodi lignum habeatur pro linea ex centro, tanto erit eiusmodi linea longior vt Philosophus docet, quo axis fuerit gracilior. Ergo &c. quod erat propositum.

COROLLARIUM.

Hinc patet perfacile esse viros etiam peritissimos errare in exponenda vera vocum aliquarum significatione, quoties eæ sunt desumptæ ex arte quam ipsi ignorent; quis autem omnes calleat, sitque omnibus, vt dicitur, armis ornatus? id certè optandum potius est quàm sperandum; quamuis enim eiusmodi generalem omnium comprehensionem Vitruuius exigat à suo quem efformat Architecto, satis tamen intelligitur plus exigere quàm oporteat, & quàm fortasse velit. Duo hîc referam de quibus interrogatus aliquando fui ab homine qui ex Geometria peti posse aliquam lucem suspicabatur, in interpretandis Scriptorum aliquot locis. Quæsiuit de loco illo Liuij l. 8. *Clypeis antea Romani vsi sunt, deinde postquam facti sunt stipendiarij, scuta pro clypeis fecere*: vbi (vt rectè notat Turnebus. l. 11. c. 27.) nisi clypeum à scuto distinguamus, necesse est à sensu aberremus: idem ipse Liuius iam libro primo scripserat *imperatum esse secundæ classi pro clypeo, scutum*; vbi Halicarnasseus pro clypeo *ἀσπίδα* græcè habet, pro scuto *σπεδόν*. Respondi sicuti ex Virgilio intelligimus clypeum fuisse rotundum, cùm cyclopis oculum, qui rotundæ figuræ est, argolico comparet clypeo; ita ex Geometris constare *σπεδόν* esse figuræ periphericæ oblongæ, quæ vulgò dicitur *oualis*: Geometræ enim istam figuram vocant sæpius quidem *ἐλλειψιν*, aliquando tamen *σπεδόν*, vt Eutocius obseruat Commentariis in Apollonij conica sub initium. Alterum verò quod rogatus sum attinet ad locum ex Anastasio Bibliothecario desumptum, in vita Gregorij II. Autoris hæc sunt verba; *trecenta septuaginta quinque millia Sarracenorum vno sunt die interfecti, vt eiusdem Eudonis Francorum Ducis missa Pontifici epistola continebat: mille tantum quingentos ex Francis fuisse mortuos in eodem bello dixerunt. Adiciens quod anno præmisso in benedictionem à prædicto viro eis directis tribus spongiis, quibus ad vsum mensæ Pontificis apponuntur, in hora qua bellum committebatur idem Eudo Aquitania Princeps populo suo per modicas partes tribuens ad sumendum eis, nec vnus mortuus ex his qui participati sunt.* Hunc locum emendatiùs repræsentat Typographiæ Regiæ Parisinæ codex pag. 275. ita enim habet, *qui Pontifex anno præmisso in benedictionem eis direxerat tres spongas, quibus ad vsum mensæ Pontifices utebantur.* Quæsiuit igitur à me vir Historiæ

amantissimus an quid edules illæ spongiæ sint ad geometram attineret dicere: sibi enim non satis probari quod doctissimus aliqui Scriptor ait illas fuisse sine vlla metaphora spongiarum quibus mensa Pontificis detergi sole-
ret. Respondi spongiarum illas tres, mihi videri fuisse tres ex illis panes, qui Eulogiarum nomine mitti solebant; quem usum olim viguisse, doctè ostendit Cardinalis Baronius tom. 3. ad ann. 313. Geometram verò statim suspi-
cari à figura & similitudine istos panes appellatos fuisse spongiarum; spon-
giarum enim, quibus vulgò utimur, figuram habent quasi Hemisphæricam, ut & panes; suntque molles & innumeris ocellis præditæ, quod & pani-
bus præsertim primariis competit. Ille quidem nutu favit coniecturæ; autorem tamen illius significatûs desiderare visus est, ne minimè dubi-
taret de meo sensu: sed statim ad manum fuit vigesimus Isidori de Origini-
bus liber, ubi cap. 1. panem quemdam describit spongiæ nomine appel-
latum: panis, inquit, aqua diutissimè laxatus, similam modicam accipit, & fer-
mentum modicum, & habet humectationis plusquam omnis panis, unde & spongiæ
nomen accepit. Tum planè acquieuit responso, pronuntiauitque illud quod
hîc inculcatum volumus, nunquam Interpretem posse nimis cautum esse in perqui-
renda vi Verborum qua vertenda habet, Veniâque dignissimum esse, si quid propterea
tantum peccet in isto genere, quia non omnes artes calleat; iurèque potiori in Inter-
prete quàm in Architecto vniuersum scientiarum apparatus requiri oportere.

S C H O L I V M.

Animaduersione dignum censeo. Primò esse quasdam voces quas Aristoteles hîc
vsurpat in duplici significatione $\omega\alpha\rho\tau\iota\omicron\nu$ enim vel $\omega\alpha\rho\tau\iota\omicron\nu$ apud ipsum est aliquando
punctum suspensionis quod $\kappa\rho\epsilon\mu\alpha\sigma\theta\acute{\omicron}\nu$ Archimedes appellat propos. 6. quadraturæ para-
bolæ, aliquando est perpendicularis ad horizontem per punctum suspensionis ducta $\tau\omicron$
 $\gamma\delta$ $\omega\alpha\rho\tau\iota\omicron\nu$ inquit cap. 2. $\delta\epsilon\iota$ $\kappa\alpha\theta\epsilon\lambda\epsilon\tau\omicron$. Vox $\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\zeta$ similiter modo sumitur pro totâ
librâ cap. 1. $\gamma\acute{\iota}\nu\epsilon\tau\alpha\iota$ $\gamma\delta$ $\tau\omicron$ $\mu\epsilon\theta\acute{\iota}$ $\omega\alpha\rho\tau\iota\omicron\nu$ $\kappa\acute{\epsilon}\nu\tau\eta\sigma\theta\epsilon\nu$, $\mu\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta$ $\delta\epsilon$ $\tau\omicron$ $\tau\omicron$ $\delta\epsilon$ $\epsilon\pi\iota$ $\mu\epsilon\rho\theta\epsilon$ $\tau\epsilon$ $\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\zeta$,
 $\alpha\iota$ $\epsilon\kappa$ $\tau\epsilon$ $\kappa\acute{\epsilon}\nu\tau\eta\sigma\theta\epsilon$ modò accipitur pro lance vna qua ex scapo pendet ut cap. 20. $\tau\omicron$ $\mu\epsilon\theta\acute{\iota}$ $\omicron\upsilon\upsilon$
 $\epsilon\pi\iota$ $\theta\acute{\alpha}\nu\tau\epsilon\sigma\sigma\alpha$ $\acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota$ $\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\gamma\alpha$, $\tau\omicron$ $\delta\epsilon$ $\epsilon\pi\iota$ $\theta\acute{\alpha}\nu\tau\epsilon\sigma\sigma\alpha$, $\alpha\upsilon\tau\iota$ $\tau\epsilon$ $\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\zeta$, $\tau\omicron$ $\sigma\phi\alpha\iota\sigma\omega\mu\alpha$. Vox $\epsilon\acute{\alpha}$
 $\lambda\alpha\gamma\zeta$ pariter aliquando sumitur pro scapo seu pro iugo transverso unde lances pendent,
ut dum loco citato purpurarij dicuntur excavare occultè scapi alteram partem, & in
eam liquatum fundere plumbum; aliquando accipitur pro totâ trutinâ Romana, capi-
te nimirum 20. de qua fusius postea. Porro vocem $\tau\omicron$ $\zeta\upsilon\gamma\delta\epsilon\nu$ videtur mihi Aristoteles
quoties pro libra vsurpat, sumere semper pro ea cuius brachia virinque sunt equalia;
cùm tamen \omicron $\zeta\upsilon\gamma\delta\epsilon$ in præmio & initio cap. 1. sumi videatur pro quacunque trutinâ,
sicuti sumitur apud Archimedem propositione 6, tetragonismi paraboles. Porro sicuti
apud Græcos eadem vox $\zeta\upsilon\gamma\delta\epsilon$ sonat & iugum quod subeunt boves agrum araturi, &
libram de qua nunc agimus; ita pariter iugum apud Latinos duplicem illum signifi-
catum obtinui; unde in 2. de diuina. apud Tullium Roma dicitur nata cum esset in
iugo luna, id est in signo cælesti quod libra nuncupari solet.

Secundò libra scapum transversum atate Aristotelis fieri ex ligno consuevisse, unde
technarum suarum ansam sumebant viles illi purpurarij; purpurarios enim ap-
pello

pello respiciens ad purpurariam illam *Astorum* 16. πορφυρέων; quid autem ponderando penderent conchasne, an lanam pannosque infectos colore purpureo an quiduis aliud mihi satis non constat: viles autem fuisse eiusmodi artifices satis illigitur ex eo quod tam illiberalem fallendi modum adhibere vulgò censerentur; & quod *Plutarchus* in *Vita Periclis* ut notum ponat, nos quaedam mirari, ut purpureas vestes, quorum artifices contempnamus, contra quam accidat in operibus virtutis, eorum enim admiratio creat in nobis emulationem, & imitandi studium.

PROPOSITIO XXXIX.

Quid *Aristoteles* in *Mechanicis* scripserit de conuenientia circuli, libræ, & vectis.

I. *Aristoteles* causam admirationis quam scientiæ machinalis effecta pariunt, in circulum refundit ipso initio *Mechanicarum* questionum, ita ut quæ admiranda vulgò videntur in libra, ad circulum referantur; quæ in vecte, ad libram; reliqua verò prope omnia in machinalibus motibus, ad vectem τὰ πρὸς τὸν ζυγὸν γινόμενα εἰς τὸν κύκλον ἀνάγκηται τὰ δὲ πρὸς τὸν μοχλὸν, εἰς τὸν ζυγὸν, τὰ δ' ἄλλα πάντα σχεδὸν τὰ πρὸς τὰς κινήσεις τὰς μηχανικὰς, εἰς τὸν μοχλὸν. Hinc problemate tertio inquirens cur exiguæ vires vecte magna mouent pondera, vectis insuper onus accipientes: an inquit huius causa est quod vectis libra sit; ὁ μοχλὸς ζυγὸν κατωθεν ἔχον τὸ ἀρτίον, καὶ εἰς ἀνίστα δινηρμόδιον; τὸ δὲ ὑπομόχλιον ἔστι τὸ ἀρτίον μένει δὲ ἄμφοι ταῦτα ὡς περὶ τὸ κέντρον. Problemate verò 20. cur statera paruo appendiculo magna trutinet causam interrogando reddit, ἢ ὅτι ἅμα συμβαίνει ζυγὸν καὶ μοχλὸν ἐν τῷ ἐλάσσῃ. deinde explicaturus quo pacto ἐλάττω fit μοχλὸς αἰετὰ τὸν ἐλάττω γίνεσθαι μοχλὸν ἀνεστραμμένον. Libra igitur reducitur ex *Aristotele* ad circulum quia sicut in circulo est centrum, ita in libra est punctum suspensionis; & sicut in circuli descriptione dum lineæ motu fit, extremum lineæ immotum hæret in centro, ita dum libræ versationes fiunt, longitudines eius describunt circulum ex puncto suspensionis tanquam ex centro; τὰ δὲ ἀρτία ἔστι κέντρον cap. 9. & cap. 3. dixit tam ὑπομόχλιον in vecte, quam ἀρτίον in librâ manere ὡς περὶ τὸ κέντρον: ibidem dixit ἀρτίον esse κατωθεν, quod intelligendum est, quia perpendicularum vnde pendet libra, vel quod libræ examen dirigit, transit per libræ punctum illud manens; vnde fit ut tam ipsum punctum, quam perpendicularum eodem ἀρτίον nomine donentur; denique sicuti in circulo ab eadem vi illud punctum mouetur citius, quod longius à centro distat, ita in librâ illud punctum mouetur citius ab eadem vi, quod longius abest à ἀρτίῳ.

II. Vectis reducitur ad libram: eò quod sicuti in librâ distinguuntur ἀρτίον siue punctum immobile, & hinc inde duæ longitudines cum duobus ponderibus examinationem facientibus: ita in vecte est aliquid immobile velut centrum, appellaturque ὑπομόχλιον, latine apud *Vitruvium* lib. 10. cap. 8. *pressio* eò quod vecti ad onus admoto suppositum maximè prematur: sunt item duæ longitudines vectis, una quæ quasi lingua sub

Y y

onus subditur, altera ex aduerso quam suis viribus premit vectarius; unde mouens & motum pondus respondent duobus libræ appensis ponderibus. Hinc facile intelligitur ratio quam problemate 3. paulò ante proposito assignat: cum enim vectis ea pars quam vectarius viribus suis deprimit sit instar brachij libræ, id verò quod *πομολίω* incumbit, instar centri; alterum verò brachium sit ea quæ velut rostrum sub onus mittitur: & cum mouentis vires admotæ & oneris rursus leuandi grauitas sint instar ponderum suspensorum: dicendum est ideo facilius elationem oneris fieri, quoniam ab æquali pondere celerius mouetur longior recta earum quæ à centro sunt: & quia sicuti in libra *vt se habet graue mouens ad motum, ita subcontrarie se habet longitudo moti ad longitudinem mouentis* ὁ τὸ κινέμενον ἐὰν ὀψὲς τὸ κινῆν, τὸ μᾶλλον ὀψὲς τὸ μᾶλλον ἀντιστοιχῇ.

III. Ek his clarè liquet Aristoteli cognitum fuisse theorema illud quod Archimedes longo post interuallo temporis demonstrauit propositionibus sexta & septima libri primi de Æquiponderantibus, quod & nos in alio etiam libræ genere ostendimus suprâ propositione 18. 19. 20. Archimedes igitur hoc summum ibi præstitit vt theorema à maioribus acceptum noua ratione demonstraret; quod facile mihi persuadeo; præcipue cum ex principio Aristotelico usurpato initio Mechanicorum possit ostendi diuersa prorsus via ab Archimedeâ vt propositione sequenti patebit: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XL.

GRauia ex longitudinibus à centro prodeuntibus suspensa si pari velocitate descendant se habent vt longitudo ipsæ contrario ordine sumptæ.

Sit pondus (Fig. 103.) a b ex se grauius, & pondus c ex se leuius, affixa punctis b, c ita vt ex illis liberè pendeant: puncta autem b & c sint extremitates rectarum f c, f b ex centro f ductarum, & horizonti parallelarum. Pari velocitate grauia a b & c intra idem tempus lata fuerint, & graue e decurrerit arcum e e; graue verò a b arcum b d. Dico vt pondus b a ad pondus c, ita esse lineam f c ad lineam f b.

Ponderi c pondus a æquale auferatur ex pondere b a, residuumque sit pondus b. Quoniam igitur pari velocitate pondera a b & c feruntur, & pondus a b est maius, linea f b erit minor linea f c: si enim esset maior velocius ferretur solum pondus a, quia describeret peripheriam maiorem intra æquale tempus: si autem esset æqualis, solum pondus a æque velociter ferretur ob parem rationem: ergo addito pondere b, compositum pondus a b velocius ferretur: est ergo recta f b minor recta f c.

Recta f c occurrat arcui b d in u. Quoniam recta f u est minor quàm f e; & vt f u recta ad f e rectam, ita est arcus e e ad arcum b u, erit e maior arcu b u; sed b d arcus est æqualis arcui e e: ergo b d arcus est maior arcu b u; ergo u cadit inter b & d. Rursus quoniam si solum gra-

ue a moueretur ex b, quando ipsum a esset in u, graue c esset in e, & semper angulus b f u foret æqualis vel idem cum angulo c f e: ergo intra illud tempus graue a causerit velocitatem b u: ergo pondus b causerit reliquam velocitatem u d: nam composita velocitas constat ex velocitatibus, quas singulæ partes totius grauis produciunt; ergo vt pondus a ad pondus b, ita arcus b u ad u d arcum: & inuertendo vt pondus b ad pondus a, ita arcus u d ad b u: ergo componendo vt pondus b a ad a seu ad c, ita arcus b d ad b u arcum.

Quoniam igitur vt arcus b u ad c e, ita se habent semidiametri b f, c f: & quoniam arcus c e, b d sunt æquales, vt arcus b u, b d ita erunt semidiametri b f, c f: sed arcus b u, b d se habent vt pondera c & b a, sicuti ostensum fuit; ergo vt pondera c & b a, ita semidiametri b f, c f; & inuertendo vt pondus b a ad pondus c, ita semidiameter c f ad semidiametrum b f; quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum fit, si ex recta b f abscindatur f h æqualis ipsi f c, & pondus c intelligatur transferri in h, committi æquilibrium. Cum enim pondera a b & c ex extremis libræ b c ex f suspensæ punctis b & c, sint æqualis velocitatis, in descendendo erunt pariter æqualis resistentiæ in ascendendo: ergo committetur æquilibrium & æquiponderabunt sibi inuicem: recta enim b h si sit, horizonti parallela quiescet; si autem sit ad illum inclinata, sese propria vi in eiusmodi situ collocabit, vt cum Iordano ostendimus.

COROLLARIUM II.

Graua, si fuerint vt brachia libra subcontrariò sumpta, æquè ponderabunt. Hæc propositio, vt patet, est conuersa illius quam modò ostendimus: ita verò demonstratur. Vt b f ad f h brachium libræ, ita sit pondus h vel c ad pondus a b: dico pondus h æquiponderare ponderi a b; siue velocitatem ponderis h esse æqualem velocitati ponderis a b. Si enim velocitas ponderis h non est æqualis velocitati ponderis a b; erit vel maior vel minor. Sit igitur, si fieri potest, maior vel minor. Sit verò pondus g, cuius ex h suspensi velocitas sit æqualis velocitati ponderis a b ex b suspensi. Quoniam ex b & c pendent pondera a b & g, æquè velocia, pondus a b ad pondus g erit vt recta f h ad f b ex iam demonstratis; sed vt recta f h ad f b, ita ponitur esse pondus a b ad pondus h: ergo vt pondus a b ad pondus h, ita ipsum pondus a b ad pondus g: ergo pondera g & h sunt æqualia quod est absurdum, cum ponantur esse inæqualia. Si ergo graua &c.

COROLLARIUM III.

Hæc est, vt puto, via qua utebantur Mathematici ante Archimedeam demonstrationem, quam ego quidem isti quamuis ingeniosè excogitata præfero. Cæterum hanc etiam, quantum diuinare licet in tanta codicis

corruptela methodum adhibuit Iordanus in opusculo de ponderositate editionis Venetæ apud Curtium Troianum anno 1565. nam prima quæstione hoc videtur velle quod nos propositione 34. 35. 36. proposuimus; & in sexta, illud quod modò demonstraui.

Istud ἀντιστοιχίας quod in æqualitate vtrunque constituenda interuenit in eò est positum, quòd quantum vna pars libræ exceditur in pondere, tantum alteram excedat in longitudine à centro, prout enim longius receditur ab eo, crescunt vires premendi deorsum; ac proinde quando libra in æquilibrio posita diuidi dicitur bifariam, & in æquas partes, sensus non est vel longitudines esse æquales, vel pondera ipsa inuicem; sed virtutem ponderandi quæ ex ipso pondere & ex ipsa distantia simul sumitur, esse vtrunque æqualem. Quapropter mirum videri non debet si ab Aristotele quæstione 20. id quod excurrit à centro φάλαγγ (genus est stateræ vt propositione sequenti dicemus) ad eam partem cui adhæret pondus, quod σταίρωμα nominauit, ἡμισυ φάλαγγ dicatur: est enim ἡμισυ vnà cum pondere quantum ad virtutem ponderandi. Atque hoc loquendi genere id pondus quod in se est minus, dicitur tamen ab Archimede propositione 5. aliàs 7. libri primi Æquiponderantium μείζον ὅσε ἰσορροπῶν: vel vt interpretatur Eutocius μείζον ἢ τὸ ἰσορροπῶν *maius quantum ad virtutem deprenenda libræ spectat.* Quia vero virtutis Iustitiæ genuinum symbolum est libra, ideo illam etiam teste Aristotele ἀντιστοιχίας φάλαγγος sectatur, quod etiam δίσκου ἀ δίσκου quasi bipartitum græcè nominari idem affirmat; vnde παρæmia δίσκου ἑκατέρου & δίσκου φάλαγγος.

PROPOSITIO XLI.

Quodnam trutinæ genus sit φάλαγγ, & quâ ratione paruo appendiculo magna pensitet onera de mente Aristotelis in Mechanicis quæstionibus.

Philosophus problemate 20. inquitur cur φάλαγγ quæ carnes suo tempore ponderabantur paruo appendiculo magna trutinaret onera, cum alioqui tota non esset nisi ἡμισυ; qua enim parte carnes imponebantur solum suspendebatur lanx; in alterâ verò parte sola erat φάλαγγ.

I. Vt Aristotelis mens planè percipiatur prænoto quædam. Primò esse vulgare trutinæ genus quam *Romanam* dicunt, & quæ vt ait Isidorus l. 16. orig. cap. 24. *duas lances non habet; sed virga est signata libris & vncijs, & vago pondere mensurata.* Subdit absolutè dici *Campanam*, idque à regione Italiæ nomen accepisse vbi primùm eius vsus repertus est. Quod ad inuentores & nomen attinet, crediderim ita verum esse, vt id nominis, cum apud Antiquiores non extet, post irruptionem Gotthorum inditum sit stateræ; ideoque Campani inuentores eius dicantur, quòd, postquàm hac hominum illuvie omnes pæne artes extinctæ erant, ipsi stateram restaurarint, suoque opificio nobilitarint. Cæterum isto ipso Isidori loco abu-

titur Angelus Rocca Episcopus Tagastensis in tractatu de Campanis pag. 26. dum ex eo probat tintinnabulum æreum iam tum *campanam* esse appellatum. Rectius ista *campana* voce pro *staterâ* vitur Anastasius Bibliothecarius in vitâ Eleemosynarij.

II. Secundò idem trutinæ genus longe ante Isidorum descripsit Vitruvius l. 10. cap. 8. appellatque *stateram*: itaque eam describit ut *ansa quâ sustinetur sit propius caput illud scapi collocata, unde lancula pendet* (hodie pro lance, vncos substituunt artifices) *æquipondium verò in alteram partem scapi per puncta vagando, quo longius, aut etiam ad extremum perducitur paulò, etiam pari pondere, amplissimam pensionem parem perficit, per scapi librationem & examinationem longius à centro* (id est à puncto ubi axiculi quibus immittitur *ansa*, prominent) *recedentem*.

III. Tertiò Eustathius Iliad. µ. pag. 876. animadvertit ab Homero describente Achiuorum & Troianorum diu inuicem pugnantium ἰσπαλῆς, & si ita loqui liceat ἀτάλαντον, in neutram partem inclinante victoriâ, usurpari comparationem petitam à pauperculâ æquitatis tamen amante sceminâ quæ summa exactione lanæ pensum aliis distribuendum exploratura, adhibet vel τάλαντα, vel σαθρὸν. Quibus verbis duo genera trutinarum designari ipse putat, illo libram geminis lancibus instructam, ideòque non in singulari τάλαντον, sed in plurali τάλαντα scriptum esse à Poeta, ut indicaret τὰς δύο πλάσσεις τῶ σαθρῷ; isto verò ὁ κλύ πνα ὄγκου πρὸς ὃν ἀντιστοιχῶσι τὰ σαθρὰ, magnitudinis cuiusdam pondus cui ex aduerso quæ ponderanda sunt, pari pensione opponuntur quibus verbis apertum est istud aliud trutinæ genus ad *stateram* esse reuocandum; cum non duas lances, sed ex vna parte pondus quoddam habeat, ad quod examinantur ea quorum pondus perspectum habere cupimus. Talem porrò esse ait τὴν λίτραν, ἢ τὰ τοιαῦτα. Sciendum verò est ipsum paulo ante docuisse hanc vocem σαθρὸς posse sumi latè & strictè (quod & multis aliis competit) latè quidem & ὀλίκως usurpari pro trutina binis constante lanculis, cui quinque respondeant voces τάλαντον, πρῶτῃ, σαθρὸς, ζυγὸς, πλάσσεις. Vnde liquet λίτραν, esse diuersam trutinæ formam, & ex vna parte constitui *pondere*, quod quia communiter libræ erat, libra à pondere vago vel fixo, fortasse appellata fuit: dum autem dixit *alia id genus* fortasse indicauit φάλαγγα.

IV. Quartò staterarum duplex concipi potest genus primò quidem ita ut pondus illud sit vagum; centrum autem unde sit suspensio sit fixum idemque in omni libratione; quo pacto contingit in *Romanis* nostris, & in illa quam ex Vitruvio, Isidoroque retulimus. Secundò ita ut pondus ipsum fixum semper hæreat eidem scapi capiti: centrum autem sit vagum, & scapus modo ex vno puncto suspendatur, modo ex alio, prout ratio ponderis & rei ponderatæ exiget. His positis in hunc modum.

V. Affero problema illud vigesimum intelligi debere de postrema hæc *stateræ* ratione, cuius vagum sit centrum, & pondus fixum. Estò scapus (fig. 104.) a b parallelus (ut solet) horizonti, sustinens ex puncto b lan-

cem. b e, & in puncto a habens fixum pondus a in sphærolæ, si placet, modum. Iste scapus hac arte sit compactus vt ex quolibet punctis o, n, m, l, h, g, f liberè suspendi possit. Appositæ præterea sint notulæ indices ponderis quod in lance esse oportuerit, cum scapus ex punctis singulis suspensus hæserit in æquilibrio, horizonti parallelus; vt ita dignosci possit quanti sit ponderis res quæ lance sustinebitur. Dico hanc esse *τάλαρα*, de qua problema agit, pondusque a esse illud *σφαίριμα ὃ τῷ ζυγῷ προσκειται*, & quod ibidem τὸ σταθμὸν dicitur: puncta verò f, g, h &c. esse illa *σπαρτία* ratione quorum *τάλαρα* a b habet vt æquiualeat multiplici libræ, ἢ τῶν σπαρτίων ἕκαστον γίνεται τὸ κέντρον τῆς *τάλαρας*, quatenus *ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ* *spartorum euadit centrum phalangis*; dum scilicet æquilibrium committitur phalange a b suspensa modò ex f, modò ex g &c. Quid autem adderetur scapo vt suspendi ex illis punctis commodè posset, non explicat Aristoteles; vnde nec satis constat cuiusmodi essent hæc *σπαρτία*, quæ Blancanus in illam quæstionem Mechanicorum vigesimam vertit *trutinas*; Philander verò in Vitruuij cap. 8. lib. 10. *puncta, lineas, siue denticulos* interpretatur. Quomodounque tamen explicetur illorum *σπαρτίων* modus, certum est phalanga esse stateram postremo loco supra propositam; subdit enim Aristoteles τοῦτον δὲ ὄν, πολλὰ ζυγά δεῖ καὶ ποσῶντα, ὅσα περ δεῖ *σπαρτία*, αἰ δὲ τὸ ἐγγώτερον *σπαρτίον* τῆς *πλάτης* καὶ τῆς *ισαμῆος* ἑαυτοῦ, μείζον ἔλκει *σταθμὸν*, διὰ τὸ γένεσθαι τῶν μὲν *τάλαρα* πάντων *μοχλὸν ἀνεστραμμένον*, ὑπομόχλιον μὲν γὰρ τὸ *σπαρτίον* &c. Cum ita sit exstructa phalanx, multis æquiualeat libris; totque, quot habet sparta: semper verò spartum quod propinquius est lancula & ponderi superposito facit leuationem maioris oneris; quia phalanx omnis est vectis inuersus: nam hypomochlij vicem subit spartum &c.

V I. At cuius structuræ fuerit hæc phalanx, vt hypomochlij vicem gereret spartum illud, quod & centrum libræ existeret; & vt libra esset vectis inuersus, quis planè explicet? Cum enim hypomochlio innitatur vectis ab ipso hypomochlio diuersus, qui fieri potest vt phalanx sit pro vecte; & pro hypomochlio, centrum phalangis vnde ipsa pendet? Et cum inuersus vectis sit propriè quando hypomochlion est supra vectem, pondusque vecte ipso non eleuatur sursum, sed deorsum truditur; quis explicet quonam pacto istud quadret phalangi? Blancanus ait stateram esse vectem, quamuis quodammodo inuersum, quia ipsius fulcimentum siue hypomochlium est trutina ipsa supernè collocata, pondus verò leuandum est ipsa merx, potentia verò appendiculum a. Hæc explicatio mihi non satisfacit non solum quia *σπαρτία* facit esse diuersa à phalange, cum tamen Aristoteles dicat ea esse centrum ipsius phalangis quæ libram repræsentat; sed etiam quia licet ansa libræ sit supra scapum, quæ tamen scapum sustinet, vt liberè in alterutram partem inclinetur, est sub ipsum scapum. Licet autem clarè intelligere nequeamus modum huius inuersionis, quam satis non explanauit Aristoteles; propterea tamen confundere non debemus quæ ipse apertè distinxit: ea propter Philandro non assentimur existimanti Aristotelem hîc loqui de primo & vulgari genere stateræ descriptæ à Vitruuio eo loci: attamen

excusamus rei difficultate inconstantiam illius in explicandis *ωπερίοις*; modò enim concedit esse puncta, seu lineas atque denticulos quibus scapus est distinctus, modò negat eadem puncta in scapo esse, cum pro hypomochlio sunt.

VII. Manifestum ex Aristotelis verbis est *ζυγόν* hoc problemate vsurpari pro trutina quacunque siue eius à centro longitudines fuerint æquales siue inæquales, dummodo vnum centrum fixum habuerit; phalanga autem esse illud stateræ genus cuius pondus est fixum quidem, centrum autem non est idem, sed vagum.

VIII. Manifesta denique est solutio problematis: cum enim idem ab eadem vi impulsus eò velocius feratur affixum termino lineæ circuli describentis, quò ipsa linea fuerit longior, & cum in librâ centrum circuli sit punctum suspensionis; & in vecte hypomochlium; causa, cùm magna suspendantur onera, erit quia centrum sumitur prope scapi illud caput à quo lanx pendet: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XLII.

Vtrum antiquitus, apud Hebræos maximè, fuerit vsus stateræ illius quam vulgus Romanam appellat.

I. Villalpanda tom. 3. in Ezechielem pag. 349. & 350. repudiat istud stateræ genus veluti *deceptionum* seminarium, ideoque quodammodo prohibitum fuisse contendit Hebræis, nullamque eius mentionem extare in sacris eorum codicibus, quod ipsum penè affirmat de Romanis antiquioribus. Ego verò licet libram eiusmodi vitiosam fore concluderim in corollario secundo vigesimæ primæ, si suspensio eius fieret proximè centrum mundi, nolim tamen videri assignasse causam eiusmodi deceptionum, cùm inde nulla oriatur quæ sensu percipi queat, eò quod vt ibi dixi, portio circuli ex centro mundi descripti & scapus libræ rectus, iudicio sensus, nihil discrepent. Ex dictis verò satis constat eiusmodi fallacias, si quæ sint, oriri ex vitio vel artificis, vel materiæ, & perinde posse esse communes alteri cuius librandi instrumento; constat præterea iam olim apud Græcos, & saltem ætate Vitruuij apud Romanos stateram fuisse in vsu; nec Vitruuium de eâ vt recens inuectâ, aut nullo adhuc nomine insignitâ scribere.

II. Reliquum igitur est vt ostendamus sacras paginas illius meminisse. Egregius ad istud se offert locus Isai. 42. *quis libranit in pondere montes, & tolles in statera?* vbi Dei potestas & sapientia *ἀνδραποπαθὼς* describitur ex eo quod soleant homines maiora pondera trutinis Romanis librare, minora verò bilancibus. Quis inquit textus originalis *phalange* כפלס (acutè animaduertit Plantavitius Pausanus Episcopus Lodouicensis pag. 574. primi tom. ab Hebræâ voce כפלס profectam fuisse græcam *ἐλάγξ*) montes vt pote immensæ molis pensitauit, & bilancibus כמאנין tolles instar leuiorum sarcinarum trutinauit? Ista enim vox Hæbraica ex origine & ἀν-

numero trutinam duarum lancium, quasi duarum aurium sonat; ut *bisan-*
rem potius quam *bilancem* eam dixerit sapientissimus sacrae linguae Autor,
 quod ostenderet Iustitiam, (cuius symbolum est *bilanx*) duas aures in iu-
 dicando adhibere, vnamque ita præbere vni partium, ut alteri seruet al-
 teram. Neque tantum vocem *ὀλβ* phalangem interpretor ex identitate
 radicalium literarum, & ex eo quod trutinæ duarum lancium ad quam le-
 uiora exiguntur, nulla alia melius opponi possit eâ quæ illarum altera sal-
 tem caret, & loco illius pondus aut centrum vagum habet trutinandis
 magnis oneribus opportunissimum: verum etiam quia omnia passim ono-
 mastica tam Rabbīnorum quam Christianorum, præcipue Pagnini, in
 eam significationem consentiunt.

III. Interpretes LXX. videntur omne dubium tollere dum priorem
 vocem vertunt ἐν σαθμῷ, posteriorem ἐν ζυγῷ. Cum propositione quadra-
 gesima prima ostenderimus τὸν σαθμὸν esse trutinæ illud genus quod vni
 lancium sustinenti onera examinanda opponit certum aliquod pondus,
 quod vel re ipsa, ut in statera Vitruuiana, vel *δωδμή*, ut in phalange Ari-
 stotelica, sit vagum. Hoc ipsum indicat originis affinitas, vnde enim *σα-*
θμὸς græcè, inde *statera* latinè nimirum ut ait Eustathius à *σάσει*, *ισά* γὰρ ἐν
ισότητι τὰς ὀλβας. Non modicum denique fauet versio vulgata, dum ἐν σαθμῷ
 reddidit *in pondere*: & non *in ponderibus*: iste enim trutinæ modus non habet
 nisi vnum pondus, quod vagando per puncta scapi amplissimas pensiones
 facit, & quod *æquilibrium* in suæ stateræ descriptione vocat Vitruuius;
 Aristoteles verò in sua phalange modò *σφαίρωμα*, modò τὸ σαθμὸν appellat;
 Isidorus autem prop. 41. antecedenti laudatus *pondus vagum* nominat. Neq;
 vllum mouere debet, quod ἐν ζυγῷ verterit *in statera*: sicuti enim, ut me-
 morata iam propositione diximus, vox græca *σαθμὸς* nunc latè, nunc spe-
 cialiter sumitur teste Eustathio; ita & quæ ipsi latinè respondet *statera*.

IV. Hoc ipsum enenit aliis eiusmodi instrumenti nominibus; alioqui
 frigide admodum interpreteris hunc Procli locum l. 2. in Euclidem p. 18.
 vbi hoc laudi Matheseos vertit quod ζυγὰ καὶ πρὸς τὰς ἐν δυνάμει ἡσυχίας, & alium
 Vitruuij l. 10. cap. 1. sub finem *trutinarum librarumque ponderibus examinatio*
reperta vindicat ab iniquitate iustis moribus vitam. Aristoteles plurima eiusmodi
 passim habet ut ex adnotatis satis liquet, & ex eo quod phalangis vo-
 cem ipsi ζυγῷ attribuat in fine cap. 1. Mechanicarum quæstionum: pha-
 lanx enim seu phalanga est teres fustis, indeque *phalangarj* sunt baiuli à
 phalangis quibus onera ponderaque ferunt, id maximè cauentes ut onus
 ex media phalanga pendeat, alioquin inæqualiter premunt sustinentes, ut
 rectè aduertit Vitruuius l. 10. c. 8. Cum igitur *σφαίρωμα* sit teres fustis quo
 onera quasi librata transuehuntur, non est mirum quod modo pro scapo
 cuiuscunque libræ accipiatur, modò pro scapo *statera* pressè sumptæ, seu
 potius pro tota ipsa *statera*, quam primo aspectu fustem esse dixeris. Eu-
 stathius Iliad. B. pag. 149. nomen partis attribui toti docet in aliis eiusdem
 significationis vocibus tribus *πρὸς τὰν*, *πλάγην*, *ζυγὸς*: propriè ζυγὸς est sca-
 pus,

pus, diciturque metaphoricè iugum eò quod illi lances vt iugo iuuenca sint alligata: *μάστιγ* propriè est lancula cui onera imponuntur: *τρυάνη* denique quid sit non explicat. Cornutus in saty. 1. Persij scribit trutinam esse foramen intra quod est lingua bilancis ad quod est examinatio; idem fortasse dici possit de *τρυάνη* quod de trutina, ipsa enim vocum similitudo satis insinuat eiusdem illas esse significationis, vnamque ab altera esse profectam. Ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XLIII.

CVius momenti sit libræ vsus ad discernendum quanta in integro opere sit portio argenti auro mista.

Vitruuius l. 9. cap. 3. agens de coronâ illâ Hieronis votiuâ cui Artifex, cum eam ex auro puro conflare debuisset, argentum admiscuerat, narrat furtum ab Archimede deprehensum fuisse hac ratione. *puas*, inquit, dicitur fecisse *massas* a quo pondere, quo etiam fuerat corona, vnam ex auro, alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aquâ, in quo demisit argenteam massam; cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aqua effluxit. Ita exemptâ massâ quantò minus factum fuerat residui, sextario mensus, &c. eodem modo, quo prius fuerat, ad labra aquaretur. Ita ex eo inuenit quantum ad certum pondus argenti certa aqua mensura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vase demisit, & eâ exemptâ, eadem ratione mensurâ additâ, inuenit ex aquâ non tantum defluxisse, sed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri massa esset, quàm argenti. Postea verò repleto vase in eadem aquâ ipsâ coronâ demissâ, inuenit plus aqua defluxisse in coronam quàm in auream eodem pondere massam; & ita ex eo quod plus defluxerat aqua in coronâ quàm in massâ ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifestum furtum redemptoris.

Ego ægrè admodum adducor vt credam ab Archimede exploratum hoc pacto fuisse eiectionis aquæ pondus. Primò quidem, quoniam illi non poterat perspecta non esse via istud inquirendi per libram; cum theoremata quibus demonstratur istius modi methodus, ab illo ad nos profecta sint, vt ex dicendis patebit. Secundò quia ille modus à Vitruuio non tam ex propriâ quàm ex vulgi opinione expositus (non enim id de suo affirmat, sed ita dici testatur) valde remotus est ab eâ diligentia quam Mathesis sectatur. Non enim constare potest quandonam tantum aquæ infusum sit in vas plenum, vt amplius nihil capere possit; cum quotidiano experimento doceamur, plures nummos in vas quod plenum putamus immitti, absque eò quod quicquam aquæ efluat: quomodo ergo extractâ massâ tantundem aquæ refundi poterat, quantum exundarat? & quomodo ratio iniri poterat eius aquæ quàm massa illa, dum ex vase eximebatur, sibi adhærescentem asportabat? Multò igitur probatior in hoc genere est libra, quâ venamur aquam ipsis nummis depressis respondentem, nec quod ipsis

adhæret liquoris dispendium in ratiocinio isto facimus, ut ex sequentibus problematis manifestum erit.

PROBLEMA I.

PER duas eiusdem corporis non liquidi, & aquâ grauioris suspensiones, vnam in aëre, alteram in aquâ ipsâ factam, inuestigare pondus aquæ quæ tantæ sit magnitudinis, quantæ ipsum corpus suspensum: hæc autem est quam demersum pondus in vas plenum expelleret.

Quoniam propter irregularem quorundam corporum compositionem non potest eorundem magnitudinis per geometriam certa proportio inueniri; & quoniam pretia quorundam quæ emuntur & venduntur, debent magnitudinibus ipsorum corporum proportionari, necessarium fuit, inquit Iordanus sub finem opusculi de ponderositate fol. 16. editionis Venetæ suprâ laudatæ, per ipsorum pondera corporum, eorum magnitudinum proportionem reperire, ut singulis magnitudinibus per proportionem suorum ponderum cognitis, valeant certa pretia sociari. Primò igitur instrumenti per quod examinantur ponderum quantitates, ratio danda est. Est ergo examinis ponderum Virgula recta, in cuius medio est foramen recipiens perpendicularum, cum quo sustinetur Virgula, cum ponderibus in extremitatibus ipsius appensis, cum debet magnitudinis alicuius quantitas per mensuras ponderum deprehendi &c. Hæc ille emendatis Typographi erratis; quæ omnia perspicua sunt, & ostendunt non vtilitates solum alias huius suspensionis, verum instrumentum etiam examinis cuiusmodi sit docent; virgula enim illa est librile transuersum, quem scapum appellauit Vitruuius. Hoc verò addi debet, secundam, suspensionem quæ fit in aquâ, ita intelligi debere, ut tam scapus, quam pondus ex aduerso magnitudinis examinandæ appensum, extent in aëre; solaque magnitudo vinculo quod in mole & grauitate cum aquâ conueniat, pendula mergatur: eiusmodi autem sunt pili equini ex Marino Gethaldo apud Cabæum Meteor. lib. 2. tex. 6. qu. 13. initio; his ita positis.

Sit magnitudo a aquâ grauior, cuius in aëre librata

$$\begin{array}{l} a \\ b \dots \dots c \dots d \end{array}$$
 pondus sit b d, & in aquâ sit b c: erit b c minus ipso b d, per ea quæ Archimedes demonstrat lib. 1. in 7. propositione de iis quæ vehuntur in aqua. Dico magnitudinis aqueæ ipsi a paris, pondus esse c d. Quoniam enim magnitudo a in humido leuioremersa suspenditur pondere b c, erit per 7. illam Archimedis, in eodem humido tantò leuior, quanta est grauitas humidi magnitudine æqualis: atqui illud, quanto est leuior, est pondus c d: ergo pondus c d est pondus magnitudinis aqueæ ipsi a paris. Si ergo ex pondere b d auferatur pondus b c, differentia c d erit pondus quæsitum; quod erat faciendum. Idem verò sequetur si loco aquæ ponatur quouis alius liquor ipso graui a leuius; quod & in sequentibus intelligi debet.

PROBLEMA II.

PER duas eiusdem corporis non liquidi, aquâ leuioris suspensiones, vnâ in aëre, alteram in aquâ modo infra præscribendo factas, inuestigare idipsum quod in priori propositum fuit.

Sit magnitudo *a* f aqua leuior, & ligetur ynâ cum magnitudine *c* aqua grauiore, ita vt tota magnitudo *a c* sit ipsâ aquâ grauior. Magnitudo igitur *a f* in aëre suspendatur pondere *d g*; magnitudo verò sola *c* in aqua suspendatur pondere *g b*; ipsa autem composita magnitudo *a f c* in aqua æquiponderet ponderi *e b*: pondus *b e* erit minus pondere *b g*, per 5. Archimedis in libro laudato. Dico magnitudinis aqueę ipsi *a f* paris pondus esse *d e* conflatum ex *g d*, & ex differentia *g e*.

b...e...g...d

<i>a</i>
<i>f</i>
<i>c</i>

Quoniam magnitudo *a f* est aqua leuior, demissa in humidum vsque eò demergetur, vt tanta moles humidi quanta est partis demersę, eandem quam tota magnitudo *a f*, grauitatem habeat, ex demonstratis ab Archimede propositione 5. Pars ergo demersa sit *f*: ergo aqua tanti ponderis, quanti est magnitudo *f a*, erit æqualis mole ipsi *f*. Rursus quoniam composita magnitudo *a f c* in aquam proprio pondere mersa fuit, & eius pars *a f* est aqua leuior; tota magnitudo *a f c* sursum tanta vi feretur; quantò aqua, magnitudine par ipsi *a f*, grauior est ipsa magnitudine *a f*, per sextam eiusdem libri Archimedis: atqui moles aquę ipsi *a f* æqualis & distributa in duas partes quarum vna sit æqualis moli *f*, altera moli *a*, per grauitatem partis prioris est æquę grauis atque moles *a f*: ergo aqua tantę molis quantę est *a f*, superat grauitatem magnitudinis *a f*, grauitate posterioris partis, quam diximus magnitudine æqualem esse ipsi *a*: ergo leuitas qua *a f* sursum fertur tanta est, quanta est grauitas molis *a*. Atqui leuitas qua *a f* sursum fertur, tanta est quantum est pondus *e g*; cum tantò leuior effecta sit magnitudo *c*, ex accessu magnitudinis *a f*: ergo *d e* grauitas composita ex grauitatibus *g d*, *g e* est grauitas molis aqueę paris ipsi magnitudini *a f*. Si ergo ponderi *g d* inuento addatur *e g* differentia ponderum *b e*, *b g* inuentorum; habebitur pondus *d e*, quod inuestigandum erat.

PROBLEMA III.

PROportionem quam in grauitate habent duò dati liquores, posita paritate magnitudinis, inuenire per suspensionem eiusdem grauis non liquidi.

Sint duo liquores *a* & *b*; oporteatque inuenire eorum in grauitate proportionem, posita æqualitate molis. Habeatur graue *d* non liquidum,

ZZ 2

a. b. d. e...h...g....f

& grauius singulis liquoribus. Pondus magnitudinis d in aëre sit e f; in liquore a, sit e g, (quod ut in problema primo ostensum fuit, erit minus ipso e f) pondus eiusdem d, in liquore b suspensæ sit e h, (quod etiam erit minus ipso e f propter eandem causam.) Dico ut f g pondus ad pondus f h, ita esse grauitatem liquoris a ad grauitatem liquoris b, posita æqualitate eorundem liquorum in magnitudine. Quoniam enim pondus g f est per primum problema æquale ponderi liquoris a parem magnitudini d molem obtinenti; & pondus h f est etiam æquale ponderi liquoris b parem eidem magnitudini d molem obtinenti: ergo liquor a ponderis f g, & liquor b ponderis h f sunt magnitudine pares inter se, cum sint pares vni tertiæ magnitudini d: ergo liquores a & b si pares sint magnitudine habent se inuicem in grauitate, ut f g, f h. Si ergo ponderis e f & ponderis e g sumatur differentia, inuentum erit pondus g f; & si ponderis eiusdem e f & ponderis e h sumatur differentia inuentum erit pondus h f: atque ita factum erit id, quod faciendum proponebatur.

PROBLEMA IV.

Datâ massâ in quâ admixtio sit duorum metallorum in mole æquali inæqualiter ponderantium, inuenire quantum vniuscuiusque metalli commixtum sit nullâ massæ solutione factâ.

Habendæ sunt duæ aliæ massæ singulæ tantum ponderantes quantum data, quarum vna sit ex vno metallo puro; altera ex altero item puro. Præterea inueniendum est (quo autem pacto dicetur paulò post) quanti ponderis aquam quælibet trium massa excludat dum in eius locum succedit.

Massa igitur data sit s t mixta; pura & ponderosior sit m n; pura minus ponderosa sit p q. Præterea numerus partium aquæ æqualis ponderis & molis exclusarum à massâ s t sit i l; numerus verò exclusarum à massa m n, sit a c; & denique numerus exclusarum à massa p q sit d h. His ita positis propositum sit inuenire quantum ex vnaquaque massâ purâ sit in mixta s t.

Sit peractum id quod quæritur; sitque pars s u ex pura m n, & numerus partium aquæ expulsarum ab ipsa sit i k; sit verò pars ut ex pura p q; numerus igitur partium expulsarum ab ipsa erit k l. Quoniam massa m n in æquali mole ponitur ponderosior quàm p q, erit moles p q maior mole m n, cum illi æquiponderet: moles autem s t erit maior quàm m n, minor verò quàm p q; cumque ut se habent moles, ita se habeant aquæ expulsæ, erit aqua d h maior aqua a c, & aqua i l; ipsa autem i l erit maior aqua a c; cumque aquas a c, d h, i l vniformes in mole & pondere (ut ponimus) communis mensura metiatur, erit numerus mensurarum quas aqua d h continet maior numero a c: numerus autem i l erit minor numero d h; maior verò numero a c.

Ut pondus partis suæ ad pondus partis ut, ita fiat pondus p r ad r q & pondus m o ad m n. Quoniam massa p q ponitur vniformis in mole & pondere, ergo vt moles p r ad molem r q, ita pondus molis p r ad pondus molis r q: similique ratione vt moles m o ad molem o n, ita erit pondus m o ad pondus o n; ponitur enim moles m n esse vniformis mole & grauitate. Ex numero a c abscindatur a b æqualis numero i k, erit a b numerus minor numero a c; si enim esset vel æqualis vel maior, partes metalli m n ipsi respondententes vel æquæ vel magis ponderarent quàm omnes m n, quod est contra hypothesim: nam partes metalli puri m n quæ sunt in mixta s t, minus ponderant quàm tota massa s t, & quàm m n ipsi s t æquiponderans. Numero k l fiat h f æqualis, quoniam i l est minor quam h d, erit k l seu h f numerus multò minor numero h d. Et quoniam a c est minor quam i l, ipse verò i l minor quam h d, erit excessus quo numerus i l superat numerum a c, minor excessu quo numerus d h superat eundem a c. Sit ergo h g excessus quo numerus i l superat numerum a c: ergo numerus g d est maior numero c a. Fiat g e ipsi c a æqualis; quoniam g h est excessus quo numerus i l superat numerum a c seu e g: ergo numerus e h est æqualis numero i l.

Rursus quoniam massa p q est vniformis; ergo vt moles p q ad r q, ita erit aqua d h, quam grauitate & mole vniformem esse ponimus, ad aquam f h (sunt enim t u, r q mole & grauitate pares, ac proinde excludunt mole & grauitate pares aquas k l, f h) ergo diuidendo vt moles seu pondus p r ad molem seu pondus r q; ita erit moles seu pondus d f, ad molem seu pondus f h: sed vt moles d f ad molem f h, ita est numerus d f ad numerum f h: ergo vt pondus p r ad pondus r q, ita est numerus d f ad numerum f h. Simili prorsus ratione ostendetur vt pondus m o ad o n ita esse numerum a b ad b c: sed vt pondus m o ad o n, ita est pondus p r ad r q: ergo vt numerus d f ad f h, ita est numerus a b ad b c.

Rursus numero a c fiat i z æqualis; erunt ergo g h, z l æquales numeri, ac proinde cùm k l f h sint tiam æquales, residui k z f d erunt etiam æquales: cùmque i z a c sint æquales: & i k a b sint etiã æquales ex constructione, erunt b c k z æquales: ergo tres numeri b c, f g, k z sunt æquales, tresque residui a b, e f, i z sunt etiam æquales.

Quoniam ergo vt numerus d f ad f h, ita est numerus a b ad b c vt ostensum fuit, siue ita est numerus e f ad f g: ergo alternando vt numerus d f ad e f, ita numerus f h ad f g: & per diuisionem rationis vt numerus d f ad d e, ita est numerus f h ad g h: & alternando vt numerus d f ad f h, ita est numerus d e ad g h. Sed vt numerus d f ad f h, ita est pondus p r ad r q;

Z z 3

& ut pondus p r ad r q, ita est pondus s u ad u t : ergo ut numerus d e ad numerum g h, ita est pondus s u ad pondus u t.

Componetur autem hoc modo: ex noto numero i l auferatur notus a c, & habebitur numerus z l vel g h. Rursus ex noto numero d h auferatur notus e g seu a c : & habebuntur duo simul d e, g h : si ergo inuentus g h auferatur ex duobus simul d e, g h relinquetur d e. Inuenti ergo erunt numeri d e, g h ostendentes rationem ponderis s u ad pondus u t ; quod erat faciendum.

S C H O L I V M.

Archimedes tantâ animi voluptate hoc inuento percussus fuisse dicitur ut nudus balneo, in quo tunc casu lauabat, exiliens domum versus, identidem græcè clamaret *ἔρηξα, ἔρηξα* : istud narrant Vitruuius loco citato, & Plutarchus in opusculo contra Epicurum. Proctus in primum Euclidis pag. 18. edit. Hervagiana narrat Perionem ex hoc tam inopinato Archimedis inuento perhiberi dixisse *ὁ δὲ τὰ αὐτῆς τῶν ἀρχιμήδου λέγοντι πρὸς τὸν*, in posterum Archimedi quiduis affirmanti fides erit adhibenda. Addis Verò eo loci Plutarchus à Pythagorâ bouem sacrificatum fuisse ob inuentionem cuiusdam propositionis mathematicæ, siue, inquit, illa fuerit, basim trianguli rectanguli posse spatium æquale spatiis quæ duo reliqua latera possunt ; siue extiterit problema *ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὀρθογωνίου*, de arcâ parabolæ : quibus verbis tetragonismum parabolæ adscribere videtur Pythagoræ ; sed id, ut in prolegomenis tetragonismicis iam diximus, creditu perdifficile est ; Archimedes siquidem huius se authorem profitetur ipso initio suæ quadrationis, testaturque Vir sincerus & in veterum lectione versatus à nemine, quem ipse sciat, istud fuisse unquam tentatum ; quamuis non desuerint qui licet inutiles operâ conati sint circulum & ellipsin quadrare.

C O R O L L A R I V M I.

Cabæus noster l. 2. Meteor. text. 25. qu. 4. pag. 150. 151. ad solutionem problematis mox proponendi, à se ideo adhibitam fuisse Algebram testatur ; quia, inquit, mihi hæc facillima visa est, & accommoda etiam iis qui Algebram ignorant : ex demonstratis tamen longè facilius eruitur, ut ad libri pœnam cuilibet perspicuum fiet. Ponit argenti defæcatissimi massam ad istud destinatam expellere ex vase aquam cuius pondus sit 97. æris autem purissimi massam. ad id similiter paratam expellere aquam cuius pondus sit 105. denique monetam datam & æquè ponderantem subire in locum aquæ, cuius pondus sit 99. Hoc posito proponitur inuestigandum, quantum argenti puri sit in numismate illo proposito. Istud arithmetica vulgaris longè facillimè conficit in hunc modum præscriptum in præsentī propositione. Differentia ponderum æris & argenti puri & grauioris ipso ære inuenitur esse 8. subductis 97. ex 105. differentia ponderum argenti puri & numismatis dati inuenitur eadem methodo esse 2. Si igitur numisma diuidatur in 8. partes, quot videlicet vnitates continet differentia primò inuenta, duæ illarum notatæ per differentiam secundò repertam

sunt æris: sex reliquæ sunt argenti puri. Aliud ponit exemplum quo pondus aquæ ab argento puro eiectæ est 489. ab ære puro 561. à numismatis 495. quod soluitur eadem ratione. Nam differentia puri argenti & auri inuenitur 72. differentia verò argenti puri & numismatum est 6. Si igitur numismata diuidantur in 72. partes, sex illarum sunt æris, reliquæ 66. sunt puri argenti. Periculum facit in tertia *quadam mixturâ in ære campano antiquo ex ære & stanno composito*. Pondus aquæ à stanni puri massa eiectæ est 113. ab ære puro & æquiponderante 146. à *campano ære* 142. differentia æris puri & stanni puri & ære ipso grauioris est 33. differentia stanni puri & æris campani est 29. Si igitur æs campanum diuidatur in 33. partes æquales, 29. ex illis sunt æs purum: reliquæ 4. sunt stannum purum. En tibi problematis facilem, breuèmq; solutionem, pro qua iste Autor aliam via abstrusiore, longiorèque quæsiuit, quæsitamque Lectori dedit tanquam omnium, suo quidem iudicio facillimam. Cæterùm solutionem problematis de corona illa, Archimedis inuento nobilitatâ Q. Rhemnius Fannius Palæmon in fine libelli de ponderibus & mensuris exposuit verbis; quis verò Recentiorum Arithmetices præcepta scribentium non meminit illius? Peletarius non in Arithmeticâ solùm, sed in Algebrâ etiam illud tractauit l. 1. c. 24. exemp. 11. Peletarium Cabæus in hoc secutus est; sed Algebram aduocare vt via longior & spinosior inde euadat, non puto operæ pretium; laudem tamen industria suam meretur. Porro Archimedem vîrpassse istud genus suspendendæ coronæ in aqua existimarunt alij plures in quibus est Cabæus lib. 2. Meteor. suprâ laudato p. 149. col. 1. vbi ait se non posse adduci vt aliter sentiat de Archimedis accuratissima praxi.

COROLLARIUM II.

Ex demonstratis in problemate tertio liquet, si idem graue suspendatur in liquoribus inæqualis ponderis, ab excessu ponderum graui illi respondentium, peti differentiam grauitatis liquorum. Hinc igitur habemus viam experiundi vtra duarum aquarum sit leuior; & ita fortassis conciliabuntur inter se contrariæ opinantium sententiæ. Nam ex Antiquis Plinius cap. 3. lib. 31. ita scribit *leuitas illa deprehendi vix potest, nullo penè momento ponderis aquis inter se distantibus . . . quidam statera iudicant de salubritate, frustante diligentia, quando perrarum est vt leuior sit aqua*. Ex Recentioribus V. C. Sauot tertia parte de numismatis cap. 34. sub finem, *suspendi egomet, inquit, diuersis tempestatibus, & locis, aquas pluuiiales, fluuiaticas, fontanas, cisterninas & puteales; sed tam exiguo momento ponderis inter se discreparunt, vt discrimen potius procedere videretur ex vitio aliquo leui & occulto libra, aut ex manûs vacillatione, quàm ex vlla grauitatis inæqualitate, cum illud vix attigerit ad quingentesimam suspensam partem; qua tamen leuior visa est aqua pluuiæ, suspensa statim atque è cælo deciderat*. Villalpandus in Apparatu pag. 350. idem ferè sentit de hoc experimento, aqua, inquit, *minimum pondere variat, quippe cum ego ipse viginti aqua*

Uncias ex diuersissimis aquis ponderauerim, vixque repererim drachma vna à se inuicem distare. Cabæus loco supra laudato pag. 146. col. I. parum discrepat ab illis duobus, *inter aquas, inquit, non reperio æquale pondus data paritate molis, & in 100. libris aquæ erit differentia 1. 2. 3. & plurium Unciarum.* Differentia suspensorum iuxta Sauot est vna quingentesima; iuxta Villalpandum vna octogesima; iuxta Cabæum vna, vel duæ, vel tres, vel paululò plures millesimæ ducentessimæ: vnde liquet eos vix discordare inter se, sed Plinio fauere plurimum. Attamen oppositam sententiam sequi videtur Hippocrates aphorif. 26. sect. 5. vbi aquam quæ citò calefit, & citò refrigeratur leuissimam esse definit, ὕδωρ τὸ ταχέως θερμαίνόμενον, καὶ ταχέως ψυχόμενον, κρυέτατον. Ad istum locum responderi posset cum Galeno pag. 290. edit. Basile. 1538. ἡ τῇ σαθρῇ καρότερον εἶναι τὸ τοῖσιν λεκτέον. . . . διὰ καρότερον εἶπεν οὐδὲ τὸ μὴ βαρύτερον τῷ κατὰ φύσιν, καὶ διεξέρχεται ταχέως ὥστε καὶ βαρὺ τὸ ἐναντίον αὐτῷ, τὸ μὴ διεξέρχεται ταχέως. *Istud librâ non esse pensandum: sed id leuissimum dixisse hoc loco, quod non grauat stomachum, & egeritur citò; sicuti & graue dicitur quod è contrario non digeritur cito.* Ratio tamen Galeni non multum cogit, quia, inquit, circuitione illa non fuisset vsus Hippocrates, sed directò ad librâ iudicium nos remississet; nam illud καρότερον librâ non ita est in promptu, vt videtur existimare Galenus. Sed demus Hippocratis locum facere illam sensum; quid dicemus ad inscriptionem illam antiquam apud Sauot ex Grutero; Imp. Diocletianus C. Aug. hoc excavato saxo quaesitam aquam iugi profluuiio scatentem inuenit Martiâ salubriorem, Tiberinâ leuiorem curandis agnitudinibus, statera indicatum. Vides apertè ex statera indicio leuiorem iudicatam fuisse istam Diocletiani aquam. Fortasse igitur qui aquam trutinando leuiorem repere-rint, accuratum illum & non vulgarem librâ vsum adhibuerint; qui vix ac ne vix quidem leuiorem inuenerint, illam, vt vulgò solet fieri, suspen-derint. R. P. Zucchi hunc explorandi ponderis quo vna aqua excedit aliam annotauit in noua de Machinis Philosophia pag. 87. edit. Roman. 1649. vbi vir experientissimus videtur compertum habere vnâ esse alia leuiorem; ita enim quaestionem absolutè proponit, qua ratione grauitas aqua, & quidem vnus supra aliam, facillimè & exactissimè deprehendatur.

COROLLARIUM III.

Ex iisdem principiis quibus monstrata in præsentì propositione nitun-tur, peti debet causa experimenti cuiusdam celebris quod R. P. Maignan refert cursûs Philosophici tom. 4. cap. 16. prop. 3. à n. 8. pag. 1685. Illud autem, prout à nobis non semel captum fuit, ita se habet. Selige inter phialas vitreas communes vnâ aliquam, ita collo angustam, vt cum eam aqua penitus impleueris, & pollicem eius ori impegeris, eo illud planè obtures, & aqua digito compressa supereffluere nequeat: para præterea aliam phialam vitream instar glandis vel nucis, cuius collum perangusto foramine pateat; & circumligetur filo sustinente pondus aliquod aptum ad hoc vt istius phialulæ immissæ in aquam ipsam collum deorsum vi ponderis

ponderis vergat, & venter ampullæ sursum versus, aquis extet. Phialulæ nomine intelligemus corpus compositum ex ipso vitro phialæ, ex perpendiculari quo ceruix eius proha tenetur, & ex aëre intra ventrem incluso; tria enim ista cum colligata sint, mouentur simul, vt patet. Experti autem sumus. I. Istud pondus appendendum, eligi certa quadam ratione oportere: aliquando enim totam machinulam pertrahebat ad imum vasis, siue phialæ maioris; ac proinde minuendum erat; aliquando ita leue erat vt quantumlibet digito premeretur aqua vasis, non descenderet phialula; aliquando ita accommodatum prodibat, vt leui compressione aquæ eiusdem deprimeretur; fuit denique cum ita se haberet, vt mitteretur quidem deorsum, sed non nisi vehementi compressione. II. Dum pollice immisso in vasis, hoc est maioris phialæ osculum, premebatur aqua; perspicue conspeximus in ventrem phialulæ ingredi aquæ aliquid; & dum laxata compressione assurgebat phialula, exire aquæ illud ipsum quod vi pressus intrusum fuerat. III. Quando autem compressiuncula leui demittebatur, paululum aquæ admittere in ventrem deprehendebatur: & quando grauiori compressione opus erat, plus etiam aquæ trudi, & extrudi ex eodem ventre. Hinc factum est, vt cum tres eiusmodi phialulæ in eodem vase simul natarent; vnâ compressione validiore tres simul descenderent; minus validâ, duæ tantum, & vnâ supernataret; mediocri, vnica tantum deprimeretur. IV. Hæc omnia experti fuimus, siue vas collocaretur osculo cælum spectante, siue ad pavementum inuerso, siue etiam ad latus & parietes. V. Accidit etiam istud mirabile, vt cum vnus astantium ex calami, quo scribimus, superiore parte spongiosâ, frustulum abscidisset, illique aciculam pro perpendiculari fixisset, perinde descenderet & ascenderet, atque phialula; pressâ, laxatâque vasis aquâ. VI. Experientia frequente constitit post aliquantum tempus ascendendo & descendendo impensum, phialulam quasi lassatam concidere, in imoque vase iacere, nec assurgere pressu omni intermisso; extractam tamen inde & aëre nouo repletam, ad ludum pristinum redire.

Causa cur phialula descendat est, quod accessione aquæ pulsæ; corpus illud compactum ex vitrea ampullæ substantiâ; ex perpendiculari adiuncto; ex aëre qui intra aluum machinulæ ante compressionem inclusus continebatur; & ex aqua intrò populsa (nam aër vt aduertit R. P. Maignan n. 10. pag. 1688. non diffuciliter patitur se densari; & ita densatus præbet locum intramissæ aquæ) si extra aquam lance pensaretur, eleuaret illam aquam, quæ locum illius corporis implet, vel quæ paris esset molis, illi machinulæ ex quadruplici illo corpore compactæ; illa verò eadem machinula semoto aquæ intrusæ pondere, eleuaretur ab eadem illa aqua paris magnitudinis. Locus phialulæ est vt patet vnus & idem, ante & post aduentum ingestæ aquæ; vnde fit vt eiusdem molis magnitudo extra aquam pensitata nunc esse leuior, nunc grauior debeat. Causa itaque cur natet est quia examine libræ extra aquam facta foret leuior eâ aquâ quæ necessa-

A a a

ria sit ad implendum totum machinulæ locum ; ratio verò cur postea cadat deorsum , est quia postea foret grauior ; ratio denique cur aliquando pendula hæreat vel in descendu , vel in ascensu , est quod eadem illa aqua eodem examine librata , neque grauior , neque leuior reperiretur machinulâ illâ ex quatuor corporibus composita. Quando loco phialulæ spongiosa substantia ponitur , causa submersionis & emersionis est eadem , ut patet ; intruditur quippe aquæ aliquid in cauernulas substantiæ illius. Cur verò phialula tandem alternis ire & redire neget , ratio est quod aër inclusus , siue omnino corrumpatur , siue multum , ut dicere solemus , alteretur ; ita tandem debilitatur , ut non habeat vim dilatandi se , & expellendi aquam inditam , cum pollicis compressio cessat.

COROLLARIUM IV.

R. P. Maignan cap. 14. prop. 27. n. 2. pag. 1325. ita scribit *video communem esse in contrarium opinionem , quæ tenet graua non grauitare in propriis sedibus ; sed non satis video quo firmo argumento id sibi persuaferint Autores physici , si grauitare intelligant dicto meo sensu.* Ergo cum agnoscat se contra communem , pro qua veritatis præsumptio stat , pugnare sententiam , validioribus sibi machinis aduersus illam opus esse intelligit ; vnde istam quam modo descripsimus adhibet , cap. 17. prop. 3. n. 8. p. 1685. *eâque euidentius comprobari contendit falsitatem communis illius sententiæ.* Ratio verò inde petita hæc est , anser (ita vocat machinulam illam) grauitatem assumit ut descendat ; deponit , ut ascendat ; sed aquam solam assumit ut descendat , & deponit ut ascendat ; ergo aqua grauitat in suo loco. Prima propositio negari potest ; nam secunda est in confesso apud omnes , cum accuratis experimentis constet. Sed ecce syllogismus qui rem demonstrare videtur : *illud corpus grauitat in aquis , cuius aduentu mergitur aliud , quod extabat in istis aquis ; atqui aduentu aqua solius , anser antea enatans mergitur : ergo aqua grauitat in ipsis aquis.* Subtile , fateor , argumentum istud est , non tamen cogit , ut equidem reor. Hoc ut explicem , aduerto illum anserem componi ex quatuor corporibus , quorum vnum est aër , qui dum vitro inclusus mergitur , non grauitat ; neque enim id omne quod deorsum rapitur , grauitare dicitur ; ita si cucurbitam aëre plenam appenso graui pondere demittas in maris fundum ; non ideo grauitabit ; sed potius descensui illi resistet per leuitatem suam. Non igitur id omne grauitat quod trahitur deorsum ; sed id tantum quod motum deorsum per se causat ; non autem quod illi pro viribus repugnat , vel quod se habet ad illum indifferenter. Ponamus iniectum vna compressione esse tantum aquæ in ventrem anseris , ut nouem eius partes sufficerent ad illum deprimendum ; ponamus quoque pondus aquæ esse ad olei in pari mole pondus , ut 10. ad 9. Si igitur cogitemus in locum aquæ intrò coniectæ succedere parem olei molem , adhuc anser (estò : segnius) descendet , oleo licet repugnante ; ergo corpori natanti superuenit aliud corpus , quod ex se in aqua leuitat , & ex illius tamen ac-

cessione, corpus immergitur. Si igitur corpus quod adjicitur natanti remoueat tantum illud quod impediēbat ne motus deorsum produceretur à causa præexistente sed impedita; illud non dicitur *grauitare*; sed remouendo prohibens poterit vel *leuitare*, quamuis minus, illo quod submouet; vel indifferenter se habere ad motum deorsum. Prima igitur syllogismi illius propositio est absolutè falsa, & vt verà euadat ita corrigi debet, *illud corpus, cuius accessione aliud antea extans, vndis mergitur; vel grauitat, vel submouet impedimentum, quo corpus cui aduenit, sponte sua descendere nequibat.* Qui autem censent partes aquæ sese nihil comprimere, ita vt si sentiendi vi præditæ forent, vna non sentiret onus alterius sibi superpositæ, dicent illud aquæ quod ingeritur in aluum anseris habere se indifferenter ad descensum; tollere tamen aduentu suo id quod impediēbat ne substantia vitri apta per se grauitare in vndis, grauitaret de facto; impediēbat autem aer intra aluum anseris nondum compressus alio corpore extra vndas grauiore.

PROPOSITIO XLIV.

Breuarium præcipuarum rerum quæ in hoc libro tractatæ fuerunt.

I. Explicatur propositio prima & quarta quid Antiquiores velint esse centrum grauitatis, in quo Archimedis isorrhopica fundantur. Alicuius magnitudinis centrū grauitatis posse esse extra ipsam magnitudinē ostenditur propositioe secunda & tertia: vnde colligitur necessitas rectæ illius rigidæ; nempe vt ope illius possit graue è suo centro extrà posito pendere: eam autem censeo subaudiri ab iis qui in tradenda definitione centri grauitatis mentionem illius non faciunt. Illud Archimedis pronuntiatum, *vnusquodque suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet; cum in linea perpendiculari fuerit punctum suspensionis, & centrum grauitatis*, demonstratur propositioe nona. Propositione vndecima ostenditur vnum aliud ab Archimede assumptum, cuius demonstratio non extabat; in propositioe autem duodecima proponuntur dubia nonnulla aduersus postulata Archimedeæ; ea porro dubia magnam partem à nobis cogitata sunt; nec enim vllum legimus, qui libram Archimedeam oppugnarit.

II. Libræ curuæ ab Archimedeæ diuersæ definitiones & postulata habentur sub finem duodecimæ; huius autem libræ æquilibrium fit grauib; pendentibus per lineas non parallelas, sed conuenientes in centrum; quæ duo libræ genera vulgò in vnam confunduntur, cum longè diuersa esse ostendantur in decima tertia & sequentibus decem; in quarum decima octaua & decima nona monstratur in hoc libræ genere graua suspensa esse etiam reciprocè vt brachia, quoties æquilibrium committitur: hoc ipsum in vniuersum tam pro Archimedeæ recta, quàm pro curua alia, demonstratur in vigesima. In corollario secundo vigesimæ primæ ostenditur libras omnes quas vulgò *Romanas* appellamus esse fallaces, si ad geo-

metricas rationes exigantur. In propositione vigesima tertia, ostendimus centrum grauitatis absolutè dictum non dari in omni magnitudine, comparata ad libram curuam.

III. Propositio vigesima quarta soluit tria dubia ex propositis in duodecima, nihil videlicet ob stare certitudini principiorum Archimedeorum quod figuræ planæ careant grauitate, ac proinde suspendi nequeant; quod graua non ferantur lineis parallelis; quod lineæ quibus graua pendent, ponantur *dissepis*, cum tamen superficies ponantur graues; & quod à graui brachium libræ eodem modo grauari ponatur; siue graue breuiori, siue longiori linea pendeat; istud verò postremum in vigesima quinta propositione monstratur. Vigesima sexta soluit quartum dubium ex coaptatione figurarum petitur; sub cuius finem ad solutionem sexti dubij propositi in duodecima, ponuntur definitiones loci asymptotici, & perpendiculari quietis. In quatuor sequentibus propositionibus ea de hyperbola demonstrantur, ex quibus liquidò constat præter vulgi opinionem inter magnitudines non vndeunque clausas, dari quandam quæ maior sit omni finita data; dari etiam quæ sit æqualis figuræ, siue finito spatium; dari præterea maiorem quacunque data, cui certum & finitum pondus æquiponderet; dari quæ careat tam centro grauitatis, quàm perpendiculari quietis; dari quæ careat centro grauitatis, habeat tamen perpendicularum quietis; dari denique quæ centrum grauitatis obtineat. In quatuor postremis corollariis trigessimæ primæ occasione loci asymptoti proponuntur mirabilia quædam de hyperbola quam extrema styli umbra in sciothericis describit motu solis diurno. Quod sub finem corollarij quinti scripsi de sectione tangentis cum linea meridiana, intellexi etiam de ea linea quæ in murorum planis efficitur à circulo maximo recto ad planum eiusdem muri, ducto per polos æquatoris. Propositione trigesima secunda soluitur quintum dubium ex centro grauitatis petitur, & sextum ex eo quod spatium finitum æquiponderat immenso. R. P. Maignan tom. 3. *Cursus Philosophici* cap. 14. pag. 1309. propositionem sibi probandam præmittit his verbis, *quodlibet corpus graue habet in seipso centrum grauitatis suarum partium*. Certè si haberet in seipso, non esset necessaria illa, quam diximus linea connectens, & falsa forent quæ demonstrasse nos putamus. Cum autem Archimedes non demonstrarit, sed postularit dari illud centrum, neque nos suppleuerimus vllam ea de re demonstrationem geometricam; videndum est numquid inde subsidij petatur; quapropter transcribo illius verba. [Centrum, inquit, grauitatis in quouis graui voco cum Luca Valerio illud punctum à quo suspensum graue per se manet, partibus quomodocunque circa constitutis. Et tale punctum dico necessariò esse in omni graui: ratio autem est, quia quæcunque lineæ habent extrema, habent etiam medium; ergo cum radij grauitatis (id est lineæ sumptæ non secundum longitudinem de qua nunc non agitur, sed secundum momenta grauitandi) quæ in quouis corpore, sunt quasi diametri ductæ ab vna par-

te circumferentiæ ad oppositam, ibidem habeant extrema; erit necessarium aliquod cuiusque medium secundum momenta grauitatis; ac proinde erit aliquod cuiusque in particulari punctum ex quo si suspenderetur haberet vtrique momenta æqualia, id est, maneret in æquilibrio. Ac insuper si dictæ lineæ sunt æquales tum in longitudine tum in momentis grauitatis, aut etiam si sint vtrouis modo vel vtróque simul inæquales; facta hinc inde compensatione, vt manifestum est fieri posse, quatenus ei cui deest potest adjici ex eo quod alteri redundat: his inquam positis, consequens est esse vnum omnium dictarum linearum, seu totius grauis ex eis constantis centrum vnum commune grauitatis.] Hactenus vir eximiè doctus non in Philosophicis solum sed in Mathematicis etiam; ac proinde nihil dubito quin ipse agnouerit probationem istam non esse inter mathematicas demonstrationes, sed summum inter physicas verisimilitudines reponendam. Dum lineas sumi vult *non secundum longitudinem, sed secundum momenta grauitandi*, id equidem non ita interpretor, vt velit intelligi lineam sine longitudine, istud enim fieri nequit; cum lineæ definitio includat *longitudinem* pro genere: existimo igitur eum velle sumi non quamcunque lineam, sed lineam grauem quā grauem. Peto igitur vtrum istam lineam velit esse mathematicam qualem illam describit Euclides *longitudinem sine latitudine*; an lineam physicam, id est gracile longumque corpusculum? Mathematicam, non respondebit; quia & illas lineas à structura solidorum rejicit, & quia graues re ipsa non forent, si adessent; & quia, quamuis adessent forentque graues, demonstrata de lineis in vniuersum, non continuò possunt ad solida transferri; nisi ratio specialis ita faciendi demonstraretur. Omitto dicere illarum linearum bisectiones in plurimis corporibus, ex iis quorum forma *irregularis* vulgò dicitur, non posse cadere omnes in idem punctum, vt obuia geometriæ demonstratio probat. Dicit ergo à se intelligi virgulam vel bacillulum teretem. Ac hoc ipsum est quod demonstrari debet; videlicet in illo solido terete dari medium eiusmodi, nempe centrum grauitatis, siue *punctum à quo suspensum graue per se manet, partibus quomodocunque circa constitutis*; neque enim manifestum est tale medium dari, ex eo quod bacillus habeat vtrique extrema: postea verò quā istud demonstratum fuerit, facile ex primo æquiponderantium Archimedis libro ostendetur totius ex illis bacillis compacti solidi dari centrum grauitatis.

IV. Demum in trigesima tertia soluitur vltimum dubium desumptum à labore intelligendi demonstrationes ex principiis libræ deriuatas. In propositionis istius progressu n. 4. Proclum in primum Euc. p. 12. edit. Heruag. ita reddidi, vt dicat *Geodasiam non metiri per rectas lineas geometriæ proprias, & quæ in sola mente consistunt; sed per sensiles; vt per amussim & perpendiculum; δια ἀσφάλτου καὶ διὰ σάβδον*. Licet enim verborum istorum græcorum varia possint afferri significata; non dubito tamen quin ille sit germanus Procli sensus; scio equidem vocem *σάβδον* ex Eustathio Iliad. v. pag. 1028.

metricas rationes exigantur. In propositione vigesima tertia, ostendimus centrum gravitatis absolutè dictum non dari in omni magnitudine, comparata ad libram curvam.

III. Propositio vigesima quarta soluit tria dubia ex propositis in duodecima, nihil videlicet ob stare certitudini principiorum Archimedeorum quod figuræ planæ careant gravitate, ac proinde suspendi nequeant; quod gravia non ferantur lineis parallelis; quod lineæ quibus gravia pendent, ponantur *ab æquis*, cum tamen superficies ponantur graues; & quod à gravi brachium libræ eodem modo gravari ponatur; siue graue breviori, siue longiori linea pendeat; istud verò postremum in vigesima quinta propositione monstratur. Vigesima sexta soluit quartum dubium ex coaptatione figurarum petittum; sub cuius finem ad solutionem sexti dubij propositi in duodecima, ponuntur definitiones *loci asymptotici*, & *perpendiculari quietis*. In quatuor sequentibus propositionibus ea de hyperbola demonstrantur, ex quibus liquidò constat præter vulgi opinionem inter magnitudines non vndeunque clausas, dari quandam quæ maior sit omni finita data; dari etiam quæ sit æqualis figuræ, siue finito spatio; dari præterea maiorem quacunque data, cui certum & finitum pondus æquiponderet; dari quæ careat tam centro gravitatis, quàm perpendiculari quietis; dari quæ careat centro gravitatis, habeat tamen perpendicularum quietis; dari denique quæ centrum gravitatis obtineat. In quatuor postremis corollariis trigessimæ primæ occasione loci asymptoti proponuntur mirabilia quædam de hyperbola quam extrema styli umbra in sciothericis describit motu solis diurno. Quod sub finem corollarij quinti scripsi de sectione tangentis cum linea meridiana, intellexi etiam de ea linea quæ in murorum planis efficitur à circulo maximo recto ad planum eiusdem muri, ducto per polos æquatoris. Propositione trigesima secunda soluitur quintum dubium ex centro gravitatis petittum, & sextum ex eo quod spatium finitum æquiponderat immenso. R. P. Maignan tom. 3. *Cursûs Philosophici* cap. 14. pag. 1309. propositionem sibi probandam præmittit his verbis, *quodlibet corpus graue habet in seipso centrum gravitatis suarum partium*. Certè si haberet in seipso, non esset necessaria illa, quam diximus linea connectens, & falsa forent quæ demonstrasse nos putamus. Cum autem Archimedes non demonstrarit, sed postularit dari illud centrum, neque nos suppleuerimus vllam ea de re demonstrationem geometricam; videndum est numquid inde subsidij petatur; quapropter transcribo illius verba. [Centrum, inquit, gravitatis in quouis graui voco cum Luca Valerio illud punctum à quo suspensum graue per se manet, partibus quomodocunque circa constitutis. Et tale punctum dico necessariò esse in omni graui: ratio autem est, quia quæcunque lineæ habent extrema, habent etiam medium; ergo cum radij gravitatis (id est lineæ sumptæ non secundum longitudinem de qua nunc non agitur, sed secundum momenta gravitandi) quæ in quouis corpore, sunt quasi diametri ductæ ab una par-

te circumferentiæ ad oppositam, ibidem habeant extrema; erit necessarium aliquod cuiusque medium secundum momenta grauitatis; ac proinde erit aliquod cuiusque in particulari punctum ex quo si suspenderetur haberet vtrinque momenta æqualia, id est, maneret in æquilibrio. Ac insuper si dictæ lineæ sunt æquales tum in longitudine tum in momentis grauitatis, aut etiam si sint vtrouis modo vel vtróque simul inæquales; facta hinc inde compensatione, vt manifestum est fieri posse, quatenus ei cui deest potest adjici ex eo quod alteri redundat: his inquam positis, consequens est esse vnum omnium dictarum linearum, seu totius grauis ex eis constantis centrum vnum commune grauitatis.] Hactenus vir eximie doctus non in Philosophicis solum sed in Mathematicis etiam; ac proinde nihil dubito quin ipse agnouerit probationem istam non esse inter mathematicas demonstrationes, sed summum inter physicas verisimilitudines reponendam. Dum lineas sumi vult *non secundum longitudinem, sed secundum momenta grauitandi*, id equidem non ita interpretor, vt velit intelligi lineam sine longitudine, istud enim fieri nequit; cum lineæ definitio includat *longitudinem* pro genere: existimo igitur eum velle sumi non quaecunque lineam, sed lineam grauem quā grauem. Peto igitur vtrum istam lineam velit esse mathematicam qualem illam describit Euclides *longitudinem sine latitudine*; an lineam physicam, id est gracile longumque corpusculum? Mathematicam, non respondebit; quia & illas lineas à structura solidorum rejicit, & quia graues re ipsa non forent, si adessent; & quia, quamuis adessent forentque graues, demonstrata de lineis in vniuersum, non continuò possunt ad solida transferri; nisi ratio specialis ita faciendi demonstraretur. Omitto dicere illarum linearum bisectiones in plurimis corporibus, ex iis quorum forma *irregularis* vulgò dicitur, non posse cadere omnes in idem punctum, vt obuia geometriæ demonstratio probat. Dicit ergo à se intelligi virgulam vel bacillulum teretem. At hoc ipsum est quod demonstrari debet; videlicet in illo solido terete dari medium eiusmodi, nempe centrum grauitatis, siue punctum à quo suspensum graue per se manet, *autibus quomodocunque circa constitutis*; neque enim manifestum est tale medium dari, ex eo quod bacillus habeat vtrinque extrema: postea verò quàm istud demonstratum fuerit, facile ex primo æquiponderantium Archimedis libro ostendetur totius ex illis bacillis compacti solidi dari centrum grauitatis.

IV. Demum in trigesima tertia soluitur vltimum dubium desumptum à labore intelligendi demonstrationes ex principiis libræ deriuatas. In propositionis istius progressu n. 4. Proclum in primum Euc. p. 12. edit. Heruag. ita reddidi, vt dicat *Geodasiam non metiri per rectas lineas geometriæ proprias, & quæ in sola mente consistunt; sed per sensiles; vt per amussim & perpendiculum; δια μέτρον καὶ διὰ σάβην*. Licet enim verborum istorum græcorum varia possint afferri significata; non dubito tamen quin ille sit germanus Procli sensus; scio equidem vocem *σάβην* ex Eustathio Iliad. v. pag. 1028.

significare aliquando funiculum illum quem Fabri materiarij & carpentarij rubrica aut atramento imbuunt, vt eo super materia tenso & eleuato describatur linea rubra vel atra, dum infligitur subiecto tigno; & in eo sensu accipi ab Homero. Altera eiusdem vocis significatio ab Antiquis vsurpata eodem teste, est *κάνων* vel *νόμος* *regula vel norma*: dum autem dicit hanc significationem esse Antiquorum *τῶν παλαιῶν*, non vult dicere priorem alium significatum esse tantum Recentiorum, cum vt ipse ibidem monstrat, Homerus eo loci illum vsurpet: forsitan innuit illam vim vocis fuisse tunc exoletam. Tertia quoque ad rem geometricam spectans significatio eiusdem vocis apud Suidam, est illud *perpendicularum* è quo plumbum pendere solet; hanc apertè indicat is quem profert locus Poëtæ appellantis *σάθμῳ μοιβαχθεῖα* *plumbo-grauatam*. Itaque *σάθμῳ* non malè interpretati fuerimus *perpendicularum*; sed si ea voce malis ibi intelligi funiculum illum cuius ictu recta delineatur, non repugno; dum modo *σάθρον*, quæ vox multò generaliore habet significandi vim, interpreteris *perpendicularum*. Hæc leuiora videri possent, nisi attinerent ad Geometricas voces, quas nusquam negligimus. Vnde istud etiam aduertimus ipsam vocem latinam *amussis*, sicuti & græcam *σάθμῳ*, significare modò funiculum illum, modo regulam & normam; ipsūque vocabulum *linea* denotare apud probos Autores nunc funiculum illum tintilem, nunc perpendicularum; quo sensu Tullius *ad lineam* dixit, quod alij *ad perpendicularum*.

V. Propositionibus 34. 35. 36. nonnullæ Iordani propositiones circa libram restituuntur, & quædam in illas adnotantur; illud verò in illis paradoxum iure censeatur, libram mathematicam, & omni vicio carentem, si ab æquilibrio dimoueatur vi aliqua externa, vbi sibi relicta fuerit, regredi ad æquilibrium: Propositione trigesima septima examinatur Villalpandi celebre experimentum in congio Farnesiano de lance suspendendo. Propositione trigesima octaua τὸ ζυγόν apud Aristotelem in Mechanicis quid sit inquiritur, & ostenditur nec esse libra vt Leonicus vertit, nec ergata, vt Stephanus, nec iugum lyræ vt Budæus, sed speciale organum tympano illi Nonnarum, quod vulgò *tornum* dicunt, simile. In corollario ostenditur vtilitas geometriæ ad locos aliquot Scriptorum intelligendos, vt quo differant scura à clypeis apud Liuium, & quid apud Anastasium Bibliothecarium sint spongiæ tres à Pontifice Gregorio II. Eudoni Duci missæ.

VI. Propositionibus 39. 40. 41. vectis, libræ, & circuli conuenientia ab Aristotele in Mechanicis relata exponitur: ad quod libræ genus spectet illa, quam ibidem appellat *κάλαμα*, agitatur: lex illa reciproca ponderum & brachiorum libræ, Aristoteli cognita fuisse ostenditur, & noua quadam ratione demonstratur. Hanc adeo peruulgatam legem non fuisse legitimè probatam ab Archimede scripsit R. P. Ricciolus in noua de Machinis philosophia part. 2. sect. 4. & part. 3. sect. 2. fortasse ad id permotus fuerit quod nihil tunc cogitarit de principio illo *ἕν μὲν ὅτι*

suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet; cum in linea perpendiculari fuerit punctum suspensionis, & centrum grauitatis; cum tamen eo maximè nitatur illa demonstratio Archimedea, sicuti & ea quam suprà dedimus in propositione vigesima. Speramus futurum vt Archimedex rationi acquiescat cum illius principij probationem legerit in nona huius libri propositione, & cum principij eiusdem vsurpandi methodum examinarit in propositionibus nostris 18. 19. 20. Ratio verò illius reciproce legis physica quam ipse profert in hypothese quæ re vera est, grauium scilicet ad idem centrum vergentium, nonnihil eneruari videtur per demonstrata in corollario secundo vigesimæ primæ; ibi enim ostendimus legem illam grauium inæqualia vtrinque pendentia tunc committunt æquilibrium, cum reciproce se habent vt recta brachia libræ non conuenire isti libræ, sed Archimedex tantum.

VII. propositione 42. ostenditur contra Villalpandum libram quam Romanam dicimus, apud antiquos Romanos & Hæbræos fuisse in vsu: denique propositione vltima monstramus methodum non vnā ex Archimedæis principiis examinandi pondera rerum per duas suspensiones libræ, quarum vnā res eadem pendeat in aëre, alterā, mergatur in aquā. Ex illis verò iisdem principiis ostendimus causam cur machinula mirabilis quam *anserem* appellat R. P. Maignan in cursu philosophico, modo subeat vndas, modo emergat ex illis, modo stet in medio itinere pendula pro arbitrio moderatoris: illo verò experimento non probari aquam grauiare in aqua ibidem demonstramus.

VIII. Cæterum quæ ad principiorum libræ elucidationem hoc libro scripsimus, ea nunc sufficiant; ne ad quæstiones physico-mathematicas ab isorrhopicis dependentes transitum faciamus; id enim foret præter institutum præsentis libri, & propè infinitum; cum Recentiores quidam nec ignobiles Philosophi in singulis penè causarum naturalium effectis explicandis ad æquilibrium confugiant. Sed de iis alius esse debet agendi locus; nempe is vbi quæstionum magna pars magis disceptatur, quam demonstretur; quanquam & hoc ipsum, si rectè fiat, laudis & vtilitatis plurimum habere censemus. Quoniam enim physicarum rerum hæc est natura, vt obscuriores sæpe sint, quàm vt mathematicè demonstrari queant; non erit vlla eas contemplantis culpa, quod euidenti mentis luce illas non detegat; sed ille summè laudandus, qui rationes excogitet quarum aliæ in obscurissimis assensum auditoris rogent, vt simile quid in veteri agriculturæ proverbio dicitur; aliæ in minus obscuris exorent; aliæ deniq; in minimè nubilosis, cogant. Cum itaque Geometræ sit non versari nisi in iis quæ cogunt, consultè abstinuimus in duobus hisce postremis libris à quæstionibus physico-mathematicis, quæ se plurimæ offerebant; pauculas tamen propè inuicti attigimus propter summam quam habebant connexionem cum re mathematica quam tunc pertractabamus. At, inquires, in libro sexto, cum ageretur de grauium accelerato descensu, ea saltem ex Physice referri inter postulata non oportebat, quibus non stantibus,

reliqua corruunt: nam si tempus & spatium descensus istius non componuntur ex partibus in infinitum diuiduis, euerti necesse est omnia ibi constituta. Respondeo primò istud nequaquam esse necessarium; neque enim propositionis hypotheticæ veritas corrui, ex eo quod res de facto non inuestiatur illâ hypothesi; ipso etenim meridie ista assertio est vera *si sol est sub horizonte, nox est*, de quo satis egimus supra in propositione vigesima quarta. Respondeo secundò illam quæstionis solutionem de compositione physica temporis & spatij hic necessariam non iudicari ab iis quorum maximè interesse videtur, hoc est, qui tempus & spatium pernegant componi physicè posse nisi ex partium numero finito. Nam R. P. Maignan, qui inter illos vnus inprimis est, cap. 14. cursûs philos. prop. 30. in scholiò, contendit contra R. P. Fabry, dogma Galilæi de acceleratione secundum numeros 1. 3. 5. 7. 9. non corruere sublata physica spatij & temporis *diuisibilitate* in infinitum; imò optimè stare cum sententia quæ non nisi numero finitas physicas partes in tempore & spatio ponit. Sed hac lite inter duos istos Autores iniudicatâ, persto in prima responsione; cum apertum sit id nihil officere veritati demonstratorum. Hac certè machina euerti pari successu possint Euclidis elementa; negando videlicet puncta, lineas, & superficies esse possibilia. Quòd si aliquid à nobis postulandum ibi fuerat, quis nobis succenseat quòd postulare ea maluerimus, quæ communi & receptissimâ Philosophorum sententiâ iamdiu in Academiis defenduntur, & quibus datis facilè intelligimus accelerationem illam secundum numeros impares 1. 3. 5. 7. fieri posse; sicuti de facto fieri contendunt Galilæus & Gassendus, quibuscum eo loci disputamus. Addimus denique neque à nobis absolutè postulari lineam esse in infinitum *diuisibilem* quocunque sensu; sed eo, *sine quo non consisterent Euclidis Elementa*; in hæc enim verba concepimus postulatam sub finem trigesimæ quintæ libri sexti.





APPENDIX PRIMA.

*VBI RECIPROCA LIBRÆ CURVÆ
lex defenditur contra nonnulla, quæ Typographica
libri septimi operâ iam nauatâ, opponi posse vi-
dimus.*

I. **R**eciprocam illam curvæ libræ legem quam in propositioni-
bus 18.19.20. libri septimi demonstro, videri repugnare cum
propositione quinta R. P. Mersenni in libro de Mechani-
cis, postea audiui quàm prælo mandatus & excusus erat li-
ber ille huius Operis vltimus: quæ fuit causa vt attentius
rem totam perpenderem; sed examine peracto, hæc fuit conclusio mea;
*methodum nostram in librâ curuâ adhibitam non posse accusari, saluâ methodo quam
Archimedes in rectâ vsurpauit.* Si quis enim propius rem nostram inspiciat,
illam comperiet non esse nisi extensionem methodi Archimedæ, eiusque
nos vestigiis diligenter insistere. Dubitare certè non possumus quin de-
monstratio nostra inconcussa debeat stare, si steterint postulata sub finem
duodecimæ propositionis adscripta, in quibus illud est potissimum, *grauia
æqualia vno sui tantum puncto terminis peripheriarum æqualium alligata, & liberè
inde pendentia, nec vltra centrum porrecta, æqualiter inter se ponderare.* Quamuis
ad legis illius demonstrationem nihil necesse est grauia illa in peripherias
concentricas æquè dispersa, ex terminis peripheriæ centro grauium con-
centricæ pendere ope linearum; sed satis est si committant æquilibrium,
vbi eiusmodi peripheriarum bisectio fuerit collocata in extremis arcûs
illius concentrici, qui vicem libræ sustinet, & suspenditur tantum ex pun-
cto hinc & inde æqualiter distante ab extremis quibus grauia adhærent.
Postulamus quidem sub finem vigesimæ secundæ, *grauia esse eiusdem ponde-
ris liberè pendentia per lineas directionis,* sed ad alterius cuiusdam probationem
eo egemus; non autem ad rem præsentem; de hoc tamen post agemus n.
14. Illud porro principium propositione nona demonstratum, *vnumquod-
que suspensorum &c.* necessariò adhiberi debet in curvæ libræ demonstra-
tione ista, sicuti & in rectâ; vnde si quis contenderet illud esse verum in
libra recta, falsum autem in curuâ, labefactaret sine dubio structuram
nostræ demonstrationis: attamen ratio adducta in illa nona propositione

Bbb

paribus vrget momentis pro curua & recta. Ista enim propositio, si magnitudo aliqua grauis ex vno libra ad horizontem parallela puncto semel pendeat; postea vero quam fuerit in duas partes secta, singula pendeant immota ex singulis eiusdem librae punctis; libra ipsa ex eodem illo primae suspensionis puncto suspensa, & duas illas partes sustinens, manebit horisontis parallela; ista inquam propositio ad demonstrationem illius legis reciprocae necessaria, non aliter probatur, quam quod eadem magnitudo non fiat magis vel minus ponderans, nisi quia, quem ad libram ex eodem sui semper puncto suspensam situm semel habet, deinde mutat: ergo quamdiu eundem situm retinebit, pari quoque linea directionis premet libram; ergo ita premendo illam, non mutabit priorem illius situm. Hæc verò ratio competit tota librae curuæ, vt patet: non igitur potest Archimedeæ demonstratio firmis inniti fundamentis, quin illis ipsis par pro libra curuæ theorema insistant.

II. Sed vt istud ampliùs declaremus, assumimus maioris perspicuitatis causâ casum vnum particularem; esto itaque (Fig. 113.) h b d u peripheria circuli centro i descripta, grauitate carens, & in ea sumptus sit arcus a h b c, qui sit ad totam peripheriam vt 10. ad 16 vel vt 5. ad 8. diuisusque sit bifariam in b: arcus a b, b c secti sint in arcus alios inter se æquales a h, h l, l m, m f, f b, b n, n g, g e, e d, d c; rursus singuli istorum secti sint bifariam in punctis 1. 2. 3. 4 5. 6. 7. 8. 9. 10. in quibus ponantur decem magnitudines inter se æquales, & in commune grauitatis centrum i vergentes innumeris nutibus; iisdem videlicet quibus tendant, si singula vno modo dispensentur in arcus a h, h l, l m &c. Ex postulato concessio ab aduersariis, si arcus a b c sustinens istas decem magnitudines suspendatur ex solo puncto b, non mutabit situm. Manebit quoque vt iacet, si intra arcum a b c grauitate destitutum intelligatur alius arcus æqualis, similis, similiterque positus, iste verò arcus sit loco sustentaculi fixi, quod connecti intelligatur punctis 1. 3. 5. b. 6. 8. 10 peripheriæ a b c sustententis pondera pendentia liberè & pronutu quæque suo: istud enim manifestum est. Sed neque minùs apertum est, si soluantur connexiones punctorum 1. 5. b. 6. 10 manèantque solæ dubrum 3. 8. mansurum quoque vt iacet: quia videlicet partes ex 3. 8. suspensæ, solutis vinculis aliis, manent vt prius collocatæ fuerant; ad quod per accidens se habet partium suspensarum æqualitas, dummodo maneant vt antea, & suspensio sustentaculi fiat ex eodem b. Ex eodem postulato sequitur si arcus h b c frangi intelligatur in e, (ita vt a e, e c partes non cohæreant, & vnâ motâ alia non debeat propterea trahi) & si a b c pendeat ex solo puncto sustentaculi quod congruit puncto f; arcum a b c cum suis ponderibus mansurum vt iacebat antea, quia vtrunque pari interuallo pendunt quatuor magnitudines grades 1 2. 3. 4. & 5. 6. 7. 8. Similiter si arcus e d c intelligatur suspendi ex sustentaculi puncto quod congruit puncto d, portio arcus e d c manebit cum suis ponderibus sicuti ante diuisionem iacebat, nec vllatenus mouebitur. Hactenus conuenit inter omnes.

Ostendendum superest si sustentaculum ex puncto in quo est b, intelligatur suspendi, & ex illo unico pendere liberè, sustinendo arcus a e, e c onustos suis ponderibus, quorum octo pendunt ex f, duo ex d, illud ita liberè pendeas non mutaturum esse positionem; sed manturum, vt antea iacebat; ac proinde vt est e b arcus ad b f, hoc est vt 4. ad 1. ita vicissim esse pondus pendens ex f ad pondus pendens ex d. Id verò patet ex eo quod illa magnitudo composita ex decem grauibz suspensa puncto b, & cohærens primo arcui a b c antequam diuideretur, diuisa postea fuit in duas partes cohærentes arcubz separatis a b e, e d c; quarum singulæ pendentes de punctis f, d, manent vt prius iacebant; ergo habent eandem positionem ad punctum b, vnde pendunt: ergo cum sustentatæ libræ de puncto b suspensæ non mutant vim eleuandi sese mutuo nisi quia fiunt viciniiores vel remotiores puncto b sustentanti; & cum non fiant viciniiores vel remotiores neutra pars fiet debilior, neutra fortior; ergo manebunt vt antea iacebant: vel si hoc non consequitur in isto genere libræ, negandum est cogere in Archimedeæ: ergo &c. quod erat demonstrandum, & quod clariùs patebit ex solutione nonnullorum quæ opponuntur.

III. Ex demonstrandi ratione patet quod accuratè hîc inculcandum censeo, vt solutio obijciendorum liquidò constet; & vt obuiam eatur paralogismis, qui in hac materia facilè obrepunt in exercitatorum etiam cogitationes. Illud verò est demonstrationem ex Archimede nostram probare grauiâ a e, e c de libræ f b d punctis f, d suspensâ committere æquilibrium eiusdem libræ ex b pendulæ; illa tamen grauiâ poni certo quodam modo dispersa & dispensata per curuas a b e, e d c, ita vt partes eorum singulæ suas habeant lineas directionis non parallelas, emissas ad i centrum ex singulis arcuum punctis. Cogita vniuersam illam grauitatem, quæ ex arcu a e suspenditur, conferri in punctum f; vniuersam verò, quæ ex arcu e c, in punctum d: in hoc casu lineæ directionis vniûs brachij erunt in vnam collectâ emissâ ex puncto f; alterius verò brachij in alteram ex puncto d; dum verò ita colliguntur, mutant penitus directionis positionem priorem, quæ fiebat vt sese secarent omnes; cum hîc sibi mutuo congruant; non mutantur autem, si in priore situ fuissent parallelæ ad rectas f i, d i; vnde nec suspensæ magnitudines habuissent nisi duos directionis modos diuersos; hîc verò habent innumeros. Graue istud vocetur *dispersum* siue *distributum*; aliud dicatur *coactum* siue *collectum*. Si igitur partes illæ grauitatis non ponatur manere dispersæ, nihil concluditur vi demonstrationis, vt patet: debet ergo ad effectum demonstrationis obtinendum suspendi graue distributum per innumeras directionis lineas, & manere cum iisdem directionis lineis, quando eius partes ex solis punctis f & d ponuntur suspendi; ille autem modus iam explicatus est, generaliùsque patet ex vigesima propositione libri vltimi. Atque hæc libra curua per hoc *essentialiter*, vt loquimur in Scholis, differt à rectâ, vel à compositâ ex duabus aut pluribus rectis, in quarum singulis rectæ directionis inter se æquidistant om-

nes, quamvis non æquidistant directionis rectis librarum non suarum. Quod si inferas posse dispersa gravia in curvas $a b e$, $e d c$ colligi in puncta f , d absque ullo æquilibrij & demonstrationis dispendio, gratis & ἀνευελπίτως istud colligis, nisi ex naturâ cuiusque generis libræ id demonstrares. In librâ quidem Archimedea, cum lineæ directionis omnes sint parallelæ, id verum esse ultro admittimus; at in libra curua sine demonstratione concedi non debet; immò est falsum, ut magis patebit ex subiiciendis. Quæcunque igitur super æquilibrio curvæ libræ sustentis gravia, sunt à nobis demonstrata in libro septimo, intelligi tantum volumus de grauibz distributis, & non de collectis, ut pote mutantibus naturam libræ curvæ; idque necessariò subaudiri declaramus nunc, licet expressè ibi tunc non monuerimus: etenim demonstrationis vis nihil aliud eüincit, ut iam diximus. Præterea aduertimus debere ita assumi quemlibet arcum $a b c$, & in eo ita dispensari gravia, ut collectio omnium premat punctum b ad i : si enim nihil vrgeat; arcus $a b c$ nihil sustinet, nec fungitur munere libræ, ideòque nec libra appellari potest; poterit tamen si fixum punctum b , unde arcus $a c b$ suspenditur, prematur iuxta positionem aliarum directionis linearum, quæ à linea $b i$ diuersæ fuerint; ut numero mox sequenti constabit ampliùs. Progredior iam ad ea quæ obstare videntur veritati demonstrationis nostræ.

IV. Primum quod opponi posse videtur est, si libra $a b c$ sustinens ex punctis f , d duas illas magnitudines manet in æquilibrio, apertè hinc sequitur, graue ex d pendens propellere tantumdem punctum b ad i centrum commune per lineam $b i$, quantum per eandem lineam impellit graue f : hoc enim est committi æquilibrium grauium duorum, nempe vnum tanta vi vrgeri punctum suspensionis b , quanta aliud ex opposito vrget. Vnde etiam conficitur decem illas magnitudines ita dispensatas in decem partes, pari vi premere punctum b , & trahere ad i , quantum traherent omnes positæ in d . Atqui ista sunt manifestè falsa; non igitur committitur æquilibrium; sed latet aliquis paralogismus in nostra illa demonstratione.

V. Ostenditur autem facîle punctum b plus pelli versus i à puncto graui f , quàm à puncto graui d : graue enim d , cum tendat in i per iter $d i$, non vrget punctum b nisi quantum obstat illi itineri; non obstat autem nisi per lineam rectam parallelam rectæ $d i$. Faciamus enim punctum b non esse fixum, & carere omni ῥοπῇ, sicuti & totum arcum $b d$, cui graue d cohærere ponitur: graue igitur d liberè pèrgens à puncto d ad i mouendo arcum $b d$ cui inhæret, mouebit punctum b per rectam parallelam itineri $d i$; ergo quatenus b , quod fixum hæret, resistit sui lationi per illam parallelam, eatenus premitur à graui d : premitur igitur ad positionem solius $d i$, & nullatenus ad positionem rectæ $b i$. Hinc fit ut si ex arcus $h b d$ punctis h , d suspendantur gravia æqualia, non premant sustentaculū b versus i ; sed ut ad positionem rectæ $d i$, æqualibus oppositisque viribus illud premant. Iam verò ponamus graue e ferri sponte & nutu suo ad i

PRIMA.

281

per directionis lineam $e i$; si punctum b non esset fixum, dum graue e pergit ad i pelleret punctum b , cui per arcum $b g e$ cohæret, per parallelam rectæ $e i$, fieretque simul & semel appropinquatio puncti b ad punctum i , & recessus eiusdem b à recta $b i u$: quâ itaque fieret approximatîo ad punctum i , si b non maneret fixum, eatenus b premitur versus i , à graui e , dum ob adhæsiônem illam resistit potentiæ grauis e . Quia verò graue g tendit per $g i$ ad i ; & semita $g i$ magis accedit ad situm rectæ $b i$, quàm accedat recta $e i$; fit vt graue g plus premat b versus i , quàm premat graue e ; quamuis g , & e ponantur æqualia. Hinc clarè liquet graue vnum & idem ex puncto quouis arcûs $b h$ suspensum numquam tantum grauare b versus i , quantum si collocetur in ipso b : graue igitur dispersum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. ex f pendens non ita premit punctum f , vt premeret collectum. Atque hæc est proprietas curvæ libræ in qua nullæ sunt duæ lineæ directionis æquidistantes (nisi ita volueris appellare lineas $h i$, $i d$ grauium ex diametro oppositorum) cùm in rectâ librâ pressus sit idem à graui collecto, qui à disperso.

V I. Ista quæ numero quinto iam demonstrata sunt, verissimâ esse fateor: sed nego inde quicquam fieri contra assertionem nostram: nego, inquam, ex nostra conclusione confici tantumdem pelli punctum b versus i à graui ex d pendente, quantum à graui ex f ; nempe quia etiam pernego æquilibrium prout conuenit omnibus librarum generibus oriri ex eo quod punctum b , vnde libra pendet, æquè prematur & propellatur ad i per lineam $b i$: dicendum enim est procedere ex eo quod vires neutri partium sint sufficientes ad eleuandam oppositam, hoc est, ad longiùs remouendam illam à termino ad quem sponte vergit; eatenus enim tantum pugnant, quatenus obistunt suis vicissim propensionibus, siue, *ῥοπαῖς*. Aio itaque licet b inæqualiter prematur versus i à suspensis f & d ; æquilibrium tamen ideo fieri, quia neque graue f potest longiùs à centro i promouere oppositum d ; neque ipsum d potest quid simile in graue f : est ergo *ῖσοπαλὲς* requisitum vt eueniat æquilibrium. Ex demonstratis vero in illo n. 5 satis patet neque consequens esse, vt omnes decem partes graues æquè pellant punctum b ad punctum i , dispersæ atque collectæ.

V I I. Alterum quod objici potest est propositio illa R. P. Merseſſenni quinta Mechanicorum. *ῥεκτήσις & libra proprietas est, vt potentia quæ sunt in ratione linearum perpendicularium ductarum à centro ῥεκτήσις aut libra super lineas directionis potentiarum, reciproca; sint æquibres, hoc est æqualiter trahant aut pellant.* Additur huiusce theorematis ea probatio, quæ me nunquam adegit ad assensum: ego illud ita demonstro. Esto (Fig. 114.) circulus $d c r$ centro b descriptus, à quoeducti vtcunque sint radij $b d$, $b c$, & ex punctis d , c emissæ tangentés $d e$, $e c$; intelligatur libra $d b c$ infracta; cuius duo brachia $d b$, $b c$ sint rigida, & firmissimo nexu colligata; in punctis verò d , c statuantur centra grauium æqualium vergentiû ad e . Aio si libra infracta $d b c$ suspendatur vt iacet ex puncto b , indeque liberè pendere permitta-

Bbb 3

tur, ipsam permanfuram esse in eodem situ, absque ullo sui motu; hanc verò libræ ita suspensæ quietem voco *æquilibrium*. Quoniam enim grauia d & c eandem prorsus positionem habent ad punctum suspensionis b (etenim anguli d b e, e b c, necnon d e b, c e b, & latera d b, b c sunt æqualia; itemque d e, e c) non apparet vel tenuis vmbra rationis cur graue d vires maiores habeat ad eleuandum graue c, & vicissim; ergo clarum est omnibus pensatis æqualitatem esse virium, ideóque mansura illa esse, vt iacent, immota; quod erat demonstrandum. Hoc ipsum perinde euidens est, si pro tangentibus d e, e c sumamus secantes d f, f c conuenientes in rectæ b e punctum quodlibet f diuersum à puncto e. Secundò brachia infra-ctæ libræ d b g sint inæqualia, sitque b g minus; per d, centro b descriptus sit circulus d e r, sintque d e, e c tangententes; per g autem ducta sit g h æquidistans rectæ c e. Aio si d e, g h ponantur lineæ directionis, & graue g sit vicissim ad graue d, vt recta b g ad b d, fiatque suspensio ex solo b puncto, mansura grauia d, g vt iacent. Istud patet ex eo quod iuxta leges libræ rectæ, cum g h, c e æquidistant, & cum vt b c brachium ad b g, ita vicissim sit pondus g ad d vel ad c illi æquale (quod in c poni iam volumus) pondus g in trahenda recta g b per lineam directionis g h æquales vires habeat atque pondus c in trahenda illa eadem recta b g per lineam directionis c e: sed pondus c habet vires æquas ad cohibendum pondus d ne ab eo eleuetur, hoc est remotius fiat à centro e; ergo pares vires habet pondus g; ergo pondera d, g, vt iacent, committunt æquilibrium; quod erat demonstrandum. Hoc ipsum perinde euidens est, si secantes d f, c f ponantur lineæ directionis, & rectæ c f ducta sit æquidistans g l, sintque d f, g l lineæ directionis; nempe pondus d esse ad pondus g, vt est perpendicularis ex b demissa in lineam directionis g l ad perpendicularem ex b demissam ad lineam directionis d f. Tertiò denique si anguli f b d, f b c fuerint inæquales, aio pondera ex d, c suspensa esse vicissim vt perpendiculares ex b demissas ad f c, f d. Priùs tamen monstrandum est lemmatum istud. Esto d b g (Fig. 114. eadem) planum suspensum ex b quolibet puncto, carens omni *φορῶν*, in quo ponantur duo grauia d, c ita collocata, vt graue d nutum habeat ad positionem cuiuslibet rectæ d e, graue autem c ad positionem cuiuslibet c i; neutra verò rectarum d e, c i transeat per b; præterea siue nutus d e, c i æquidistant, siue non, grauia d, c ita sese mutuò cohibeant, vt planum non mutet situm quem ante ipsorum aduentum habebat. Patet si in eodem illo plano intelligantur rectæ d b, b c coherentes, planum d b c non posse moueri à grauibz d, c retinentibus eosdem nutus, quin moueatur planum m b n, cum sint vnum & idem. Patet quoque si rectæ m b, b n occurrant nutibus d e, c i in m, n, planum e m b n i, non motum iri ob eandem causam. Si igitur m b n ponatur libra infracta sustinens pondera d, c per lineas directionis m d, n c, ipsam vi ponderum moueri, nihil erit aliud, quàm planum e m b n i moueri vi eorundem ponderum; & si vi eorundem ponderum non possit moueri e d b c i, neque poterit pla-

num $e m b n i$. Hoc posito (quod sanè concedendum videtur sincero cuiuslibet veritatis Geometricæ indagatori) demonstratur assertum hoc pacto. Sit libra infracta $m b n$ suspensa ex b , sustineatque ex m, n pondera d, c , quæ vicissim sint vt perpendiculares ex b in lineas $m e, c n$: aio libram infractam $m b q$ mansuram vt iacet, si ex solo puncto b suspendatur. Perpendiculares sint $d b, b q$: ergo cum pondus d sit ad pondus c , vt perpendicularis $b q$ ad $b d$, si libra infracta ponatur $d b q$, planum $e d b q$ non mouebitur ab illis ponderibus, vt primo loco ostendimus; ergo cum libra infracta $d b n$ sit in eodem plano $e d b n i$, neque ipsa mouebitur suspensa ex eodem puncto b ; ergo quomocunque se habeant rectæ directionis $d e, c i$, si pondera d, c sint reciprocè vt perpendiculares ex b in rectas $d e, c i$ demissæ, committetur æquilibrium libræ infractæ, quod erat demonstrandum. Si itaque perpendiculares ex b puncto suspensionis actæ in lineas directionis iam explicatas, vocentur brachia libræ, verum est in libra infracta non minùs quàm in recta, *vt sunt pondera, ita vicissim esse brachia.*

VIII. Tria hîc genera librarum distinguimus plurimùm diuersa, quamuis eadem reciprocatationis proprietate prædita sint; nempe libram rectam, infractam, & curuam. Recta habet brachia in directum posita; infracta habet illa angulum constituentia; curua habet circuli arcus pro brachiis. Differunt autem maximè diuersitate linearum directionis: nam in recta omnes sunt parallelæ inter se; in infracta, omnes vnius ponderis partes suos exercent nûtus per parallelas inter se; & omnes alterius æquè prementis ex opposito, per parallelas quoque inter se, quamuis parallelæ ponderis vnius cum parallelis alterius angulum constituent. At verò in libra curua omnes vtrinq; directionis lineæ (quæ innumeræ necessariò sunt) vergunt ad vnum & idem punctum. Hæc porrò libra curua propiùs accedit, vt patet, ad proprietates grauium solidorum prout ea de facto suspenduntur à machinariis. Istam verò tam enucleatam explicationem trium librarum debemus dubitationi quæ emerfit, & cuius tollendæ causa necessaria fuit. Vnum hîc præteriri non debet libram videlicet infractam à Merfernno explicatam non constare nisi duobus brachiis, siue duabus directionis lineis; posse tamen intelligi libram, quæ constet longè plurimis. Vt si (Fig. 311.) arcui $a h b c$ intelligas circumscribi figuram retilineam decem laterum tangentium peripheriam in punctis 1. 2. 3. 4. & c. & in singula latera dispensari parem grauitatem æquabili & vniusmodi lege, ita vt partes grauitatis dispensatæ in singula latera habeant nûtus parallelos radio ad tactum emisso. Si ista latera intelligantur firmo nexu colligari, fiatque compositæ lineæ suspensio ex b , & ponatur sustinere ex solis punctis f, d grauia colligata 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. ex puncto autem d grauia 9. 10. connexa inter se, & soluta ab aliorum octo nexu; æquilibrium committetur. Erret verò plurimùm quisquis putarit rationem & virtutem premendi istius libræ non esse diuersissimam à ratione & virtute qua premeret eadem grauitas dispensata in arcum $a b c$ iuxta leges libræ cur-

uæ; aliud enim est grauia dispensata esse utrobique eadem, aliud pari modo, paribûsque viribus premere suas libras. Vnde liquet iuxta nostram methodum assignari rationem ponderum utrinque pendentium in libra infracta, etiam quando plura quàm duo habet latera, quoties nempe ea sunt æqualia, circumscripta vel inscripta circulo; comprehenduntur autem eo numero $a b c$, qui secetur bifariam in b ; & ita in e, f , ut dimidium numeri $e c$ sit æquale numero $b f$.

IX. Respondemus nunc tandem ad illud quod n. 7. obiectum fuerat; propositionem Mersennianam nihil prorsus obstare veritati nostræ propositionis: agit enim de libra infracta; nos verò de curuâ, id est, de ea cuius partes vno modo graues ad centrum commune vergunt innumeris lineis directionis.

X. Sed ecce in omni genere libræ ostenditur graue suspensum in f ad graue suspensum in d , illique æquiponderans, esse ut est (Fig. 113.) recta $d i$ ad $f q$, vel ut sinus arcûs $b d$ ad sinum arcûs $f b$. Quoniam enim centrum grauitatis decem simul grauium est in recta $b i$; & quoniam partium duarum ex f & d suspensarum centra grauitatis sunt in rectis $f i, d i$; idem verò manet æquilibrium in quocunque puncto radiorum $f i, d i$ collocentur eiusmodi centra; ergo si locentur in f, d , iungaturque recta $f d$ occurrens rectæ $b i$ in o ; cum centrum grauitatis duorum simul grauium f, d sit in recta $f d$ connectente eorum grauitatis centra, & cum sit etiam in recta $b i$, ipsum erit o : ergo ut $o d$ recta $o f$, ita in triangulis similibus $o d i, o f q$ sunt homologa latera $d i, f q$: ergo ut $d i$ recta ad $f q$, ita est pondus f ad pondus d . Demonstratio verò est eadem in aliis casibus.

XI. Respondemus primò vim argumenti retorqueri posse in aduersarium. Quoniam enim æquilibrium perinde committeretur si graue quod in d collocatum fuit, ponatur in B ; id ita fiat, & esto B centrum grauitatis, iungaturque recta $f B$ occurrens rectæ $b i$ in p : punctum igitur p est centrum grauitatis magnitudinis compositæ ex duobus grauibz f, B : ergo ut recta $p B$ ad $p f$, vel ut $B i$ ad $f q$, ita est graue f ad d , vel ad B : sed ut idem graue f ad d vel ad B , ita etiam ostendimus esse rectam $d i$ ad eandem $f q$: ergo $d i, B i$ sunt æquales rectæ, totum & pars, quod est absurdum. Obiecta igitur ratio peccat in aliquo.

XII. Respondemus secundò illam perpetuo paralogismo laborare, dum ea quæ sunt libræ planæ attribuit curuæ. In libræ planæ principiis omnis magnitudo habet centrum grauitatis, at in libræ curuæ genere nullam sciò præter sphæricam, quæ extra grauium commune centrum posita pendere possit ex vno puncto indifferenter in quocunque situ, quod tamen definitio centri grauitatis requirit: esto quælibet habeat centrum grauitatis aptitudine proximâ, punctum videlicet quod in centro grauium cõmuni statutum, verè fungitur munere centri grauitatis, & dat magnitudini *ἡ ἀπορία* illam ad quemcunque situm. Præterea quod recta connectens centra aptitudinalia (ita loqui nunc liceat) duorum grauium in hoc genere libræ

libræ curvæ, ita à totius centro *aptitudinali* diuidatur, vt sicut suspensa pondera ita sint vicissim portiones ipsius rectæ, est proprietas libræ rectæ, quæ curvæ concedi non debet, nisi postquam fuerit demonstrata: gratis igitur concluditur *vt o d recta ad of, ita esse pondus f ad pondus d*, quamuis dāremus punctum o esse illud *aptitudinale* centrum.

XIII. Respondemus igitur vltimò nihil Geometricè contra nos demonstrari vi rationum n. 10. oppositarum; cùm in illis plurima assumantur contra leges Geometricæ demonstrationis. Occasione illius paralogismi, quo quæ sunt libræ rectæ traducuntur ad curuam, moneo simile peccatum commissum iri ab eo qui grauitatis vnusmodi dispensatæ per totum arcum ab e (Fig. 113.) siue decem illorum simul grauium centrum quod suprà vocauimus *aptitudinale* putaret inueniri debere methodo, quam in vigesima prima quinti libri præscripsimus, & qua euincitur istud generale & rotundè expressum, *vt arcus a f e quicunq; semiperipheria circulari non maior se habet ad subtensam a e, isa est radius f i ad rectam i r, qua grauitatis centrum arcus a f e distat à centro i*. Illa enim methodus fundatur in libræ planæ principiis, in qua omnes partium nutus fiunt per parallelas: at in ista curua fiunt per rectas conuenientes in idem centrum i. Præterire non possum ista quæ hoc in loco aduersus nostra asserta obijciuntur, non cohærere secum: si enim ad æquilibrij rationem necesse foret vt pondera vtrinque suspensa (Fig. 113.) premerent punctum b, vt obiectorum primo contenditur; non posset libra f b d compacta ex rectis f b, b d ita pendere ex b, vt immota sustineret graue vnum ex f pendens per lineam directionis f i, alterum vero ex d per lineam directionis d i; nam graue in d positum non premeret punctum b. Atqui ex hac quæ obijcitur Mersenni propositione id fieri potest, si graue in f collocatum, fuerit ad graue in d positum, sicut est b i finis anguli b i d, ad f q finem anguli b i f.

XIV. Restat vnum quod quæri posse video, vtum si graue dispersum collocaretur totum in r, ita vt per vnicam directionis lineam r i, omnes eius partes vergerent ad i; perinde premeret punctum f versus i. Respondemus si postulatum illud seruetur in curuâ libræ, idem graue per eandem directionis lineam f i pariter trahere punctum b versus i, siue collocetur in b, siue ab eo pendeat per lineam f r, partem radij f i; dicendum esse magis premendum esse punctum b per totam grauitatem collectam in r, quàm per dispersam in 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. partibus: ratio est quia si poneretur tota in r, singulæ partes premerent punctum b directò versus i; at verò quando sunt dispersæ premunt obliquè, ac proinde minùs potenter, vt supra ostendimus n. 5. Quod si quis nolleret dare illud assumptum, malletque asserere graue idem in hac librâ minùs premere punctum f in minori à centro i distantia, quàm in maiore, posset respondere aliter: mihi tamen longè verisimilius est retinendum esse illud postulatum: Eo autem retento si diametro b i describatur circulus b y i z, & ex arcu h b d per lineas directionis ad i porrectas transferatur ex arcu h b d suspensa grauitas in arcum b y i z, idem

Ccc

consequetur effectus libræ curvæ by i z suspensæ ex b; eruntque ut brachia huius curvæ, ita reciprocè suspensa. Clariùs autem hoc posito dicetur, quæcunque sit curva b i y z cui gravitas arcûs h b d iam dicta ratione aptetur, ut sunt anguli qui ad i constituuntur, ita reciprocè esse pondera; quem loquendi modum iam sub finem duodecimæ septimi libri indicavimus. Præterea manente by i z circulo, esto b z quadrans eiusmodi peripheriæ, & by vncia eiusdem peripheriæ totius; ex y, z ducantur rectæ y b, z b, fiatque libra infracta y b z, sustinens ex y, z gravia committentia æquilibrium per lineas directionis y i, z i. Ponderus igitur y erit ad ponderus z per demonstrata n. 7. ut recta b z ad by; hoc est, ut diameter quadrati ad latus eiusdem. At si arcui s z æqualis abscindatur z t, & ex arcu b y i resecetur by x æqualis ipsi b z t, arcus x b s ad arcum s z t erit in hoc casu ut ternarius ad unitatem, vel ut 180. gradus peripheriæ circuli b x i z, ad 60. gradus; hoc est, ut arcus b z ad by. Ex principiis igitur libræ curvæ si per arcum x b t dispensetur æqua lege gravitas x b z tendens ad i per lineas directionis ex i emissas ad quodlibet peripheriæ x b t punctum; libra x b z de b suspensa, & arcubus x y s, s z t ex y, z pendentibus, atque ut iacent manentibus, committetur æquilibrium; ergo in hoc genere libræ, graue x y s pendens ex y ad graue s z t pendens ex z se habet ut ternarius ad unitatem; in alio autem genere infractæ, graue ex y pendens ad pēdens ex z, se habet ut diameter quadrati ad latus eiusdem. Si igitur ponderus libræ istius infractæ dispensetur per arcum x b s, ponderus verò pendens ex z, per arcum s z t; libra non manebit in æquilibrium; sed inclinatio fiet ad partes z: ergo ex ista dispensandi ratione magis debilitatur ponderus infractæ libræ ex y pendulum, quàm ponderus ex z. In duplici gravitate ita dispensata per arcus x y s, s z t. considerari & distinguere debet primò ipsa in se gravitas seorsum spectata, secundò ipsius vires ut premit illa quidem punctum y ad i; ista punctum z ad idem i: gravitates in se spectatæ sunt ut ternarius ad unitatem; vires premendi iam dictæ, sunt ut diameter quadrati ad latus eiusdem; quod diligenter notari oportet, ut natura libræ penitus inspicatur, & ita vitentur mille sophismata. Præterea hoc moneo, si arcui t s abscindatur x t æqualis; quamvis si graue x t penderet ex libræ curvæ x b t puncto x bifariam secante arcum x t, æquiponderaret magnitudini s z t ex z pendenti; postquam tamen non ampliùs pendet ex x, sed ex y, non æquiponderat illi, licet non mutet situm; eiusque vires ex sola mutatione puncti suspensionis immutantur: sed hoc quoque verum esse comperies in libra Archimedea, si posueris lineam x b t esse rectam, & fiat libra pendens ex b, maneatque pariter diuisa.

XV. Ad ampliorem libræ Archimedæ explicationem advertimus in postulato illo, cum brachia utrinque fuerint æqualia (Fig. 100.) ea, at, & appensa magnitudines æquæ graues; si ad earum alterutram b aliud graue adiciatur, inclinari libram ad partes adiecti ponderis, istam inclinationem ita intelligi à nobis, ut linea directionis b h maneat eadem, & in illa etiam maneat graue

appensum; unde fit ut cum libræ brachium a b inclinatum fuerit in a i, si ex a i auferatur a g ipsi a b æqualis; suspensio progressu temporis mutata fuerit à puncto g ad i, ita ut graue in illo situ, iaceat in libræ a g puncto i. Hic rem concipiendi modus videtur simplicior, minusque obnoxius errori, & paralogismis; quam si conciperemus eiusdem grauis lineam directionis fieri viciniorum perpendiculo ex a demisso; quod tamen in vulgaribus mercatorum bilancibus usu quotidiano euenit. Cauendum verò imprimis censeo ne quis ita libram fingat, ut ex se inepta sit ad inclinationem, accedente vel minimo graui: si quis verbi gratia poneret libræ c b suspendi ex a immobili; graua verò vtrinque æqualia ex brachiorum c a, a b æqualium extremis pendere, nec posse diuelli à punctis c, b, lineasque directionis c d, b h esse quoque immobiles; in hac hypothese c a b non esset vertibilis circa a, quocunque aduentu ponderis; quia videlicet quæcunque alia libræ inclinata portio a i est maior portione a g vel ab: hæc igitur constructio libræ est ineptissima. Porro hæc ipsa cautio est adhibenda in libra curua; si quis enim velit arcum (Fig. 113.) f b n suspendi ex b; & ex f, n pendere graua ad æquilibrium apta; velit tamen in inclinatione libræ, punctum b hære immobile, & brachij b f punctum f colligatum manere cum graui f, & graue f quamdiu mouetur, persistere in linea directionis f i; construit libram indeclinabilem, & minimè libram. Sicuti igitur in superiore casu aliud & aliud libræ punctum responderet lineæ directionis, ita in isto: hocque tantum est discriminis, quod in libra recta punctum illud libræ vsque & vsque remotius euadit à puncto unde suspenditur libra; at in curua potest esse propinquius. Sed casum libræ ex aduentu grauis consequi debere satis est ad veritatem demonstrationum isorhopicarum, quomodocunque tandem à Physico definiatur modus ille cadentis brachij; dummodo libra ita construatur, ut nihil impediat proximam eius dispositionem ad cadendum ex accessione vel minimi grauis.

XVI. Atque ex his omnibus satis liquet à methodo Archimedeæ me non deflexisse, nisi certè ille deflexus percipi nequeat nisi lyncea mentis acie, quod aliis inquirendum relinquo, paratus interim doceri; experientia enim frequente didici hominem me esse, etiam ubi non nisi demonstrationibus agere mihi videor. Hoc autem quod n. 3. scripsi, hic iterum mihi describendum esse censeo, in propositionibus libræ curuæ, quam libro septimo tractaui, me non agere nisi de magnitudine dispersa, & tendente innumeris lineis directionis ad centrum commune grauium; quamuis illi non assignem nisi vnum punctum unde pendeat per lineam directionis illam videlicet in qua est punctum è quo vno magnitudo illa dispersa si penderet, quiesceret immota. Si quid verò lectori fortè occurrerit ibi, quod cum iam explicatis non ita aptè cohærere videatur; huc reduci debet, vel certè iuxta hoc reformari.

XVII. In septimi libri iam laudati propositionis quadragesimæ co-

rollario secundo ostendi alia methodo reciproca libræ legem; illa tamen methodus assumit (*Fig. 103.*) possibile esse graue g , quod paribus quibilibet temporibus per arcum bud sponte sua latum interualla usque decurrat æqualia illis quæ percurrerit magnitudo c per se mota. Istud cum non demonstretur ita esse, Archimedeam demonstrationem illi semper antetuli, quod in eiusdem propositionis corollario tertio satis indico. Principium autem illud esse verum in libra recta patet ex demonstratione legis illius reciproca Archimedea; esse autem falsum in librâ curuâ, liquet ex demonstratis nostris. Quamuis autem pondera in curuæ libræ arcu, si æstimentur secundum vires premendi quas habent, non sint vicissim ut brachia, sed ut sinus arcuum ex *n. 14.* id satis est ad hoc ut certum sit in libræ curuæ casu, non posse dari pondus g , quod paribus temporis partibus, spatij partes percurrat pares illis quas decurrit pondus c .

XVIII. Antea quam dimittamus libram proponimus causam quæ nunc nobis occurrit, cur Aristoteles pronuntiarit phalangem esse vectem inuersum; illam, inquam, qua exigui appendiculi ope magna onera suspendebantur in macello, sicuti narratum extat prop. 42. libri postremi. Pone (*Fig. 104.*) phalangem ba suspendi ex f , & carnem h in lance e prægrauem eleuare appendiculum a ; hoc enim exigit lex emptionis & venditionis quæ fit per libram: ergo dum carnes appensæ deprimentur eleuabitur sursum versus phalangis ba pars longior fa : proinde cum vectem imitetur virga ab , & hypomochlij vice sit f ; longior phalangis pars fa repræsentabit portionem illam vectis cui admouetur virtus vectarij: cum ergo portio illa longior sursum attollatur in magnâ carniū copiâ per phalangem diuendendâ, & cum in vecte inuerso eadem pars sursum pellatur à vectario patet ratio verisimilis cur phalangem omnem dixerit Aristoteles quodammodo (ut interpretor) esse *vectem inuersum*.

XIX. Experientissimus Mersennus, quem nunc præ manibus habeo, docet me vnum de reciproco motu libræ itu & reditu, quod hîc referre debeo. *Iugum* (inquit cap. 13. Reflex.) *bilancis, cuius pars vtraque bes pedis, è linea horizontali depressum, horâ dimidiâ vibratur; ita ut quilibet vibratio duret duo secunda & paulò amplius.* Huius experimenti causa, alia esse debet ab ea quam pro simili effectu in libra Archimedea demonstraui cum Iordano prop. 34. libri vltimi. Ostendimus enim in prop. 36. eiusmodi causam cessare in librâ cuius *potui* sunt ad centrum grauium, ac consequenter in illo quæ allato experimento subjicitur. Causa itaque aliunde peti debet à perito Physico-mathematico; ut, ex eo quod totius illius machinulæ ex lance vtraque, iugo, & funiculis compactæ centrum grauitatis fuerit infra punctum cui ipsa machinula nitebatur pendula: sicuti si chartaceum, aut ex eiusmodi materiâ aliâ triangulum isosceles vertice suspendas, ita ut basis connectens latera æqualia æquidistet horizonti; deinde verò basim ab horizontali situ dimoueas, sinasque triangulum suo nutu sese mouere; vibrationes hinc inde conficiet non paucas, de quibus nonnulla contem-

platione digna accuratè annotauit idem Mersennus lib. Reflex. cap. 12. & cap. 19. vbi tandem pag. 158. ingenuè fatetur *nullum esse funependulum quod exactè, vel secunda, vel quodlibet aliud tempus aquare possit suis vibrationibus, cum sint inæquales . . . quanquam tempuscula vibratiunculis illis explicata tam parùm inter se discrepent, vt in praxi pro iisdem sumi possint.* De hoc verò funependulo, vel vt alij appellant, perpendiculo agit sæpius eo libro, vt cap. 9. 10. 11. & pag. 17. Plurima etiam obseruata leges in eodem Reflexionum libro de grauium casu accelerato cap. 9. 15. 16. & vltimo pag. 91. Paginà verò 135. fatetur nullà demonstratione euinci Galilæi eà de re sententiam; quemadmodum, inquit, *neque rationes quæ hætenus allatæ sunt in gratiam vtriusque motus terræ, quicquam demonstrant, vt optimè annotauit Aristarchi Commentator.* Is est D. Roberuallius, cuius hæc sunt verba in dedicatoriâ libri epistolâ; *nec illud constat quidem an ex tribus Autorum ipsorum celeberrimorum diuersis systematib, aliquod verum sit, ac genuinum Mundi systema: forsân etiam omnia tria falsa sunt, & verum ignoratur.* Non tamen puto eum velle addubitari an ea simul falsa sint, quatenus hinc affirmant tellurem immotam stare, inde contendunt non stare; vtrumque enim horum falsum simul esse nequit; sed illud falsum esse constat quod Galilæus Romæ conceptis verbis, relatis à Riccio- lo tom. 2. pag. 499. publicè abiurauit anno 1643. diè 22. Iunij. Vult igitur dicere cum in singulis systematis multæ astruantur conclusiones, nullum fortasse esse, cuius omnes assertiones sint veræ. Redeo ad iugorum libræ *Vibrationes vel reciprocationes*, vel vt alij loqui malunt *oscillationes* illas; vt addam neque hoc experimentum conferre quicquam mihi videri ad explicandam libræ Villalpandi eleuationem illam quam in propositione 37. dedimus Sauotio: nam si hæc fuisset causa eleuationis, statim visa fuisset libra deprimi in oppositam partem, idque obseruassent omnes qui aderant, nec Villalpandus ipse narrare omisisset. Cæterum quamuis libra, qua vtimur in praxi, non sit reipsa Archimedeæ; attamen pro Archimedeâ sumitur absque vlllo sensilis erroris periculo, ob summâ à centro ad quod lineæ directionis vergunt distantiam; vnde fit vt sensuum iudicio parallelæ æstimentur; quod iam monueramus in corollario secundo vigesimæ primæ vltimi libri.





APPENDIX SECVNDA.

In cuius priore parte potissimum inuenitur recta æqualis perimetro tam spirali quàm parabolicæ, ex datâ hyperbolæ quadraturâ. In posteriore proponitur imprimis quadratura Nicomedæ conchoideos ex datâ hyperbolæ & circuli quadraturâ : item figuræ cuiuscunque super quauis curuâ inclinatæ, genitæque ex erectâ datâ.

QUOD olim fecit Conon ille apud Archimedem laudatissimus, cum aliquot recondita tunc Geometriæ theorematum à se primum repertorum nudam propositionem ad Amicos priuatim misit demonstratione penes se pressâ; fortasse quia (quod sæpe euenit) illam è mentis arcano in aduersaria nondum transtulerat: hoc ipsum alter seculi nostri Conon D. de Fermat cum sæpe aliàs, tum nuperrimè de argumento summè arduo præstitit. Postremas ego istas propositiones, quoniam mirificè illustrant ea quæ de quadratricibus vngularibus in quinto, & de spiraliibus lineis in sexto libro scripsi, huic Operi. attexere (quod singulari eius modestiæ inopinatum profectò accidet) non dubito: fieri enim nequit quin iis inspectis, quilibet alius meis ausis faueat, & de publicâ hac ad Geometrica inuenta accessione non summo opere gaudeat. Ista si pro meis euulgare decreuissim; Vir quidem modestissimus, qui non sibi sed Geometriæ famam querit, aqvisimo rem tulisset animo: id tamen alienissimum à me semper fuit; nec existimo Geometra grauius quicquam obijci posse, quàm quod alicui exprobari aliquando audiui, totus nos es tuus, totus es alienus; & hac ipsa ratione qua Geometra es,

Caluus cum fueris, eris comatus.

Hunc autem iamdiu esse morem Viro Clariss. vi sua per Amicorum manus Geometrica tacitè spargat, luculenter testatur R. P. Mersenn. prop. 47. Hydr. pag. 193. taceo, inquit, varios illos *τὰ ἐπὶ τῶν*; de maximis, & minimis; de tangentibus; de locis planis; solidis; & ad sphæram; quos clariss. Senator Tolosanus D. Fermatius huc ad nos misit. Plura alia eius inuenta commemorat in præfat. ad Mechanica n. 4. in Ballisticis pag. 57. in Analyse pag. 385. Hinc factum est vt in ore summorum etiam in Italia Geometrarum Torricellij & Caualerij semper fuerit, quod testatur doctissimus Bullialdus in præfatione opusculi de Porismatibus. Caterum non res tantum, sed verba etiam ipsa sunt integerrimi Senatoris; quibus omnibus de meo adjicio in posteriore parte innumeras curuilinearum figurarum, in quibus est Nicomedæ conchoides, quadraturas: quæ omnia si vera esse comprobabuntur, ex totâ ista appendice confirmabitur illud, quod quidam dixit; hac tempestate in Geometricis, inuentum & superatum feliciter esse Bonæ spei promontrium illud, vnde

ΕΠΕΙ

expedita existat nauigatio, ad inaccessas antè tetragonismorum præsertim regiones.

PARS PRIOR.

I. Sit (Fig. 105.) parabole $b a d$, cuius axis $a c$, applicata $b c$, rectum latus $a e$: quæritur ratio curuæ $a b$ ad rectam $b c$.

Esto hyperbola $m l o$, cuius centrum g , transuersum latus $f l$ æquale rectæ $a e$, quæ est rectum datæ parabole latus: axis hyperbolæ sit $l n$, rectum verò illius latus sit æquale lateri transuerso, vt nempe rectangulum quoduis $f n l$ sit æquale quadrato applicatæ $m n$. Ad punctum g excitetur perpendicularis $g h$ æqualis rectæ $b c$ in parabola. Deinde ductis rectis $h m$, & $l i$, ipsis $g n$ & $g h$ parallelis, per punctum m in quo recta $h m$ occurrat hyperbolæ ducatur applicata $m n$.

Aio quadrilaterum $m h g l$, cuius tria latera sunt rectæ $m h$, $h g$, $g l$, quartum verò latus curua hyperbolæ $m l$, esse ad rectangulum $i g$, vt curua parabolica $a b$ est ad rectam $b c$.

II. Data sit (Fig. 106.) parabole $b a d$, cuius axis $a c$, applicata $b c$, rectum latus $a e$. Circa applicatam $b c$ voluatur spatium parabolicum $b a c$. Quæritur dimensio superficie curuæ illius solidi.

Exponatur hyperbole $m h$, cuius axis $h i$, transuersum latus $h f$ æquale quartæ parti lateris recti paraboles, siue rectæ $a e$; rectum verò illius hyperbolæ latus sit æquale transuerso, vt nempe rectangulum quoduis $f i h$ sit æquale quadrato applicatæ $i m$. Fiat recta $h i$ æqualis rectæ $a c$ axi paraboles, & ducatur applicata $i m$. A rectangulo sub $c a$ in curuam parabolicam $b a$, auferatur spatium hyperbolicum $i m h$; reliquum quadretur. Diagonia illius quadrati erit radius circuli superficie curuæ solidi quod sit à rotatione spatij $a b c$, circa applicatam $b c$.

III. Sit semiparabola quæuis $a c$ (Fig. 107.) cuius vertex a , axis $a b$. Ab ea curua formentur aliæ curuæ infinitæ, vt $a f$, $a e$, $a d$ &c. Ita autem formantur, in curua $a f$ applicata $b f$ est æqualis curuæ parabolica $c a$; & sumpto similiter quouis puncto n , à quo ducatur applicata $n p$, applicata $n p$ est etiam æqualis curuæ parabolica $a o$. In curua $c a$ applicata $e b$ æquatur curuæ secundi gradus $f a$, & illius applicata $q n$ æquatur portioni secundi gradus, $p a$. Item in curua $a d$ applicata $b d$ æquatur curuæ tertij gradus $e a$; applicata verò $n r$, portioni eiusdem curuæ tertij gradus $q a$, & sic in infinitum.

Aio omnes huiusmodi in infinitum curuas rationem habere datam ad parabolas primarias, hoc est, simplices: enuntiari quippe potest generale theorema hoc pacto. Continuetur parabole primaria $a c$ in infinitum per puncta v , g , m , l , k , & illius axis similiter ad puncta quotlibet g , h , i producat: fiant rectæ $b g$, $g h$, $h i$ singulæ æquales axi $a b$, & ducantur applicatæ $g m$, $h l$, $i k$. Curua parabolica $a m$ est ad curuam secundi gradus $a f$, vt applicata $g m$ ad applicatam $b c$. Curua parabolica $a l$ est ad cur-

uam tertij gradus a e, vt recta h l ad b c rectam. Curua parabolica a k est ad curuam quarti gradus a d, vt applicata k i ad rectam b c, & sic in infinitum.

Si verò intelligantur a m g, a f b circa applicatas g m, b f rotari, superficies curua ex rotatione spatij a m g circa rectam g m, erit ad superficiem ex rotatione spatij a f b circa rectam b f, vt cubus rectæ g m, ad cubum rectæ b c. Similiter superficies curua ex rotatione spatij a l h circa h l erit ad superficiem curuam ex rotatione spatij a e b circa rectam b e, vt cubus rectæ h l ad cubum rectæ b c; & sic in infinitum.

IV Estō figura semicycloides b a (Fig. 108. 109.) à qua formetur alia curua d a ea conditione vt applicatæ b c, c d; f o, eo sint inter se semper in eadem ratione data. Demonstrarunt Geometræ semicycloidem b a esse duplam rectæ a c, quæ est diameter circuli cycloidem producentis. Quæritur relatio curuarum a d ad alias lineas aut curuas, aut rectas.

Ita autem generaliter definimus: si hæ nouæ curuæ sint intra cycloidem & diametrum circuli generantis, vt contingit in figura 107. omnes hæ curuæ a d, earumque portiones erunt æquales curuis parabolicis. Quod si nouæ curuæ sint exteriores cycloidi, vt in figurâ 108. omnes hæ curuæ a d, earumque portiones datam habebunt rationem ad summam rectarum & circumferentiarum circularium.

Enuntiari potest in figura 108. generalis propositio hoc pacto. Fiat vt differentia quadratorum b c & c d ad quadratum c d, ita quadrupla rectæ a c ad rectam a m. Et per punctum a tanquam verticem describatur parabole cuius rectum latus sit a m, & axis a c; occurrat autem parabole rectæ b d c productæ in puncto g; rectæ verò f e o in puncto h. Ratio curuæ a g parabolicæ ad curuam a d erit data, eadem nempe potestate quæ est quadrati b c ad differentiam quadratorum b c, c d. Eadem verò erit ratio portionum a h, & a e. Ratio verò superficierum curuarum quæ oriuntur ex rotatione spatij a c g circa applicatam c g, & ex rotatione spatij a d c circa rectam d c, eadem est quæ curuarum a g, & a d. Similiter in portionibus a o h, a e o, circa rectas o h, & o c rotatis.

In figura autem 109. in qua curua a d est exterior cycloidi a b; fiat vt differentia quadratorum c b, c d ad quadratum c d, ita recta a c ad c m, rectæ a c in directum positam. Super recta a m describatur semicirculus, quem rectæ d b c, e f o secant in punctis g & h. Ratio curuæ a d summam curuæ circularis a g & rectæ g c dabitur. Erit nempe vt quadratum b c ad differentiam quadratorum d c, c b, ita potestate summa lineæ circularis a g, & rectæ g c, ad curuam a d; & similiter summa lineæ circularis a h & rectæ h o in eadem erit ratione ad curuam a e.

V. Sit in figura 110. parabole a c, cuius vertex a, axis a b, applicata c b. A curuâ parabolica c a deriuentur aliæ in infinitum curuæ c d, c e, c f, simili qua in figurâ 107. vti sumus methodo; nisi quod in hoc terminum applicatæ seruamus, in illa verò terminum axis eundem semper retinemus.

nemus. Ducatur nempe $ghio$ axi $a b$ parallela; ea erit natura curuarum huius speciei, ut recta bd quæ secat in d curuam cd secundi gradûs, sit æqualis curuæ parabolicæ dc : recta item gi sit æqualis ch portioni parabolicæ: recta autem be quæ secat curuam tertij gradûs ce sit æqualis curuæ dic secundi gradûs; & sic de cæteris in infinitum, earumque portionibus.

Aio omnes huiusmodi curuas cd, ec, fc in infinitum, æquales esse curuis parabolicis primariis seu simplicibus, diuersis tamen à parabolis quæ æquantur curuis iuxta methodum tertiæ figuræ generatis. En itaque theorema generale.

Exponatur parabole rp , cuius axis rq æqualis axi ab prioris parabolæ; rectum verò latus ru sit duplum recti lateris an . Aio parabolam rp ita descriptam æqualem esse curuæ cd . Si verò manente axe rq æquali ab , rectum latus ru fiat triplum recti lateris au , tunc curua parabolica rp , erit æqualis curuæ coe . Si verò manente semper axe rq æquali axi u , rectum latus zu fiat quadruplum recti lateris an , tunc curua parabolica rp erit æqualis curuæ cmf . Si autem circa rectas ab, bd, be, bf contentur spatia acb, dcb, ecb, fcb in infinitum, dantur circuli æquales omnibus & singulis superficiebus curuis solidorum inde oriundorum, eadem omnino facilitate qua in conoide parabolico ex parabola ac circa axem ab descripto, circulum curuæ ipsius superficiei æqualem repræsentamus: Eius verò constructionem non adiungeremus, cum iam ab aliis inuentam audierimus (licet eorum scripta hac de re ad nos non peruenerint) nisi quod nostra hæc constructio ad methodum generalem in omnibus conoidibus circa axes bd, be, bf nouarum istarum curuarum in infinitum producendis facillimè producit.

VI. In figura 110 . circa rectam bd rotetur curua cd , superficies curua inde oriunda hoc pacto inuenitur. Fiat ex superiore methodo curua parabolica rp æqualis curuæ cd ; circa rectam rq rotetur parabola rp . Superficies conoidis parabolici rpq ad superficiem conoidis $dicb$, erit ut applicata pq ad applicatam cb ; si pr parabola iuxta præcedentem methodum fiat æqualis curuæ coe , conoides parabolicum rpq dabit superficiem curuam quæ ad superficiem curuam conoidis ecb erit ut applicata pq ad applicatam cb ; & sic in infinitum.

VII. Sit in figura 111 . parabole $fba d$, cuius axis ea , applicata fe . Quæritur dimensio superficiei curuæ solidi quod fit à spatio $abfe$, circa axem ae rotato. Fiat ac æqualis quartæ parti recti lateris, & applicetur cb : fiat ch æqualis ac , & applicetur gh ; quadretur $cbgh$, hoc autem est facile ex Archimede; diagonia quadrati spatio $cbgh$ æqualis est radius circuli æqualis superficiei curuæ conoidis fad circa axem ae .

VIII. Videat subtilis ille Geometra qui nuper æqualitatem helices & parabolæ demonstrauit, an potuerit vniuersaliter concipi theorema, & helices infinitæ cum infinitis parabolis eleganter comparari sequentis

Ddd

propositionis beneficio generaliter, si libuerit, enuntiandæ & exemplificandæ.

Proponatur (*Fig. 112.*) helix cuiuscunque in infinitum speciei in figura 38. libelli Dettonuillani, in qua potestas quævis radij $a b$ ad potestatem similem rectæ $a c$ sit in ratione potestatis cuiuslibet, circumferentiæ totius $b e 8 b$ ad potestatem similem portionis periphericæ $e 8 b$. Exponatur separatim parabola, cuius semibasis siue vltima applicatarum $r p$ æquetur radio $a b$, axis verò $a r$ portioni circumferentiæ totius $b e 8 b$, cuius numerator æquetur exponenti potestatis diametri $a b$, denominator verò æquetur aggregato exponentium potestatum diametri $a b$ & circumferentiæ $b e 8 b$. Denique potestates applicatarum in parabola, quarum exponens æquetur aggregato exponentium potestatum diametri $a b$ & circumferentiæ $b e 8 b$, sint inter se vt potestates portionum axis, quarum exponens est æqualis exponenti circumferentiæ $b e 8 b$.

Aio helicem ita effictam, parabolæ ita constructæ fore semper & in quocunque casu æqualem.

Exempli gratia proponatur primùm helix Archimedeæ & parabola simplex, & sit vt radius $a b$ ad rectam $a c$, ita circumferentia tota $b e 8 b$ ad eiusdem portionem $e 8 b$. Construaturs separatim parabola $a q p$, cuius vltima applicatarum siue basis $r p$ sit æqualis radio $a b$: axis autem $a r$ sit æqualis portioni circumferentiæ $b e 8 b$, cuius numerator sit æqualis exponenti potestatis diametri $a b$, qui in hoc casu est 1. denominatur verò æquetur summæ exponentium potestatum diametri & circumferentiæ, hoc est binario: nam exponens potestatis periphericæ in hoc casu est etiam 1. Sit itaque $a r$ axis æqualis dimidio circumferentiæ helicis constitutiæ; sit autem in parabola vt potestas applicatæ $r p$, cuius exponens æquetur summæ exponentium diametri & circumferentiæ, hoc est in hoc casu numero 2. ad potestatem similem applicatæ $6 q$: ita potestas rectæ $a r$, cuius exponens æquatur exponenti circumferentiæ $b e 8 b$ siue 1. in hoc casu, ad similem potestatem rectæ $a 6$. hoc est, sit vt quadratum rectæ $r p$ ad quadratum rectæ $6 q$; ita recta $r a$ ad rectam $6 a$: curua parabolica $p q a$ erit æqualis helici $b c d a$.

Esto iam vt quadratum $a b$ ad quadratum $a c$, ita tota circumferentia $b e 8 b$ ad portionem $e 8 b$. Exponens potestatis diametri $a b$ in hoc casu est 2. circumferentiæ verò 1. Parabola ita constructur iuxta prædictum Canonem: applicata $r p$ æquabitur radio $a b$; axis $a r$ æquabitur bessi vel duobus trienbus circumferentiæ $b e 8 b$, & erit vt cubus $r p$ ad cubum $6 q$, ita recta $r a$ ad rectam $6 a$. Huiusmodi verò parabola helicis correlatæ æqualis erit.

Esto deinde vt recta $a b$ ad rectam $a c$, ita cubus circumferentiæ $b e 8 b$ ad cubum portionis $e 8 b$. In parabola, applicata $r p$ æquabitur radio $a b$, axis verò $a r$ æquabitur quadranti circumferentiæ $b e 8 b$, & erit vt qua-

drato-quadratum $r p$ ad quadrato-quadratum $6 q$, ita cubus $r a$ ad cubum $6 a$. Hæc autem parabola huic helici erit æqualis

Denique sit in helice ut quadratum radij $a b$ ad quadratum rectæ $a c$, ita cubus circumferentiæ $b e$ $8 b$ ad cubum portionis e $8 b$. In parabola huic helici correlata & æquali, applicata $r p$ erit æqualis (ut semper) radio $a b$; recta verò $r a$ erit æqualis duabus quintis partibus circumferentiæ $b e$ $8 b$, & erit in parabola ut quadrato-cubus applicatæ $r p$ ad quadrato-cubum applicatæ $6 q$; ita rectæ $a r$ cubus ad cubum rectæ $6 a$.

Nec dissimilis in helicibus & parabolis cuiuslibet speciei inuicem comparandis in infinitum erit methodus. Helicis autem siue diminutæ, siue auctæ portiones cum portionibus parabolæ correlatæ nullo negotio comparabuntur. Vnde sequitur dari intra circulum infinitas numero helices specie & quantitate diuersas: imo dantur infinitæ ipsa circumferentia maiores, quod inter miracula Geometrica potest numerari; nulla tamen datur quæ non sit minor aggregato circumferentiæ & radij, & nulla etiam quæ non sit radio maior.

SCHOLIUM.

Haftenus Viri Clarissimi propositiones non minus arduæ quàm nouæ. Ex quibus perspicuum fit, quod initio diximus, per eas preparari Geometram ad centra grauitatis inuenienda iuxta methodum quam esse generalem monuimus in præfatione quinti libri. Ita porro preparatur ut nihil amplius, datâ (ubi id opus fuerit) hyperbolæ quadraturâ, inuenire debeat ad definiendum grauitatis centrum in curuis lineis figurarum ex parabolâ præscripto illo modo genitarum. Attamen ad inueniendum semisolidi circa axem & circa basim generata; & ad eorum centra grauitatis (quod in isto problematum genere merito censetur difficillimum) reperienda, excogitari aliquid antè debet quàm generali illi methodo nostræ detur locus; illud verò est summa quadratorum, & cuborum explicata in prima sexti libri. Caterùm cum harum & aliarum etiam summarum seriem in infinitum protraham habeamus penes nos, possemus eam hîc adscribere, nisi nefas putaremus quicquam hocce in loco demere vel addere tam præclaris Viri doctissimi inuentis.

PARS POSTERIOR.

I. In tetragonismicis monstrauius methodum inueniendi quadraturam segmentorum cuiuslibet sectionis conicæ oxygoniæ vel amblygoniæ ex dato centro grauitatis; nec non inueniendi cuneos etiam hyperbolicos, siue fiant à plano per axem transuersum ducto, quod R. P. Tacquet in lucem protulit eodem quo nos anno; siue, quod ille non attigit, fiant à plano per axem rectum ducto. Methodum nudam hîc propono, ut semel omni demonstrationum prolixitate submotâ constet quàm non sit difficilis. Quisquis autem ex facilitate rei iam inuentæ, antea ipsam non fuisse difficilem auguratur, ille profectò per ridiculum loqui mihi videtur; cum res diu quamuis, multumque quæsitâ conatu irritò, postea quam reperta & in medium collata fuit, cuiuslibet obuia proster.

Ddd 2

Esto (Fig. 115.) bdc semicirculus centro à descriptus & comprehensus diametro bc , ad quam perpendiculariter cadat diameter dam : esto quoque (Fig. 116.) $b c$ axis transuersus hyperbolarum primariarum b, c , rectus verò $d m$: esto denique (Fig. 117.) $d m$ axis transuersus hyperbolæ primariæ $e d f$; rectus $b c$. Diametro $b c$ in tribus illis figuris educta sit parallela $e f$ ad axem $m d$ ordinatim applicata; per e, f ductæ sint ordinatim applicatæ $e i, f l$ ad axem $b c$; completa sint quadrata $b a m n, c a m o$, & completa sint parallelogramma $e r m p, f r m s$. In schemate 115. descripta sit parabola $b d c$, cuius axis $d a$, basis $b c$; in schemate 116. descripta sit parabola $b m c$, cuius axis $m a$, basis $b c$; in schemate denique 117. descripta sit parabola $h d g$, cuius axis $d q$, latus verò rectum æquet rectam $d a$. In tribus illis figuris perimetro parabolæ iam descriptæ occurrant rectæ $e p, f s$ in h, g , & iungatur recta $h q g$, quæ erit parallela rectæ $e r f$.

Aio si libræ planæ ponatur axis $b c$, sustentaculum $n o$; circuli vel hyperbolæ segmento $e d f$ ut iacet manenti in fig. 115. & 117. æquiponderans aptatum sustentaculo $n o$ esse dimidium figuræ parabolicæ $h d g$; in figura autem 116. duobus segmentis $e y b i, f u c l$ æquiponderare dimidium figurarum parabolicarum $h a b i, g u c l$: & in trium figurarum qualibet, tres rectas $m a, a r, a q$ esse proportionales. Aio præterea cylindraceum altitudinis æquantis rectam $a m$, & baseos æquantis dimidium illud parabolicum esse æquale cuneato, vel vngulari solido abscisso per planum inclinatum gradibus 45. ad planum $b a d$, & incedens per axem $b c$. Aio denique ut est suspensum ad dimidium illud parabolicum notum, ita esse brachium $m a$, ad grauitatis centri, quod suspensio competit, distantiam ab axe $b c$. Placet etiam compendio subiicere nonnulla de quadratricibus nostris quarum mentionem fecimus in scholio prop. 44. lib. 5. ut huius nostri inuenti gustum aliquem habeat Lector.

II. Esto (Fig. xxviii. Romano caractere notatâ post fig. 28. sarraceno numero distinctam) linea quælibet $m a h$ ad easdem partes caua, & intra rectas $g m, f h$ parallelas contenta, quas recta $g f$ secet in f, g ; ex $f g$ abscissa sit quælibet $g c$, quæ fiat brachium libræ $f c$ suspensæ ex g perpendiculo $g m$, & inde generetur quadratrix $g i o$ figuræ $g m a h$, ita ut sicut brachium $g c$ ad quamlibet longitudinem $g s$, ita $s a$ dimetiens figuræ suspensæ parallela perpendiculo $g m$, sit ad $s t$ dimetientem quadratricis. Curuam $m a d$ tangat in a quouis puncto recta $a u b$ occurrens rectæ $g m$ in b ; figuræ rectilineæ $s a b g$ parallelogrammæ, vel trapeziæ, vel triangulari inueniatur iisdem positis quadratrix $g p t s$; erit $t p$ parabolæ perimenter nota, si $b a, g s$ non æquidistant, ut facile intelligitur ex septimâ propositione secundi tetragonismicorum, & ex quadragesimæ methodo libri quinti superioris. Nota igitur est recta $t l$ tangens parabolam $t p$. Aio rectam $t l$ tangere quoque curuam $g i o$ in puncto t . Quod si recta $a u$ æquidistet rectæ $g f$, linea $t p$ erit recta & nota, ut ex iisdem propositionibus constat, & ex scholio quadragesimæ quartæ quinti libri iam lau-

dati. Si autem recta ua æquidistet rectæ gm , ipsa as tanget quoque quadratricem in t , sicuti curuam ma ponitur tangere in a . Atque hæc est methodus generalissima pro quadratricum tangente inueniendâ ex data tangente curuæ cui quadratrix respondet dicto iam modo.

III. Esto (*Fig. 118.*) $acxt$ semisegmentum parabolicum habens axem at , ad quem ordinatim applicata sit tx ; diametri at dupla sit tah , & completum sit parallelogrammum $ayxt$; libra ht suspensa ex a , perpendiculo ay , brachio ah intelligatur figuræ $acxt$ generari series quadratricum producta in infinitum; ita ut sicut ha brachium ad a o longitudinem abscissam ex at axe, ita oz dimetiens parabolici semisegmenti $acxt$, se habeat ad od dimetientem primæ quadratricis ad xt , & ita od ad op dimetientem secundæ ad pxt ; ita quoque op ad oq dimetientem tertiæ ad qxt &c.

Aio primam ad xt esse duas quintas parallelogrammi $ayxt$; secundam ad pxt esse duas septimas eiusdem parallelogrammi; tertiam ad qxt esse duas nouenas eiusdem parallelogrammi, ita ut minutiæ sequentes pro numeratore retineant binarium, denominatorem autem augeant binario; nam quarta, est duæ undecimæ parallelogrammi $ayxt$; quinta, duæ decimæ tertiæ; sexta, duæ decimæ quintæ; & ita deinceps facto progressu per numeros impares. Hanc propositionem demonstro in libro manuscripto quadratricum, & per illam inuenio in circuli & hyperbolæ casibus iam positis, quadraturam quadratricum tertiæ, quintæ, septimæ &c. prout exposui in scholio quadragesimæ quartæ propositionis libri quinti. Has quadratrices appellauimus *tertij ordinis*; *secundi*, eas quarum prima est semihederacea ibidem definita; *primi*, illas quæ in quadragesimâ quartâ libri quinti quadrantur. Cæterum ex tangentium methodo suprâ præscriptâ inuenies a u portionem rectæ ay in infinitum productæ interceptam inter g u parallelam tangenti at & ipsam tangentem, esse ad u b interceptam inter $u d$ & db tangentem ipsius quadratricis primæ ad x , ut est binarius ad ternarium; si ad x sit quadratrix secunda, ut est binarius idem ad quinarium; si sit tertia, ut idem binarius ad septenarium, & ita de aliis, retento binario ubique, & facto progressu per numeros impares 3. 5. 7. 9. 11. &c. Pari prorsus methodo in quadratricibus primi ordinis inuenies primæ quadratrici quæ est triangulum respondere numeros 1. 1. secundæ quæ est parabola 1. 2. tertiæ 1. 3. quartæ 1. 4. quintæ 1. 5. & ita deinceps absq; vlllo progrediendi fine. Quæ omnia facilia esse incipiunt ex quo monstrata semel fuerunt; mirabilem verò aperiunt viam ad ipsarum quadratricum curuarum dimensionem.

IV. In schemate circuli (*Fig. 115.*) & hyperbolæ (*Fig. 117.*) recta ad bifariam secetur in t , & describatur dx perimeter circelli, vel hyperbolellæ primariæ cuius axis transuersus sit ad ; in altero autem schemate hyperbolico (*Fig. 116.*) recta ma bifariam secetur in t , & describatur ax hyperbolella primaria cuius centrum t , axis transuersus ma .

Ddd 3

Aio si in tribus illis figuris libra $m d$ suspendatur ex a , brachio $m a$, perpendicularo $a b$, fiantque tres rectæ $m a$, $a r$, $a q$ proportionales; figuræ $b e r a$ in circuli schemate 115. secundam quadratricem esse æqualem dimidio figuræ $q z u a$: figuræ $e r d$ in hyperbolæ schemate 117. secundam quadratricem esse æqualem dimidio figuræ $q d z$: denique in altero hyperbolæ schemate 116. figuræ $e y b a r$ secundam quadratricem esse æqualem dimidio figuræ $q a z$. Istud demonstro in manuscripto libro; unde obtineo quartas, sextas, octavas, &c. per pares numeros incedendo, sicuti in illo scholio monui. Ostendo quoque arcum $a z$ in figuris 115. 116. esse similem duplo arcus $b e$; in figura autem 117. arcum $d z$ esse similem duplo arcus $d e$. Unde obtineo quadratricem secundam in figuris 115. 116. reduci ad spatium mixtum ex rectilineo noto & ex quadrante figuræ $b e r a$ additio, quam *condictam* appellare solitus sum: in figura autem 117. reduci ad quadrantem pari modo addititium figuræ $e r d$ condictæ. Simili methodo ostendo quartam quadratricem in figurâ 115. 117. reuocari ad mixtum ex rectilineo noto & ex additio semiquadrante figuræ condictæ; in figura autem 116. ex ablatiuo eiusdem figuræ semiquadrante, & ita pergo ad reliquas omnes in gradu numerorum parium collocatas; quas hic prætereo, cum eas nunc obiter indicasse satis sit proposito. Inde quoque eruo gradus parium sedium explicatos in octauæ propositionis corollariis libri tertij, ita ut primus gradus ad positionem rectæ $m d$ sit parallelogrammum dimetientis $a m$, secundus figura dimetientis $e i$; ostendo autem gradus imparium sedium singulos esse æquales rectilineo noto; parium verò esse mixtos ex certâ portione condictæ figuræ, & ex rectilineo noto. Quod statim liquet si notæ fuerint quadratrices; nam in circuli schemate 115. primus gradus est parallelogrammum dimetientis $m a$; secundus figura dimetientis $i e$; tertius est \dagger primus — quadratrix secunda primi genita librâ $b c$ suspensâ ex a perpendicularo $a d$, brachio $a c$; quartus est \dagger secundus — secunda quadratrix secundi; quintus est \dagger primus — bis quadratrix secunda primi \dagger quarta primi quadratrix; sextus est \dagger secundus — bis quadratrix secunda secundi \dagger quadratrix quarta secundi, & ita de reliquis iuxta methodum indicatam in corollario tertio decimæ septimæ tertij libri. In hyperbolæ schemate 116. primus est parallelogrammum dimetientis $m a$; secundus figura dimetientis $i e$; tertius — primus \dagger quadratrix secunda primi libra $b c$ suspensa ex a , brachio $a c$; quartus est — secundus \dagger quadratrix secunda secundi eodem modo genita; quintus est \dagger primus — bis secunda quadratrix primi \dagger quarta quadratrix primi; sextus est \dagger secundus — bis secunda quadratrix secundi \dagger quarta quadratrix secundi; & ita de aliis. In schemate 117. primus est idem parallelogrammum dimetientis $a m$; secundus figura dimetientis $i e$; tertius \dagger primus \dagger secunda quadratrix primi; quartus \dagger secundus \dagger secunda quadratrix secundi; sextus est \dagger secundus \dagger bis secunda quadratrix secundi \dagger quarta quadratrix secundi; & sic de septimo, octauo & aliis; gradus huius seriei appello te-

tragonismicos. Porro dum dixi quadratricem aliquam esse mixtam ex rectilineo noto, & ex curvilineo; nolim asserere ubique adesse rectilineum notum; nam quadratrices parium sedium in circuli schemate 115. carent rectilineo, quando sumuntur pro tota figurâ $b e d a$.

V. Esto (Fig. 119.) $b e d$ semicirculus, diametro $b d$ & peripheria $b e d$ comprehensus; illi ita respondeat figura $g o d b$ (nomine figuræ hinc *locum asymptoticum* etiam intelligo illum, quem sub finem vigesimæ sextæ libri septimi definitum habes) ad positionem tangentis $b f$, ut si $a d$ libra fiat dupla diametri $b d$, & intelligatur suspendi perpendicularo $b f$, quæcunque $m o$ parallela rectæ $b f$ ducatur occurrens perimetris $d e$, $d g$ in n , o , & diametro $b d$ in m ; ut est brachium $a b$ ad $b m$, ita $m o$ dimetiens figuræ $g o d b$ sit ad $m n$. Quod est semicirculum esse quadratricem figuræ $g o d b$. Esto $b c$ bifariam secta in h , & ad partes oppositas intelligatur semicirculus $b p d$, nec non $f d b$ eadem quæ $g o d b$. Aio spatium istud $g o d s$ integrè sumptum inter tangentes $d x$, $f b$ esse æquale quadruplo circuli $b e d p$, eiusque gravitatis centrum esse h ; perimetrum verò $g o d s$ productam in infinitum, nunquam convenire cum rectâ $f b$, quamvis propius ad illam accedat; ac proinde ipsam $f b$ esse asymptotum definitam in scholio illius vigesimæ sextæ septimi libri, cuius trigesima confirmatur præsentis theoremate, sicuti & duobus sequentibus. Portionis cuiuscunque $o d u$ quadraturam & centrum gravitatis dare possumus quoque assumptâ circuli quadratura; hocque ipsum in hyperbola præstamus, postulata eiusdem hyperbolæ quadratura.

VI. Esto (Fig. 120.) quadrans circularis $e n d c$ centro c descriptus; sitque $b d$ dupla semidiametri $c d$; sit triangulum $q c d$ rectangulum, cuius latera $c d$, $d q$ sint æqualia; esto quadrantis $e n d c$ quadratrix semiheracea $c t d m$; intelligatur figura $o c m$ ita semiheraceæ respondens, ut quæcunque $m o$ parallela tangenti $d q$ ducatur occurrens curvis $c o$, $c t$ in o , t , & rectæ $c q$ in p , tres rectæ $m t$, $m p$, $m o$ sint proportionales. Aio rectam $d q$ esse asymptotum perimetri $c o$; totamque figuram comprehensam curvæ $c o$ & rectis $c d$, $d q$ esse æqualem quadrato rectæ $c d$; & si ad partes oppositas intelligatur alia $c r$ priori $c o$ similis & æqualis; sitque $c d$ recta ad $c m$ ut quadratum diametri circuli ad ipsum circumulum; aio punctum m esse centrum gravitatis eiusmodi figuræ; cuius omnes portiones absolutè conuerto alibi in rectilineum notum; earum verò gravitatis centrum designo circuli quadratura assumpta. Non admodum dissimili ratione inuenio quadraturam figuræ $c o m$, si $c d$ sit semiaxis hyperbolæ, & $d t$ eius quadratrix prima, genita eodem brachio $b c$, & perpendicularo $c e$; dummodo maneat recta $c q$, in infinitum tracta.

VII. Esto (Fig. 119.) semicirculus $b p d$ centro c descriptus; sitque $d r$ linea conchoides à Nicomede descripta, ita ut eius asymptotus sit $c p$ semicirculum tangens, & ex puncto b educta qualibet recta $b r$, secante lineas $c p$, $d r$ in z , r , recta $z r$ sit æqualis semidiametro $c d$, prout generatio chon-

choidis relata apud Eutocium in prop. 1. lib. 2. Archimedis de Sphæ. & Cyl. exigit; super cc constructum sit quadratum ecd , & per x descripta sit hyperbola ixq , cuius semiaxis cx , & asymptoti ec, cd ; per m quodlibet punctum inter c & d iacens,educta sit mr parallela asymptoto cp , occurrens perimetro conchoidis in r ; limbo semicirculi bp in t , hyperbolę in i ; ex recta bd abscindatur dy equalis rectę mt ; per y agatur yq æquidistans asymptoto ec . Aio conchoidis portionem m d r esse æqualem figurę hyperbolicę im y q auctę figura circulari m d t , & imminuta rectangulo contento sub cb & mt rectis. Si autem intelligatur ad partes e replicari figura m r d ; aio si segmenti duplicatę conchoideos intercepti inter rectas tm , dx centrum gravitatis sit B , rectam cd ad c B esse, vt est figura nd m aucta segmento im y q , & imminuta rectangulo cb , mt ad figuram d n m auctam spatio quod figurę ipsi d n m æquiponderat libra bd suspensa ex centro c perpendicularo cp , brachio bc . Quod si pro puncto vel, vt appellatur à Nicomede, polo b sumatur h in recta cb , siue ch sit minor, siue maior ipsa cb , modò eadem maneat cd , quam idem Nicomedes nominat *longitudinem regula μέγιστος νέμινος*: eadem est constructio, nisi quod quadratrix segmenti nd m generatur brachio hc , ac proinde est ad generatam brachio bc , vt ipsa bc recta ad hc ; pro segmento autem im y q , & pro rectangulo bc , mt sumuntur spatia quę ad ipsa sint, vt est hc recta ad bc .

VIII. Esto (Fig. 115.) quælibet linea curua d f ad easdem partes caua intra angulum rectilineum d a c contenta; eius verò hæc sit proprietas, vt quęcunque agatur parallela rectis da , ac , ea non occurrat ipsi curuę d f intra angulum d a c quantumvis protractę, nisi in vno puncto. Esto quęlibet alia figura curuilinea vel rectilinea d g la ad positionem rectę d a insistens basi ac ; deinde verò intelligatur ad eandem positionem transferri super curuam d f , & demum super eadem curua inclinari ad positionem rectę a p cuiuslibet; dimetientes autem ita inclinatę, sint ad dimetientes figurę erectę, vt a p diameter parallelogrammi iam p (cuius latus a m iacet in directum rectę da) est ad latus p m . Ex methodo decimę octauę primi tetragonismicorum libri colligimus inclinatam illam figuram super curua d f ad libitum producta intra angulum d a c , esse equalẽ erectę simul & alteri super eadem curua d f inclinatę ad positionem rectę a c quam voco horizontalem, ita vt eius dimetientes singulę sint ad singulas dimetientes figurę erectę, vt est m p latus ad ma ; esse inquam equalẽ simul erectę & horizontali, quoties omnes parallelę ad rectam a p non occurrent curuę d f productę intra angulum, nisi in vno puncto; quod si inclinatio intelligatur fieri ad positionem rectę as , & illi parallela vna tangat curuam in puncto exempli causa f ; tunc portio inclinatę super portione d f , vel super reliqua eiusdem d f portione posita intra illum angulum, erit equalis differentię quã different erecta figura & horizontalis. Atque hæc generaliter; particulatim verò si d f sit arcus circuli & d g c parabola,

parabolæ, verticis d, vt paulò antè statuiamus; figura horizontalis primaria erit figura comprehensa ad positionem horizontalem sub rectâ d a & sub parabola cuius axis sit a c, vertex a, latus rectum æquale ipsi a d. At si parabolæ d g c intelligatur insistere circularis quadrans d f c e, figura horizontalis primaria erit parabola verticis a, axis a d, cuius latus rectum b a. Voco autem figuram primariam hîc, eam quæ gignitur, cum rectæ i a, a m sunt æquales; ex illa enim eruuntur secundariæ, quoniam ad illam ipsæ secundariæ sunt vt recta i a ad a m. Quæ de circulo scripsimus facilè, vt patet, applicantur hyperbolæ in schematibus 116. 117. Grauitatis verò centra generali methodo reperiuntur, per grauitatis centra erectæ & horizontalis pari ratione tractata; si nempe inclinata ad positionem rectæ a p vel a s intelligatur ita aptari curuæ d f, vt eius dimetientes singulæ bifariam secentur à curua d f; Si item erecta & horizontalis pari pacto intelligantur aptari eidem curuæ; idem erit grauitatis centrum, quod duarum simul erectæ & horizontalis in primo casu, & quod differentiarum illarum in secundo.

IX. Dum ista Appendix nunc cuditur, prælo etiam mandatur *Dissertatio de linearum curuarum cum rectis comparatione Autore M. P. E. A. S. doctissimo*, quam vbi summa cum admiratione legi, perspexi in vtroque quadratricum ordine primo & tertio, quos suprà n. 3. exposui, posse assignari methodum generalem dimetiendi earum curuas. Illa porrò hæc est: esto a y z t quadratum (Fig. 118.) & a z x parabola quam tangat a y, cuius axis a t, ordinata t x & intelligantur quadratrices a d x prima, a p x secunda, a q x tertia &c. vt n. 3. Ducta præterea sit diameter a g x; ergo quadratum a y m h ad positionem lineæ rectæ a h erit ex scholio quadragesimæ quartæ quinti libri primus quadratricum primi ordinis gradus; secundus triangulum x a y, tertius figura a z x y parabolica; & ita continuata serie quouſque libuerit, notus erit tetragonismus singulorum graduum per illam quinti libri iam laudatam propositionem. In primo isto ordine secundus gradus est triangulum rectilineum, ideòque linea a g x cum sit recta, non est conuertenda in rectam; tertius gradus habet curuam a c x, & illi assignatur minutia cuius denominator est 4. quadratus numerus binarij denotantis sedem superiorem, numerator 1. quarto assignatur minutia cuius numerator est 1. denominator est 9. quadratus numerus ternarij denotantis gradum proximè superiorem; quinto pariter attribuitur minutia numeratoris 1. denominatoris 16. & ita de aliis. Vt denominator gradus cuius curua est redigenda in rectam se habet ad numeratorem, ita fiat a h recta ad e h, & compleatur parallelogrammum h e f m. Numerus denotans gradum proximè superiorem illi cuius curua suscipitur redigenda in rectam, duplicetur; & ex duplicato auferatur vnitas; vt si curua tertij gradus conuertenda sit, superior gradus notatur binario, duplus binarij est quaternarius, dempta inde vnitate restat ternarius; ita si quarti curua, tractetur, proximè superior est ternarius, duplus illius numerus est sena-

Ecc

rius, dempta unitate residuus fit quinarus. Iste numerus vocetur *residuus*. Super e f recta intelligatur insistere eiusdem ordinis gradus qui designatur numero residuo; vt pro curua tertij gradus, e r D f est tertius gradus; pro curua quarti, e r D f est quintus; pro curua quinti, e r D f est septimus; pro curua sexti, e r D f est nonus; pro curua septimi e r D f est vndecimus &c. Intelligatur figura h e f l m insistere super basi h m ad positionem rectæ h a, & ita se habere ad figuram h e r D m, vt ducta qualibet r n parallela ad rectam a h occurrente lineis e r D, e f l e f, h m in r, s, i, n, tres rectæ n i, n s, n r sint proportionales; atque iuxta modum loquendi propositionis primæ sexti libri figura h e r D m sit summa quadratorum figuræ h e f l m: vnde patet istam quadratorum summam esse nobis notam. Aio si curuæ illæ producantur in infinitum, & intelligatur parallelogrammum mixtum cuius basis sit curua quam dimetiri volumus, altitudo verò æquet rectam h e, istud parallelogrammum esse ad positionem rectæ a h condita ratione æquale figuræ e f l m h, ita vt figura e h n r sit æqualis rectangulo contento sub h e & sub recta æquante curuæ portionem interceptam parallelis a h, n r productis. Quando curua e r erit parabola vt in tertio gradu, curuam e s esse hyperbolam semiaxis transuersi h e, conficitur ex methode quam initio huius secundæ partis tradidimus; hæc verò hyperbolica figura Fermatianum inuentum numero 1. primæ partis expositum mirè confirmat; haud tamen scio qua sit Vir ille vsus methode, mecum enim communicata fuit sola propositio, vt ibi iacet, sine vlla demonstratione.

X. In ordine tertio prima quadratrix a d x habet minutiam cuius numerator est quaternarius, denominator est 9. quadratus ternarij; quadratricis a p x secundæ minutia habet numeratorem 4. (qui & reliquis istius ordinis quadratricibus communis est) denominatorem habet 25. quadratum numeri 5. tertiæ minutia habebit pro denominatore 49. quadratum numeri 7. pro sequenti sumetur quadratus numeri 9. tum numeri 11. deinde numeri 13. & ita alij formabuntur additione binarij. Figura verò e r D f (Fig. cxviii.) pro prima quadratrice e d x erit secundus gradus primi ordinis, siue triangulum rectilineum; pro secunda a p x, erit quartus eiusdem ordinis primi; pro tertia a q x, erit sextus eiusdem ordinis; & ita pro quarta, erit octauus; pro quinta decimus; pro sexta, duodecimus, & sic deinceps aliorum graduum numerus efformabitur accessione binarij. Reliqua verò se habent vt in primo ordine, nempe quadratum s n figuræ e f l m h est æquale rectangulo r n i. Hinc verò liquet pro prima quadratrice a d x, lineam e f l esse parabolicam; quod penitus concinit commendabilissimo Autoris M. P. E. A. S. inuento; curua enim a d x esse conuincitur illa quam ille *parabolam suam & diuersam ab Archimede* appellat. Assignata igitur est methodus generalis determinandi figuram h e f l m insistentem super notâ recta, cuius summa quadratorum sit nota, & quæ ad positionem rectæ a h sit condita ratione æqualis parallelogrammo mixto definito in decima sexta libri quinti, & paulò antè explanato.

Cæterum Eximius ille Geometra Dissertationis suæ causam testatur fuisse effatum quorundam planè simile illi quod nunc memini extare apud Dettonuillæum in tractatu de Dimensione curvarum Cycloidicarum p. 7. *Admiratione dignum esse ordinem Naturæ, qui non patitur inueniri rectam æqualem curvæ, nisi ante sumpta fuerit rectæ cuiusdam cum curvæ lineæ æqualitas. Inde Verò in Cycloidica simplici, cuius basis ponitur æqualis circumferentiæ circuli genitoris, cunire ut curvæ illa demonstretur esse æqualis lineæ rectæ.* Sed istum ad hanc usque diem inuiolatum Naturæ ordinem nunc tandem Tolosæ cessisse Geometriæ, est quod gaudeant omnes, quotquot nouis primæ notæ inuentis fauere se profitentur.

XI. Esto (Fig. xx. characteris Romani, post figuram notæ 20.) quælibet curuæ o d x ad easdem partes caua, cuius axis a y; ordinatæ d e ad axem perpendiculares; tangentes autem d m interceptæ inter curuam o d x & axem a y sint singulæ æquales rectæ i s quæ in figura s l f i æquidistet axi, & per d tactum ducta sit; librâ n a f suspensâ ex a, perpendiculari e a, brachio a n longitudinis ad libitum assumptæ, intelligatur figura r d f i, cuius quadratrix sit s l f i, ita ut sicut brachium n a est ad longitudinem quamlibet a i, ita sit r i dimetiens figuræ superioris r d f i ad s i dimetiensem inferioris. Aio figuram r d f i esse ad positionem axis a y condita ratione æqualem parallelogrammo mixto baseos d x, altitudinis a n. Aio præterea si superficies cylindrica, cuius portio est parallelogrammum mixtum baseos d x, secetur plano per axem a y ducto, & ad planum a o x gradibus 45. inclinato; figuram i s l f esse æqualem illi vngularis vel cuneatæ superficiæ (definitur in decima sexta quinti libri) portioni quæ insistit super curuâ d x. Ista duo theorema sunt generalissima, mihi que expedita & vtilia imprimis extiterunt: ex iis enim plurima reperi, in quibus locum non postremum obtinet theorema quod sequitur omnium vltim.

XII. Esto (Fig. ead.) o d x hyperbola primaria, cuius semiaxis transversus a o æquet semiaxem rectum a y; ex a o abscindatur a t recta, quæ ad a o sit potestate ut vnitas ad binarium; intelligatur hyperbola t c g cuius semiaxes sint a t, a y; intelligatur præterea figura i r d f, quæ ita se habeat ad hyperbolas o d i, t c i ut recta y a sit ad ordinatim quamlibet applicatam i r, sicut ordinatim applicata i d se habet ad ordinatim applicatam i c. Aio figuram i r d f esse ad positionem rectæ a y condita ratione æqualem parallelogrammo mixto altitudinis æquantis rectam a y, baseos d x, modo supra præscripto. Curvæ porro s l, r d in præsentī casu sunt asymptoti & inconcurrentes cum recta o p; dimetiens verò i r, quodcunque sit interuallum o i, est perpetua legē maior quàm a n vel a y, excessu minori usque & minori, quò longius punctum i recedit à puncto o; patet autem totam figuram respondentem parallelogrammo mixto totius baseos o d x esse locum definitum in scholio vigesimæ sextæ libri septimi, & esse æqualem spatio finito, nempe rectangulo comprehenso sub n a &

sub recta æquante curuam o d x: vnde confirmantur quæ scripsimus in corollario secundo vigesimæ nonæ septimi libri iam laudati.

Atque hæc omnia quæ vel in istis nunc de Cycloide libris, vel in Elementis tetragonismicis aliàs scripsi, debere me fateor inuestigationi tetragonismi circularis & hyperbolici; in quo licet capiendo operam fortasse perdiderim præcipuam (quod quidem semper & egomet ipse præsumo, & præsumi ab aliis, velim) non tamen, vt reor, omnem penitus: cum in venatione istius tetragonismi occurrisse mihi videatur præda non prorsus contemnenda mei hominibus moduli. Hoc verò iam extremum edico, hîc istius venationis esse tandem finem, meque studiis aliis cum minus laboriosis, tum ætati iam prouectæ dulcioribus posthac esse, si Deus Optimus fauerit, vacaturum.

TABVLARVM SEDES ET INDEX.

TAbulæ 1. 2. 3. collocari debent ante pag. 1.
Tabulæ 4. 5. 6. 7. post pag. 404.

Tabula 1. completitur figuras à primâ ad 16.

Tab. 2. à 17. ad 28.

Tab. 5. à 57. ad 71.

Tab. 3. à 29. ad 44.

Tab. 6. à 72. ad 96.

Tab. 4. à 45. ad 56.

Tab. 7. à 97. ad 120.

ERRATA SIC CORRIGE.

Pag. 75. lin. 2. † cc. pag. 132. lin. 27. calculum illum. pag. 133. lin. 28. efflictim. pag. 153. lin. 10. libri primi. pag. 154. lin. 9. sintque a x, b l æquales. pag. 183. lin. 14. secetur in a. pag. 204. lin. 4. ante finem duarum G M. pag. 232. lin. 1. duarum. pag. 238. lin. 25. vbi scripsi. pag. 292. lin. 8. istos octo. pag. 293. lin. 15. *equiv.* pag. 296. lin. 24. & 25. *ποπης.* pag. 314. lin. 19. g b, b e reciprocè. pag. 348. lin. 5. ego verò pag. 354. lin. 3. ante finem vt f e recta ad f u. pag. 349. linea 4. adde hæc verba; Exagellæ vocem pro trutinâ vsurpauit Ennodius, vt eruditè aduertit Sirmondus in Notis ad illum. *ibid.* lin. 13. ante finem scribe 350. pro 305. pag. 357. lin. 22. *σαθμικενα.* pag. 374. lin. 3. ante finem R. P. Zucchijs. Cetera leuiores vel etiam minus leuia Typographi errata castigabit & condonabit æquus Lector. In sculptoris figura 26. fuit vna & eadem litera F per incuriam annotata duobus locis; sed id nullam pariet confusionem, vti spero, Lectori iam pramonito. Idem conigit in figura 58. vbi litera x bis adscribitur.

FINIS.

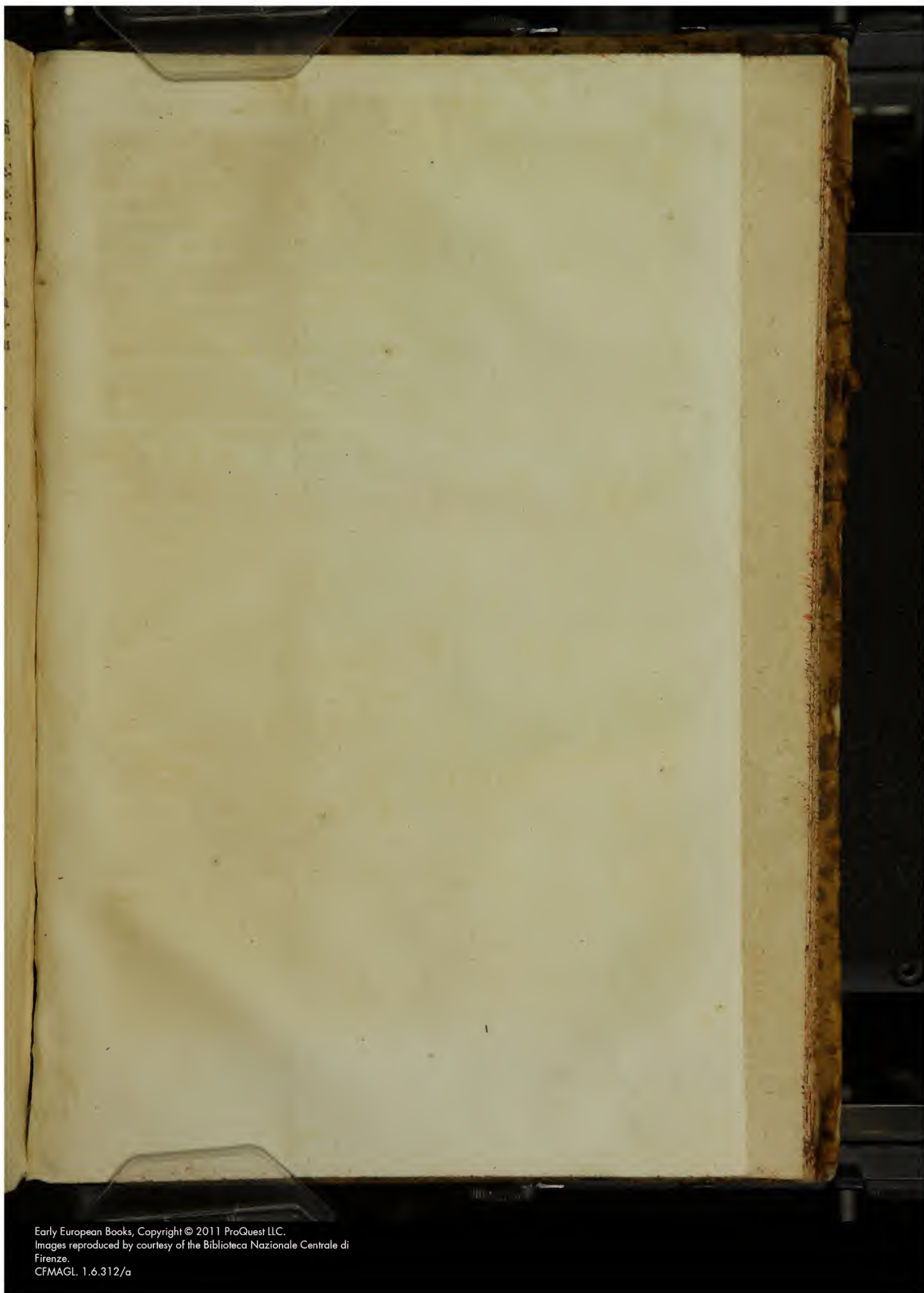
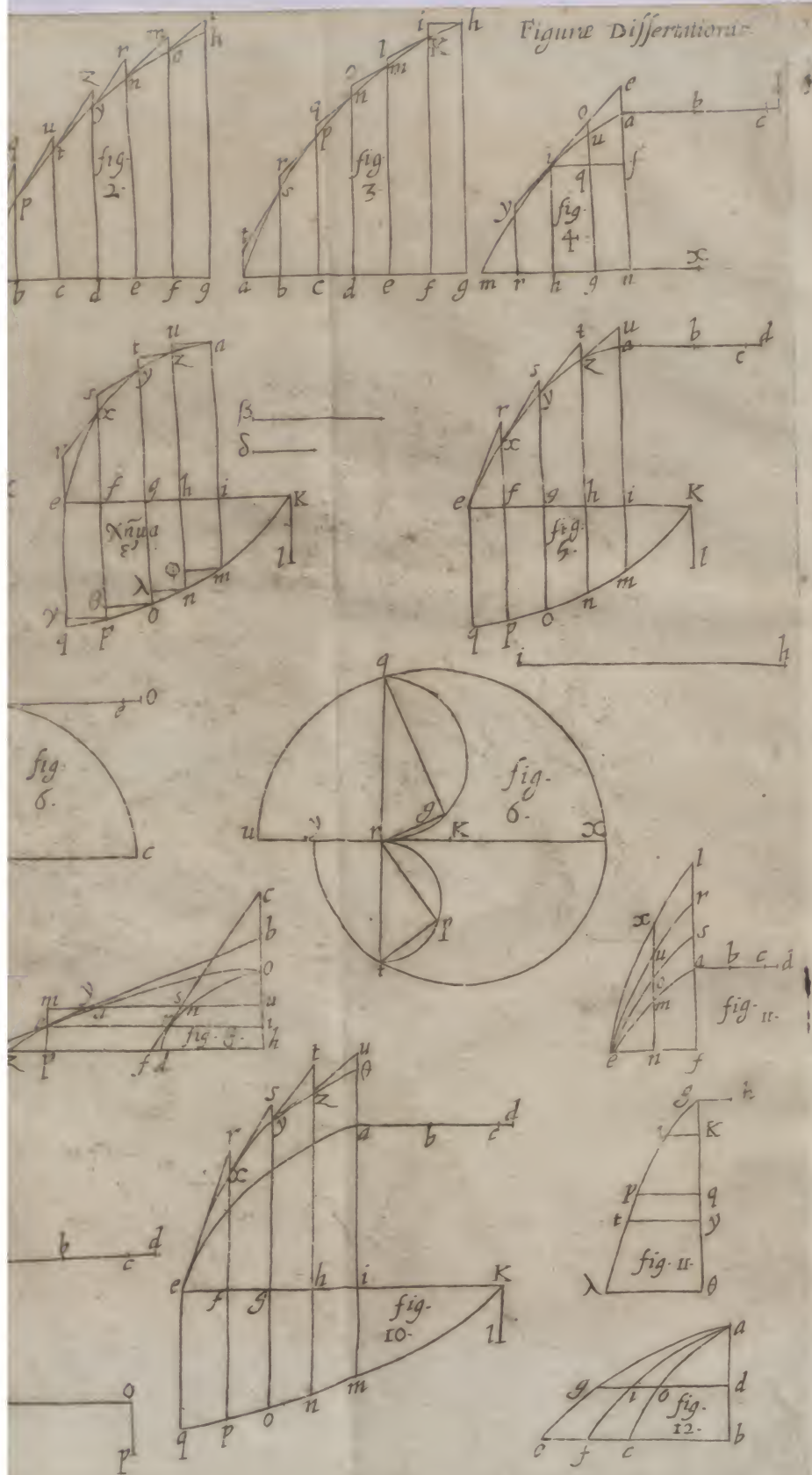
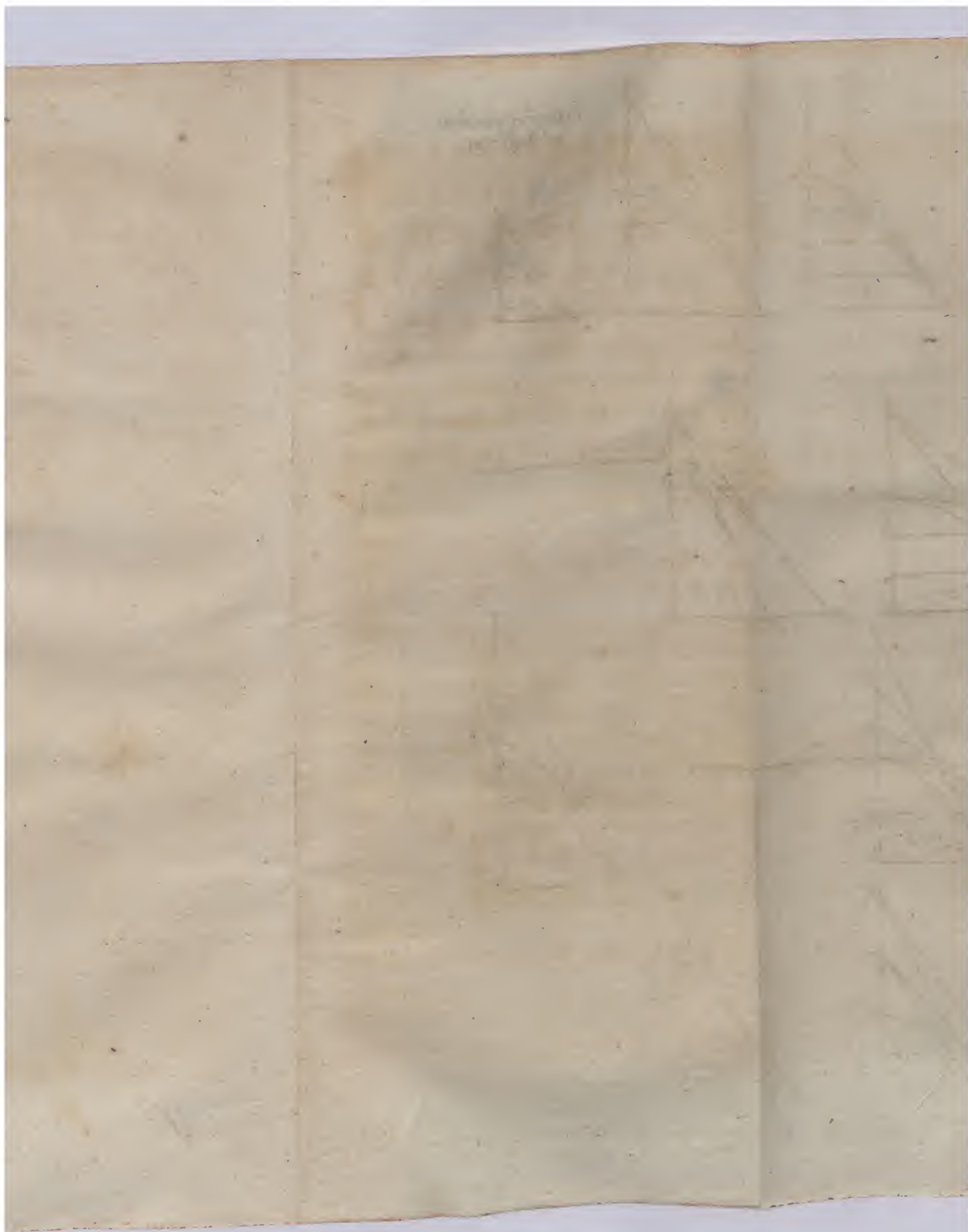




Figure Differentials





Figuree Appendicis.
ad Dissertat.

